Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. И. Арнольд, А. Н. Колмогоров и естествознание, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 1, 25–44

DOI: 10.4213/rm699

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 94.16.31.119
5 октября 2024 г., 14:28:13

2004 г. январь — февраль *т. 59, вып. 1(355)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 51

А.Н. КОЛМОГОРОВ И ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ

В. И. Арнольд

К вопросам теоретической математики, вроде проблем Гильберта, Андрей Николаевич относился без всякого догматического почтения. Его очень смешил обычай французов писать слова "Чистая Математика" с заглавными буквами, а "прикладная механика" – с малой. Сам он эти науки не различал и был всегда готов применить в одной из них идеологию другой.

В абстрактно-аксиоматическое образование математиков – студентов механико-математического факультета МГУ он решительно ввел "математический практикум", где за неделю-две нужно было решить реальную задачу, иногда требовавшую многочасовых вычислений (обычно на "компьютерах Феликс"), никак не сводимых к жонглированию аксиомами.

Вот типичный пример такой задачи Колмогорова, вдохновленной 16-й проблемой Гильберта (о числе предельных циклов полиномиального векторного поля, задающего систему дифференциальных уравнений

$$dx/dt = P(x,y), \qquad dy/dt = Q(x,y),$$

где P и Q – многочлены второй степени).

Колмогоров раздал нескольким сотням студентов несколько сотен таких векторных полей, выбрав многочлены P и Q со случайными коэффициентами. Он требовал от каждого студента найти число предельных циклов своего векторного поля, в надежде наткнуться при каком-либо выборе случайных коэффициентов на много циклов (а именно, в надежде найти пример с более чем тремя циклами: пример с тремя циклами легко строится малым возмущением гамильтоновой системы

$$dx/dt = \partial H/\partial y, \qquad dy/dt = -\partial H/\partial x,$$

а систем с числом циклов бóльшим трех никто тогда не знал).

Публикуя эту статью, редколлегия осуществляет возможность ознакомить читателя с представляющими большой интерес взглядами выдающегося ученого на вклад его учителя А. Н. Колмогорова в естествознание.

Редколлегия не несет ответственности за личные взгляды и оценки авторов статей. В данном случае содержание статьи вызвало в редколлегии полемику. Автор статьи не согласился учесть высказанные замечания, некоторые из них поэтому указаны в примечаниях к статье.

© В. И. Арнольд 2004

Результат этого эксперимента (повторявшегося несколько лет) удивителен: ни у одного из исследованных студентами полей не оказалось *ни одного* предельного цикла!

Удивительно это потому, что наличие цикла – *устойчивое* явление: оно сохраняется при произвольном (не слишком большом) изменении коэффициентов многочленов, так что поля, имеющие предельные циклы, образуют в пространстве всех полей (данной степени) открытое множество. В этом смысле присутствие цикла "*топологически типично*". Колмогоров же сделал из своего эксперимента тот вывод, что *аксиоматически определенная топологическая типичность – математическая абстракция, плохо соответствующая физической и естественно-научной реальности.* Дело в том, что указанное открытое множество систем с циклами может быть столь маленьким, что при случайном выборе системы экспериментатор в него не попадет.

К сожалению, это экспериментальное и естествоиспытательское заключение до сих пор не превращено еще ни в какое математическое утверждение: ни в теорему, ни в строго сформулированную гипотезу.

Несколькими годами позже эксперимента Колмогорова китайские математики предъявили пример системы с многочленами второй степени P и Q, имеющей *четыре* предельных цикла. В этом примере некоторые из коэффициентов в сотни тысяч раз больше других. Случайный выбор коэффициентов приводит в нужную окрестность такого примера только при многомиллионном повторении в течение тысяч лет.

Что же касается самой проблемы Гильберта, далекой от этих практических вопросов, то она и сегодня совершенно не решена: неизвестно даже, *ограничено ли число циклов векторных полей степени n (например, при $n = 2$) сверху единой для всех полей с многочленами P и Q этой степени одной и той же* (не зависящей от коэффициентов многочлена) *постоянной* (которая уж никак не может расти с ростом степени n медленнее, чем cn^2).

