

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. A. Malyshev, A theorem on intersection with the k -dimensional barycenter,
Algebra i Analiz, 2005, Volume 17, Issue 4, 115–124

<https://www.mathnet.ru/eng/aa680>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

May 21, 2025, 04:12:50



ТЕОРЕМА О ПЕРЕСЕЧЕНИИ С k -МЕРНЫМ БАРИЦЕНТРОМ

© В. А. МАЛЫШЕВ

Для многомерного аналога барицентра доказывается многомерный аналог следующего утверждения: если при непрерывном отображении симплекса каждая грань переходит в себя, то образ пересекает барицентр.

Введение

Настоящая работа появилась благодаря следующей шуточной задаче.

Для строительства дачи математику потребовались доски одинаковой длины в количестве $n + 1$. Ему привезли $k + 1$ доску различной длины. Как при помощи n распилов математику получить $n + 1$ одинаковую доску так, что все остальные k досок оказались короче.

Задача о досках имеет содержательные обобщения.

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ полиномы

$$f(t) = (t - a_1) \dots (t - a_k)(t - x_1) \dots (t - x_n),$$

где корни $0 < a_1 < \dots < a_k < 1$ фиксированы, а корни $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$ свободны. Совокупность свободных и фиксированных корней делит отрезок $[0, 1]$ на $n + k + 1$ часть. На каждом таком подотрезке полином $f(t)$ имеет некоторое максимальное отклонение, площадь подграфика и длину графика. Будет дано геометрическое доказательство следующих утверждений.

Для k фиксированных корней можно указать n свободных корней так, что $n + 1$ максимальное отклонение одинаковы, а остальные k их не больше.

Для k фиксированных корней можно указать n свободных корней так, что $n + 1$ площадь подграфика одинаковы, а остальные k их не больше.

Ключевые слова: барицентр.

Для k фиксированных корней можно указать n свободных корней так, что $n + 1$ длина графика одинаковы, а остальные k их не больше.

При $k = 0$ в первом утверждении мы встречаемся с полиномами Чебышева!

§1. Задача о пересечении

Рассмотрим единичный симплекс

$$\Delta^n = \{\lambda \in \mathbb{R}_+^{n+1} : \lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1\}$$

размерности $n \geq 1$. Барицентром симплекса Δ^n называется точка

$$\text{bar}\Delta^n = \frac{1}{n+1} \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{n+1}.$$

Для граней симплекса Δ^n размерности $n - 1$ мы используем обозначение

$$\Delta_p^n = \{\lambda \in \Delta^n : \lambda_p = 0\}.$$

Хорошо известно, что граница

$$\partial\Delta^n = \bigcup_{p=0}^n \Delta_p^n$$

симплекса Δ^n не является его ретрактом [1].

Для упрощения формулировок будем использовать следующее полезное обозначение. Пусть в топологическом пространстве X заданы подпространства X_1, \dots, X_m , а в топологическом пространстве Y заданы подпространства Y_1, \dots, Y_m . Запись

$$F : (X; X_1, \dots, X_m) \longrightarrow (Y; Y_1, \dots, Y_m)$$

означает, что для непрерывного отображения

$$F : X \longrightarrow Y$$

при всех $1 \leq i \leq m$ выполнены включения $F(X_i) \subset Y_i$.

Лемма. Для любого непрерывного отображения

$$F : (\Delta^n; \Delta_0^n, \dots, \Delta_n^n) \longrightarrow (\Delta^n; \Delta_0^n, \dots, \Delta_n^n)$$

