



# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

K. Zh. Kudaibergenov, Questions of Keisler and Morley,  
*Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, Volume 291,  
Number 2, 292–293

<https://www.mathnet.ru/eng/dan47729>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use  
<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.175

May 14, 2025, 01:53:11



## ЛИТЕРАТУРА

1. *Говоров В.М.* – ДАН, 1978, т. 239, № 3, с. 515–518. 2. *Говоров В.М.* – ДАН, 1982, т. 262, № 5, с. 1044–1047. 3. *Капустин Н.Ю.* – ДАН, 1984, т. 274, № 6, с. 1294–1298. 4. *Диденко В.П.* – Дифференц. уравнения, 1972, т. 8, № 1, с. 24–28. 5. *Диденко В.П.* – Укр. матем. журн., 1973, т. 25, № 1, с. 14–24. 6. *Капустин Н.Ю.* – ДАН, 1982, т. 265, № 3, с. 524–525. 7. *Елеев В.А.* – Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 1, с. 56–63. 8. *Елеев В.А.* – Там же, 1978, т. 14, № 1, с. 22–29. 9. *Елеев В.А.* – Там же, 1979, т. 15, № 1, с. 41–53. 10. *Елеев В.А.* – Там же, 1981, т. 17, № 1, с. 58–72. 11. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 12. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 13. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957. 14. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

УДК 517.11

МАТЕМАТИКА

К.Ж. КУДАЙБЕРГЕНОВ

### О ВОПРОСАХ КЕЙСЛЕРА И МОРЛИ

(Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 17 V 1985)

В этой заметке изучается вопрос о числе однородных моделей полной теории. Введем некоторые определения и обозначения. Модели будем обозначать большими готическими буквами, а их основные множества (универсумы) – соответствующими латинскими: например,  $\mathfrak{M}$  и  $M$ . Символами  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  будем обозначать ординалы,  $\kappa, \lambda$  – кардиналы,  $\omega_\alpha$  –  $\alpha$ -й бесконечный кардинал,  $\omega = \omega_0$ . Пусть  $\lambda^{(\lambda)} = \sum_{\kappa < \lambda} \lambda^\kappa$ . Мощность множества  $A$  будем обозначать  $|A|$ . Через  $D(\mathfrak{M})$  обозначим множество всех типов (над  $\phi$ ), которые реализуются в модели  $\mathfrak{M}$ . В дальнейшем ОКГ будет означать, что предполагается обобщенная континуум-гипотеза.

**Определение 1.** Модель  $\mathfrak{M}$  называется  $\lambda$ -однородной, если для любого  $X \subseteq M$  мощности меньшей  $\lambda$  и любого  $a \in M$  любое элементарное отображение  $f: X \rightarrow M$  продолжается до элементарного отображения  $g: X \cup \{a\} \rightarrow M$ .

**Определение 2** [1]. Пусть  $\mathfrak{M}$  – модель мощности  $\kappa$ .

1)  $\kappa$  – регулярный кардинал. Тогда  $\mathfrak{M}$  называется  $\lambda$ -однородной, если  $\mathfrak{M}$   $\kappa$ -однородна.

2)  $\kappa$  – сингулярный кардинал. Тогда  $\mathfrak{M}$  называется  $\lambda$ -однородной, если  $\mathfrak{M}$  есть объединение элементарной цепи,  $\mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha < \beta} \mathfrak{M}_\alpha$ , где  $\mathfrak{M}_\alpha$  – однородная модель регулярной мощности и  $D(\mathfrak{M}_\alpha) = D(\mathfrak{M})$ ,  $\alpha < \beta$ .

Обозначим через  $h_T(\lambda)$  число однородных моделей теории  $T$  мощности  $\lambda$ .

В работе Кейслера и Морли [1] были поставлены следующие вопросы:

(ОКГ) Существуют ли полные теории  $T$ , у которых  $h_T$  удовлетворяют условиям:

- 1)  $\omega > h_T(\omega) > 3h_T(\omega_1)$ ;
- 2)  $h_T(\omega) = \omega$ ,  $1 < h_T(\omega_1) < \omega$ ;
- 3)  $h_T(\omega) = \omega_1$ ,  $h_T(\omega_1) \leq \omega$ ;
- 4)  $h_T(\omega) \geq \omega$ ,  $h_T(\omega_1) > h_T(\omega_2)$ ?

Эти вопросы были отмечены также в обзоре Е.А. Палютина [2, с. 372, проблема 8.17].