Доказана только лишь ограниченность числа предельных циклов для каждого фиксированного полиномиального векторного поля: число циклов ограничено сверху *зависящей от поля* постоянной, что не исключает возможности полей степени n или даже степени 2, для которых число предельных циклов как угодно велико.

Замечу еще, что не решен даже аналогичный вопрос для бесконечно-малых возмущений "интегрируемых систем", которые сами имеют бесконечное число замкнутых орбит (не являющихся, впрочем, предельными циклами, притягивающими или отталкивающими соседние спирали, а расположенными как концентрические окружности всевозможных радиусов).

Пример такой интегрируемой системы доставляют исследовавшиеся Колмогоровым с 1936 г. ("Sulla teoria di Volterra della lotta per l'esistenza", Giorn. Ist. Ital. Attuari, v. 7, № 1, 1936, p. 74–80; "Качественное изучение математических моделей динамики популяций", Проблемы кибернетики, вып. 25, 1972, с. 101–106) уравнения "Лотки–Вольтерры" борьбы двух видов:

$$\dot{x} = x(a + bx + cy), \qquad \dot{y} = y(d + ex + fy).$$

Интегрируемость получается здесь при некотором алгебраическом соотношении между параметрами (a, b, c, d, e, f) (например, когда $b = f = 0$). В этом случае систе-

ма имеет *первый интеграл*, записывающийся (при надлежащем выборе единиц измерения переменных) в виде

$$H = x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

где $z = 1 - x - y$, а (α, β, γ) – зависящие от параметров постоянные.

Вопрос о том, *сколько из замкнутых кривых $H(x, y) = h$ превращаются при малом возмущении интегрируемой системы* (например, при малых b и f) *в предельные циклы* открыт: ограничено ли сверху число нулей соответствующего интеграла Пуанкаре единой для всех значений параметров (a, c, d, e) постоянной?

Интеграл Пуанкаре измеряет вариацию первого интеграла H невозмущенной системы под действием малого возмущения в первом приближении по этому возмущению:

$$I(h) = \oint \left(\frac{\partial H}{\partial x} P + \frac{\partial H}{\partial y} Q \right) dt,$$

(интеграл берется вдоль решения $(x(t), y(t))$ невозмущенной системы, параметризующего кривую $H(x, y) = h$).

В случае полиномиального первого интеграла H ограниченность числа нулей h абелева интеграла $I(h)$ доказана (разными способами) А. Н. Варченко и А. Г. Хованским. Но для задачи Лотка–Вольтерра интеграл H – сложная трансцендентная функция, так что эти методы алгебраического происхождения (основанные на исследовании интегралов Пикара–Лефшеца, называемом сегодня "теорией связности Гаусса–Манина") ни к каким полезным выводам не приводят.

Интересно, что из всех проблем Гильберта, поставленных им в качестве завещания XIX века веку двадцатому, только две – тринадцатая и шестнадцатая – затрагивают наиболее бурно развивавшийся в XX веке отдел математики – топологию.

В развитии этой науки Колмогорову принадлежит также замечательное достижение – создание *теории когомологий* (одновременное с Дж. Александером и изложенное Колмогоровым в середине тридцатых годов в серии из четырех заметок в Докладах Парижской академии наук).

Рассказывая мне в 1963 году об истории этих заметок, Андрей Николаевич описал их примерно так. "Основной идеей была, – говорил он, – *не математика, а физика*, а именно, с одной стороны, гидродинамика несжимаемой жидкости с ее понятием потока жидкости через поверхность, а с другой – теория магнитного поля и уравнений Максвелла, включая формулу Гаусса для коэффициента зацепления двух кривых.

Хотя моя теория сделана чисто комбинаторной, – продолжал Андрей Николаевич, – я никогда бы ее не придумал, если бы не эти физические вопросы, трактовавшиеся уже Пуанкаре в связи с его теорией интегральных инвариантов динамических систем, а затем де Рамом.