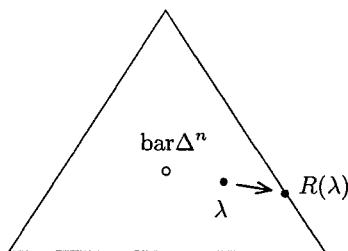
имеет место соотношение

$$F(\Delta^n) \cap \text{bar}\Delta^n \neq \emptyset.$$

Доказательство. Предположим, что $F(\Delta^n) \subset \Delta^n \setminus \text{bar}\Delta^n$, и получим противоречие. Построим стандартную ретракцию

$$R: \Delta^n \setminus \text{bar}\Delta^n \longrightarrow \partial\Delta^n.$$

Для этого возьмем точку $\lambda \in \Delta^n \setminus \text{bar}\Delta^n$, проведем луч из точки $\text{bar}\Delta^n$ через точку λ и определим $R(\lambda)$ как пересечение этого луча с границей $\partial\Delta^n$:



Включение $F(\Delta^n) \subset \Delta^n \setminus \text{bar}\Delta^n$ позволяет определить отображение

$$f = R \circ F$$

симплекса Δ^n на его границу $\partial\Delta^n$. Отображение

$$f|_{\partial\Delta^n}: \partial\Delta^n \longrightarrow \partial\Delta^n$$

переводит грани симплекса Δ^n в себя, поэтому гомотопно тождественному отображению

$$\text{id}: \partial\Delta^n \longrightarrow \partial\Delta^n.$$

Соответствующая гомотопия имеет вид

$$h(\lambda, \tau) = (1 - \tau)f(\lambda) + \tau\lambda.$$

Пара $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ является парой Борсука [1], поэтому гомотопия

$$h: \partial\Delta^n \times [0, 1] \longrightarrow \partial\Delta^n$$

может быть продолжена до гомотопии

$$H: \Delta^n \times [0, 1] \longrightarrow \partial\Delta^n.$$

В этом случае отображение

$$r(\lambda) = H(\lambda, 1)$$

оказывается ретракцией симплекса Δ^n на свою границу $\partial\Delta^n$. Полученное противоречие доказывает лемму. •

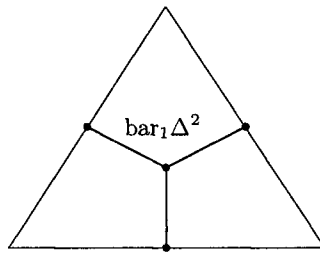
Для обобщения леммы нам потребуется конструкция k -мерного барицентра. Будем действовать по индукции. Определим 0-мерный барицентр по правилу

$$\text{bar}_0 \Delta^n = \text{bar} \Delta^n.$$

Далее, определим k -мерный барицентр как объединение джойнов

$$\text{bar}_k \Delta^n = \bigcup_{p=0}^n \text{bar}_0 \Delta^n * \text{bar}_{k-1} \Delta_p^n.$$

Иными словами, мы определяем k -мерный барицентр $\text{bar}_k \Delta^n$ как объединение отрезков, соединяющих 0-мерный барицентр $\text{bar}_0 \Delta^n$ со всеми точками $(k-1)$ -мерных барицентров $\text{bar}_{k-1} \Delta_p^n$ всех граней симплекса Δ^n . Например, одномерный барицентр $\text{bar}_1 \Delta^2$ образован из трех отрезков:



В случае симплекса Δ^{n+k} точки k -мерного барицентра обладают следующим свойством. Если точка принадлежит k -мерному барицентру $\text{bar}_k \Delta^{n+k}$, то у нее $n+1$ координат одинаковы, а остальные k их не больше.

Это экстремальное свойство k -мерного барицентра $\text{bar}_k \Delta^{n+k}$ делает содержательной следующую задачу. При каких X и X_0, \dots, X_{n+k} для любого непрерывного отображения

$$F: (X; X_0, \dots, X_{n+k}) \longrightarrow (\Delta^{n+k}; \Delta_0^n, \dots, \Delta_{n+k}^{n+k})$$

имеет место соотношение

$$F(X) \cap \text{bar}_k \Delta^{n+k} \neq \emptyset?$$

Далее, мы считаем, что X — клеточное пространство размерности n , а X_0, \dots, X_{n+k} — клеточные подпространства размерности $n-1$. При $k=0$ ответ на поставленный вопрос содержится в лемме.