**Теорема 1 (ОКГ).** Для любого  $n = 1, 2, 3, 4$  существует полная теория  $T$ , у которой  $h_T$  удовлетворяет условию  $n$ ). В частности, существуют полные теории  $T_0(n), T_1(n), T_2, T_3(m), T_4$  такие, что

$$h_{T_0(n)}(\omega) = 6 + n, \quad h_{T_0(n)}(\omega_1) = 2,$$

$$h_{T_1(n)}(\omega) = 2^n, \quad h_{T_1(n)}(\omega_1) = 1,$$

$$h_{T_2}(\omega) = \omega, \quad h_{T_2}(\omega_1) = 3,$$

$$h_{T_3(m)}(\omega) = \omega_1, \quad h_{T_3(m)}(\omega_1) = m,$$

$$h_{T_4}(\omega) = \omega_1, \quad h_{T_4}(\omega_1) = \omega_1, \quad h_{T_4}(\omega_2) = 4$$

для любых  $n, m$  таких, что  $1 \leq n < \omega, 1 \leq m \leq \omega$ .

Построены теории и с другими функциями  $h_T$ , которые мы здесь для краткости не приводим.

**Теорема 2 (ОКГ).** Для любого  $0 < n < \omega$  существует полная теория  $T(n)$  такая, что  $h_{T(n)}(\lambda) = n$  для любого  $\lambda \geq \omega$ .

Теорема 2 дает ответ на вопрос, поставленный в книге Кейслера и Чэна [3, с. 263, 5.1.16]. Заметим, что в работе [4] анонсирован следующий результат: для любого  $n = 2^s \cdot 3^t$  существует полная теория  $T$  такая, что  $h_T(\omega) = n$ .

Обозначим через  $H_T(\lambda)$  число  $\lambda$ -однородных моделей теории  $T$  мощности  $\lambda$ . Очевидно, что для любой теории  $T$  выполняется  $H_T(\lambda) \leq h_T(\lambda)$  для всех  $\lambda \geq \omega$  и  $H_T(\kappa) = h_T(\kappa)$  для любого регулярного  $\kappa$ . В работе [1] доказано, что для любой теории  $T$  при ОКГ  $h_T(\lambda) > 0$  для любого  $\lambda \geq \omega$ . Заметим, что существуют теории  $T$  такие, что  $H_T(\lambda) = 0$  для любого сингулярного  $\lambda$ ; в качестве примера можно взять теорию плотного линейного порядка.

Из теоремы 1.15 [5] следует:

1) если теория  $T$  стабильна, то  $h_T(\lambda) = H_T(\lambda)$  для всех  $\lambda \geq (2^{1 T_1})^+$  таких, что  $cf(\lambda) \geq k(T)$ ;

2) если  $T$  суперстабильна, то  $h_T(\lambda) = H_T(\lambda)$  для всех  $\lambda \geq (2^{1 T_1})^+$ ;

3) если  $T$   $\omega$ -стабильна, то  $h_T(\lambda) = H_T(\lambda)$  для всех  $\lambda \geq \omega$ .

Эти факты вытекают также из следующей теоремы, которая похожа на теорему 1.15 из [5].

**Теорема 3.** Пусть  $T$  – стабильная теория,  $D$  – стабильная конечная диаграмма,  $\mathfrak{R} = \bigcup_{\alpha < \delta} \mathfrak{R}_\alpha$  – объединение элементарной цепи  $\lambda$ -однородных моделей

теории  $T$ , причем  $D(\mathfrak{R}_\alpha) = D$  для всех  $\alpha < \delta$  и  $cf(\delta) \geq k(T)$ . Тогда  $\mathfrak{R}$   $\lambda$ -однородна.

**Теорема 4.** Существует полная теория  $T$  такая, что

$$H_T(\lambda) = \begin{cases} 3, & \text{если } \lambda^{(\lambda)} = \lambda, \\ 2, & \text{если } \lambda^\omega = \lambda < \lambda^{(\lambda)}, \\ 0, & \text{если } \lambda^\omega > \lambda > \omega. \end{cases}$$

Для сравнения заметим, что при ОКГ для любой теории  $T$  выполняется  $h_T(\lambda) \leq h_T(\kappa)$  для всех  $\lambda > \kappa > \omega$  [1].

Институт математики и механики  
Академии наук КазССР  
Алма-Ата

Поступило  
11 VI 1985

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Keisler H.J., Morley M.D. – Israel J. Math., 1967, vol. 5, № 2, p. 73–78.
2. Палютин Е.А. В кн.: Справочная книга по математической логике. Ч. 1. Теория моделей. М.: Наука, 1982, с. 320–387.
3. Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977. 614 с.
4. Libo Lo – J. Symbol. Log., 1983, vol. 48, № 3, p. 539–541.
5. Shelah S. – Log. et anal., 1975, vol. 18, № 71–72, p. 241–308.