Но текст Пуанкаре оставался непонятым бóльшей частью математического сообщества, пока – как говорили бурбакисты – одна страничка Пуанкаре не была растолкована всем Э. Картаном, у которого эти идеи Пуанкаре и заимствовал де Рам".

В заключение Андрей Николаевич сказал мне, что позже он не продолжал этих своих исследований, что и привело к тому, что даже теперь, двадцать или даже тридцать лет спустя, они все еще остаются *непонятыми* и *неиспользованными* современными математиками.

“Дело в том, – сказал Андрей Николаевич, – что я описал в этих заметках не только *группы* когомологий (эту-то часть все поняли и много используют), но еще и *кольцо*, притом не только, как у Пуанкаре, в случае многообразия, но и для других комплексов, имеющих, вообще говоря, сложные особенности”.

Андрей Николаевич надеялся, что “если бы сейчас топологи разобрали и эту часть заметок, то они смогли бы получить много новых и важных научных результатов”.

Интересно, что строгий критик математиков, В. А. Рохлин, высоко оценил эти удивительные высказывания Колмогорова (которому я наивно пытался объяснить, что произошло с алгебраической топологией за те десятки лет, которые он ею не занимался).

По словам Рохлина, замечательно в этих высказываниях Колмогорова не только глубокое предвидение роли когомологических операций (к числу которых относится и открытое им умножение в кольце когомологий), но и способность трезво сравнить по их значению два своих разных открытия, что особенно затруднено в тех случаях, когда, как в данном случае, оба открытия совершенно замечательны.

Колмогоров, хотя и создавал во многих ситуациях стройные абстрактные теории крупного значения, больше ценил конкретные достижения, и для него законы Кирхгофа электрических цепей и потоки бездивергентных векторных полей через гиперповерхности были важнее обобщающих их понятий теории когомологий.

Мне вспоминаются здесь слова Сильвестра о том удивительном интеллектуальном явлении, что *доказательства общих утверждений обычно проще, чем доказательства содержащихся в них разнообразных частных случаев* (каковые и составляют суть науки, хотя бы и излагаемой, ради простоты доказательств, дедуктивно, т.е. начиная от общих утверждений).

Когда Андрей Николаевич начал преподавать математику школьникам в созданной им (в московском Давыдкове) школе-интернате, мне довелось спорить с ним именно о соотношении общего и частного.

Я утверждал, что такие простые общие факты, как тождество Якоби

$$\big[[a,b],c\big] + \big[[b,c],a\big] + \big[[c,a],b\big] = 0$$

должны рано появляться в разумной образовательной программе, и даже не ради теории алгебр Ли, а, например, в случае обычного векторного произведения в трехмерном евклидовом пространстве (где *это тождество выражает теорему о пересечении высот треугольника в одной точке*).

Мнение же Андрея Николаевича низводило роль тождества Якоби до положения мелкой алгебраической или даже вычислительной подробности, тогда как теореме о пересечении высот треугольника в одной точке он придавал особый вес, считая ее *главнейшим и труднейшим* достижением евклидовой геометрии.

Интересно, что (в отличие, например, от теоремы о пересечении медиан) теорема о пересечении высот несправедлива в геометрии плоскости Лобачевского (ни в геометрии сферы). Я думаю даже, что было бы интересно получить соответствующую формулу для площади треугольника, образованного тремя точками пересечения высот треугольника на сфере или на плоскости Лобачевского.

Так или иначе, мне всегда казалось, что Андрею Николаевичу больше нравилось скалолазание и альпинистское покорение трудных вершин, с которых видны широкие

перспективы новых областей, чем прокладка шоссейных дорог популярных общих теорий (с чем он, впрочем, тоже прекрасно справлялся).

"Чисто" математические теории Андрей Николаевич как-то инстинктивно ценил меньше, чем достижения, допускающие также и внематематические приложения (естественно-научного или даже гуманитарного характера).