§2. Теорема о пересечении

Введем в рассмотрение n -мерный симплекс

$$\nabla^n = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1\}$$

возрастающих векторов и зададим операцию

$$x \mapsto x_{\leq}$$

перестановки координат вектора x в порядке возрастания, например,

$$(1, 4, 1, 2)_{\leq} = (1, 1, 2, 4).$$

Фиксируем точки

$$0 < a_1 < \dots < a_k < 1$$

и определим функции $y_0(x), y_1(x), \dots, y_{n+k+1}(x)$ по правилу

$$(y_0(x), y_1(x), \dots, y_{n+k+1}(x)) = (0, a_1, \dots, a_k, x_1, \dots, x_n, 1)_{\leq}.$$

Положим

$$\nabla_p^n = \{x \in \nabla^n : y_p(x) = y_{p+1}(x)\}.$$

Непрерывное отображение

$$F : (\nabla^n; \nabla_0^n, \dots, \nabla_{n+k}^n) \longrightarrow (\Delta^{n+k}; \Delta_0^{n+k}, \dots, \Delta_{n+k}^{n+k})$$

будем называть связанным.

Для построения связанного отображения

$$F : \nabla^n \longrightarrow \Delta^{n+k}$$

отрезку $[y_p(x), y_{p+1}(x)]$ необходимо сопоставить неотрицательную величину $F_p(x)$ так, чтобы величина $F_p(x)$ обращалась в нуль, когда отрезок $[y_p(x), y_{p+1}(x)]$ вырождается в точку. Примеры связанных отображений имеют во Введении.

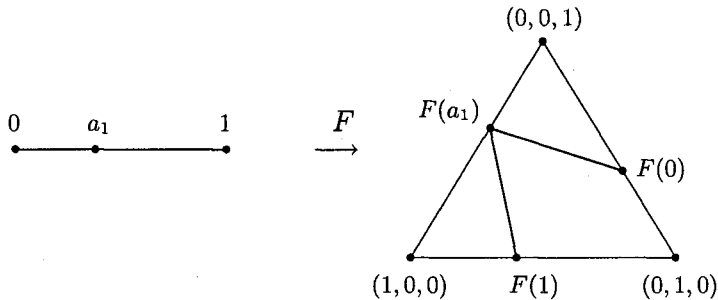
Связанные отображения

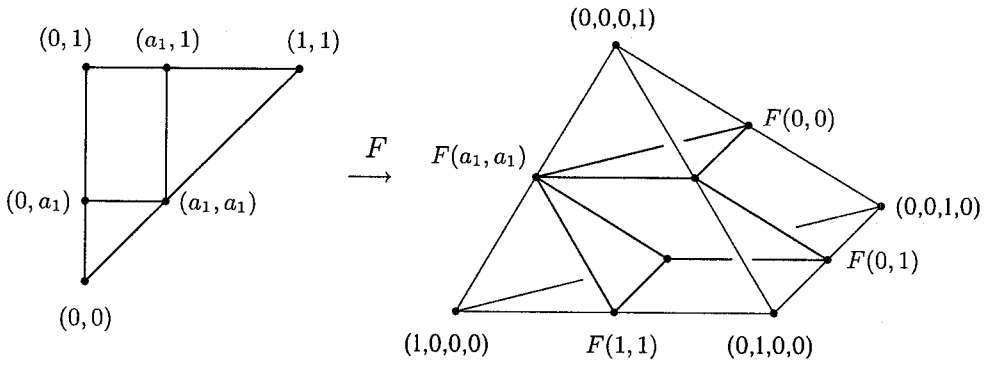
$$F : \nabla^1 \longrightarrow \Delta^2$$