"Не ищите, – говорил он мне, – *математического смысла в моих гидродинамических достижениях. Его там нет. Я ничего не вывожу из исходных аксиом или определений* (как говорят физики, из "первых принципов"): мои результаты не *доказаны*, а *верны*, и это гораздо важнее!"

Из рассказов очевидцев я знаю, что Колмогоровские законы подобия в теории турбулентностей были им получены не из соображений размерности (которыми их сейчас объясняют), а путем выстилания всех полов на даче в Комаровке *бумажными простынями с тысячами экспериментальных данных* (полученных как он мне рассказывал, но не написал, в основном, от Прандтля).[1]

Главным изобретением оказался переход к рисованию графиков в двойном логарифмическом масштабе. Степенные законы $y = Cx^a$ изображаются в этом случае прямолинейными графиками,

$$(\ln y) = a(\ln x) + \ln C.$$

Показатель степени a немедленно определяется по такому графику прикладыванием линейки (как наклон прямой, аппроксимирующей сотни или тысячи точек на билогарифмическом графике).

Что касается соответствующей этим наблюдениям (т.е. в конечном счете данным гидродинамических экспериментов) абстрактных математических теорий, то их Андрей Николаевич сформулировал уже в сороковых годах в спорах в Казани с Ландау о природе турбулентности, но до современного научного сообщества эти идеи (или гипотезы – теорем до сих пор нет) не дошли даже и сегодня, так что я здесь их повторю (основываясь, впрочем, на изложении, данном Колмогоровым уже в 50-е годы, в программе его *семинара на механико-математическом факультете МГУ о приложениях теории динамических систем к гидродинамике*).

Согласно этой теории, при увеличении числа Рейнольдса (которое можно формально реализовать путем уменьшения коэффициента вязкости в уравнении Навье–Стокса, описывающего диссипацию энергии движения жидкостей за счет "трения" соседних частиц жидкости друг о друга вследствие неравенства их скоростей) происходят следующие явления.

Законы гидродинамики задают в (бесконечномерном) пространстве полей скоростей жидкости (бездивергентных, если жидкость несжимаема) *векторное поле*, описывающее скорость изменения данного поля скоростей вследствие давления, инерции и взаимодействия частиц жидкости.

[1] В архиве А. Н. Колмогорова материалов Прандтля не обнаружено; в то же время Андрей Николаевич говорит (А. Н. Колмогоров. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 294), что его результаты находятся в хорошем согласии с измерениями корреляции скорости, выполненными Драйденом и др. (*Прим. ред.*)

Если вязкость велика (число Рейнольдса мало), то это векторное поле в бесконечномерном пространстве имеет "притягивающую точку" (аттрактор) – эта точка бесконечномерного пространства представляет собой стационарное (неизменное со временем) поле скоростей жидкости в рассматриваемой области. Это движение жидкости называется ламинарным. Оно устойчиво (является аттрактором): при малом отклонении начального поля скоростей от этого ламинарного поля-аттрактора гидродинамическая эволюция будет автоматически приближать течение к невозмущенному ламинарному течению.

Но по мере возрастания числа Рейнольдса (например, при уменьшении вязкости, гасящем возмущения и вызывающей устойчивость) характер динамической системы в бесконечномерном пространстве будет меняться. А именно, притягивающая точка (ламинарный аттрактор) потеряет устойчивость.

Дальнейший ход событий, по теории Колмогорова, такой. Роль аттрактора (установившегося режима движения) перейдет от точки к множеству бóльшей размерности, например, к *предельному циклу*.

В этом случае наблюдение за течением жидкости обнаружит периодические колебания мгновенного поля скоростей с течением времени (нечто вроде периодической смены времен года). Так что для описания мгновенного состояния поля скоростей (т.е. положения изображающей его точки на предельном цикле-аттракторе) нужно задать одно число ("фазу" колебания).

И все это поведение устойчиво: малое возмущение начального состояния течения со временем затухнет, и течение снова выйдет на тот же невозмущенный периодический режим.

Описание дальнейших событий (при еще бóльших числах Рейнольдса, например, вследствие дальнейшего уменьшения создающей устойчивость вязкости) – это потеря устойчивости периодического движения (одномерного аттрактора). Утверждается, что при этом роль аттрактора будет переходить ко *множествам все большей и большей размерности*, причем и само движение вдоль аттрактора может делаться все менее и менее устойчивым.

В физических терминах аттрактор – это *установившийся режим движения*, нечто вроде климата. Он устойчив, т.е. средние значения различных наблюдаемых величин для возмущенного движения за большое время возвращаются к своим исходным средним значениям, до возмущения.

Эта устойчивость "климата" вовсе не означает устойчивости "погоды": малое отклонение начальной точки вдоль аттрактора может быстро расти вследствие гидродинамической эволюции, так что возмущенное движение происходит вдоль того же самого аттрактора, но с возможно другой (и хаотически, вообще говоря, меняющейся со временем) "фазой", описываемой столькими числами, какова размерность аттрактора.

Гипотезы, сформулированные Колмогоровым, – это гипотезы о росте размерности аттрактора с ростом числа Рейнольдса. Их две.

1. *По мере роста числа Рейнольдса возникают аттракторы все бóльшей размерности.*

2. *По мере роста числа Рейнольдса исчезают все аттракторы меньшей размерности*: точки (ламинарные течения), одномерные предельные циклы (периоди-

чески меняющиеся со временем течения), двумерные аттракторы, и т.д. (так что для указания точки на аттракторе требуется все большая и большая информация).

Колмогоров настаивал при этом на том, что вторая гипотеза не исключает формальное сохранение аттракторов малой размерности, если их области притяжения становятся при росте числа Рейнольдса очень малыми.

Подобное "затягивание потери устойчивости" наблюдалось даже в экспериментах. Но практически такие маломерные аттракторы сказываются редко, потому что всегда присутствующие в эксперименте малые возмущения способны вывести состояние движения за пределы "бассейна" (области притяжения) аттрактора, и тогда гидродинамическая эволюция приведет это состояние не к возмущаемому аттрактору, а к какому-либо совершенно другому.

Интересные экспериментальные наблюдения этого рода были обнаружены при попытке повторить классические гидродинамические опыты Кавендишевской лаборатории на тех же экспериментальных установках, на которых они были впервые проведены столетием раньше.

Оказалось, что воспроизвести старые результаты о затягивании потери устойчивости не удается: устойчивость теряется в новом веке гораздо быстрее. Но, когда опыты перенесли в глубокую шахту, то трудность исчезла, затягивание удалось наблюдать. Объяснили это тем, что в новом веке гораздо сильнее стали возмущения от уличного движения (а в шахте их нет).

Возвращаясь к теории Колмогорова, замечу, что современные математики-аксиомофилы обычно понимают ее неправильно. Дело в том, что они оставляют физику дела в стороне, а исходят из математически строго определенного понятия "аттрактор", т.е. "притягивающее множество динамической системы".

При таком понимании они печатают "математические доказательства" утверждения (гипотезы 1 выше), о росте размерности аттрактора с ростом числа Рейнольдса (вычисляя даже асимптотические формулы, делающие эту размерность пропорциональной некоторой положительной степени числа Рейнольдса).

И все это – от аксиомофильского пренебрежения сутью дела и от подмены физического понятия "установившийся режим движения" математически строго определенным термином "аттрактор".

Представим себе, например, аттрактор в виде окружности, к которой притягиваются соседние спиралевидные траектории. На самой же этой окружности система пусть имеет два положения равновесия: отталкивающее ("северный полюс") и притягивающее ("южный полюс"), остальные же точки окружности пусть движутся вдоль нее от северного полюса к южному.