и

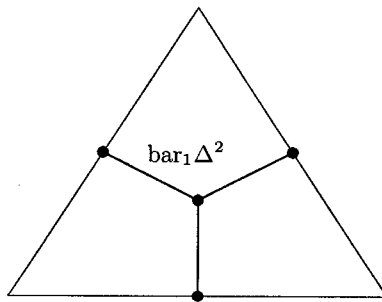
$$F : \nabla^2 \longrightarrow \Delta^3$$

действуют так:

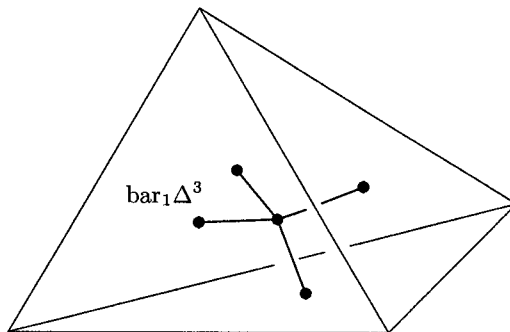




Взгляд на одномерные барицентры



и



приводит к следующей теореме.

Теорема. Для любого непрерывного отображения

$$F : (\nabla^n; \nabla_0^n, \dots, \nabla_{n+k}^n) \longrightarrow (\Delta^{n+k}; \Delta_0^{n+k}, \dots, \Delta_{n+k}^{n+k})$$

имеет место соотношение

$$F(\nabla^n) \cap \text{bar}_k(\Delta^{n+k}) \neq \emptyset.$$

Доказательство. При $k = 0$ доказательство следует из леммы. Допустим, что при $k \geq 1$ для связанного отображения

$$F : \nabla^n \longrightarrow \Delta^{n+k}$$

имеет место включение

$$F(\nabla^n) \subset \Delta^{n+k} \setminus \text{bar}_k \Delta^{n+k}.$$

Получим противоречие.

Обозначим через $\text{ske}_{n-1} \Delta^{n+k}$ объединение граней размерности $n-1$ симплекса Δ^{n+k} . Построим ретракцию

$$R : \Delta^{n+k} \setminus \text{bar}_k \Delta^{n+k} \longrightarrow \text{ske}_{n-1} \Delta^{n+k}.$$

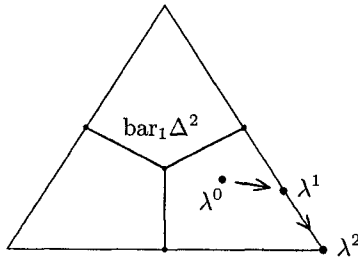
Пусть

$$\lambda^0 \in \Delta^{n+k} \setminus \text{bar}_k \Delta^{n+k}.$$

Проведем луч из точки $\text{bar} \Delta^{n+k}$ через точку λ^0 и обозначим через λ^1 пересечение этого луча с границей симплекса Δ^{n+k} . Пусть $\lambda^1 \in \Delta_{p_1}^{n+k}$, где $0 \leq p_1 \leq n+k$. Тогда

$$\lambda^1 \in \Delta_{p_1}^{n+k} \setminus \text{bar}_{k-1} \Delta_{p_1}^{n+k}.$$

Проведем луч из точки $\text{bar} \Delta_{p_1}^{n+k}$ через точку λ^1 и обозначим через λ^2 пересечение этого луча с границей симплекса $\Delta_{p_1}^{n+k}$.



В результате $k+1$ перемещения исходной точки λ^0 в симплексе Δ^{n+k} будет построена последовательность $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^k, \lambda^{k+1}$. Зададим отображение R по правилу

$$R: \lambda^0 \mapsto \lambda^{k+1}.$$

Отображение R является искомой ретракцией.

Включение $F(\nabla^n) \subset \Delta^{n+k} \setminus \text{bar}_k \Delta^{n+k}$ позволяет определить отображение

$$f = R \circ F$$

симплекса Δ^{n+k} на остов $\text{ske}_{n-1} \Delta^{n+k}$. Поскольку ретракция R переводит грани симплекса Δ^{n+k} в себя, отображение

$$f: \nabla^n \longrightarrow \Delta^{n+k}$$

является связанным.

Зададим непрерывное отображение

$$g: \nabla^n \longrightarrow \Delta^n$$

по правилу

$$g_q(x) = \sum_{p: [y_p(x), y_{p+1}(x)] \subset [x_q, x_{q+1}]} f_p(x),$$

где $x_0 = 0$ и $x_{n+1} = 1$. Легко видеть, что отображение g является связанным

$$g: (\nabla^n; \nabla_0^n, \dots, \nabla_n^n) \longrightarrow (\Delta^n; \Delta_0^n, \dots, \Delta_n^n).$$

Поскольку $f(\nabla^n) \subset \text{ske}_{n-1} \Delta^{n+k}$ и любая точка остова $\text{ske}_{n-1} \Delta^{n+k}$ имеет не более n ненулевых координат, имеет место включение $g(\nabla^n) \subset \partial \Delta^n$. Это противоречит вытекающему из леммы случаю $k = 0$. Теорема доказана. •

§3. Следствия

Содержательные следствия теоремы о пересечении появляются в задачах о полиномах

$$f(t) = (t - a_1) \dots (t - a_k)(t - x_1) \dots (t - x_n)$$

с фиксированными

$$0 < a_1 < \dots < a_k < 1$$

и свободными

$$0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$$

корнями. В задаче про максимальные отклонения связанное отображение

$$F: \nabla^n \longrightarrow \Delta^{n+k}$$

строится так:

$$F_p(x) = \frac{1}{\sum_{q=0}^{n+k} \|f\|_{C[y_q(x), y_{q+1}(x)]}} \|f\|_{C[y_p(x), y_{p+1}(x)]}.$$

В других задачах связанные отображения строятся аналогично.

Интересен вопрос об единственности экстремальных полиномов. Этот вопрос эквивалентен вопросу о количестве точек в пересечении

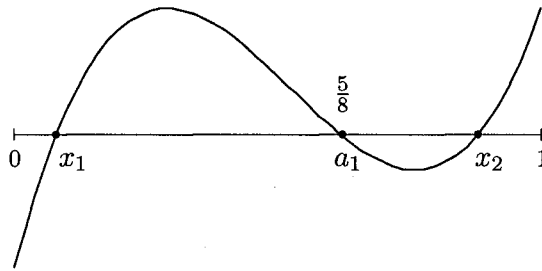
$$F(\nabla^n) \cap \text{bar}_k(\Delta^{n+k}).$$

Расположение образа $F(\nabla^n)$ в симплексе Δ^{n+k} и вид k -мерного барицентра $\text{bar}_k(\Delta^{n+k})$ не исключают существование нескольких точек.

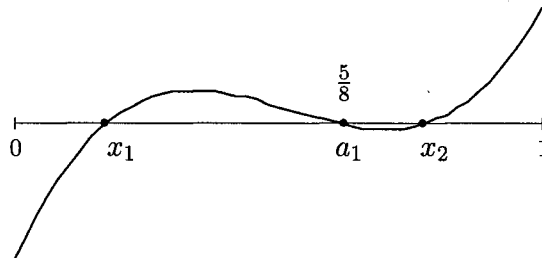
В заключение — два примера. При $k = 1$ и $n = 2$ полином

$$f(t) = (t - a_1)(t - x_1)(t - x_2)$$

имеет один фиксированный и два свободных корня. При должном выборе свободных корней x_1 и x_2 полином



имеет 3 одинаковых отклонения, а полином



имеет 3 одинаковых площади подграфика.

Список литературы

- [1] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., *Начальный курс топологии. Геометрические главы*, Наука, М., 1977.

Рыбинская
государственная авиационная
технологическая академия
Россия
E-mail: wmal@ryb.adm.yar.ru

Поступило 10 сентября 2004 г.