С математической аксиоматической точки зрения в этой аксиоме *присутствует одномерный аттрактор.* Предельным же режимом здесь будет не весь он, а только одна его точка – "южный полюс". Притяжение к окружности есть, но затем, уже оказавшись к ней близко, система будет совершать не одномерное движение, а, после некоторого переходного процесса, выйдет на "ламинарный" предельный режим, являющийся *не одномерным циклом, а нульмерным положением равновесия.*

Колмогоров не признал бы в этой системе одномерного предельного режима, а говорил бы о нульмерном.

Чтобы избежать невежественного искажения его гипотезы, следовало бы добавить

к слову “аттрактор” эпитет “минимальный” (т.е. “не содержащий меньших податтракторов”).

При таком математическом понимании предельного режима гипотеза становится правдоподобной. Но опубликованные попытки ее доказать рушатся, так что вопрос о ее справедливости остается открытым.

В 1965 году я рассказывал об описанной выше теории Колмогорова и ее обобщениях (включающих влияние отрицательности кривизны группы диффеоморфизмов на невозможность долговременного динамического прогноза погоды) на семинаре Р. Тома в Институте высших научных исследований в Бюре под Парижем. В 1970 г. слушатели опубликовали понятую ими часть этой теории как свою “теорию возникновения турбулентности”, не ссылаясь на предшественников.

Возвращаясь к *затягиванию потери устойчивости*, укажу еще, что исследование этого затягивания выявило удивительную разницу между аналитическими системами и системами, заданными лишь гладкими (даже бесконечно-дифференцируемыми) векторными полями в фазовом пространстве.

Первый пример этого рода опубликовала Шишкова, ученица Л. С. Понтрягина, окончательная же общая теория построена А. И. Нейштадтом.

Рассмотрим векторное поле с неподвижной точкой, теряющей устойчивость в момент прохождения пары собственных чисел поля, линеаризованного в неподвижной точке, из левой (устойчивой) полуплоскости в правую через мнимую ось.

Классическое описание этого явления бифуркации потери устойчивости принадлежит Пуанкаре (рассматривавшему аналитические поля), а потому называется современными математиками бифуркацией Хопфа (невзирая на работы Андронова, перенесшего десятком лет раньше результаты Пуанкаре на гладкий случай с помощью одной теоремы Понтрягина, также исследовавшего теорию бифуркаций циклов Пуанкаре).

Упомянутая бифуркация состоит в том, что при потере устойчивости положением равновесия роль аттрактора переходит к предельному циклу, близкому к этому положению равновесия (а именно, радиус цикла имеет порядок величины квадратного корня из закритичности, т.е. из отличия параметра, изменение которого привело к потере устойчивости, от того значения, при котором произошло пересечение собственными числами мнимой оси).

Такая потеря устойчивости называется *мягкой*, так как после потери устойчивости наблюдаемые величины становятся не постоянными, а близкими к постоянным периодическими функциями, изображающими колебания малой амплитуды вблизи старого постоянного значения.

Строго говоря, описанный сценарий “рождения цикла” реализуется лишь в половине случаев (когда положительна одна из комбинаций коэффициентов ряда Тейлора, включающая и линейные, и нелинейные члены).

Другой знак этой комбинации приводит к двойственному сценарию, когда предельный цикл оказывается не притягивающим, а отталкивающим (“репеллером”). В этом случае он существует не после потери устойчивости, а до нее, когда положение равновесия еще устойчиво.

Но бассейн притяжения положения равновесия становится малым (он ограничен этим циклом-репеллером на соответствующей инвариантной поверхности), его радиус пропорционален квадратному корню из отличия значения параметра (изменение

которого делает положение равновесия неустойчивым) от критического значения (при котором собственные числа переходят через мнимую ось), а бассейн притяжения положения равновесия стягивается до нуля.

После этого происходит "*жесткая потеря устойчивости*": фазовая точка быстро уходит далеко от потерявшего устойчивость положения равновесия, к какому-нибудь совершенно другому режиму движения (что может означать в реальной системе катастрофу, вроде взрыва).

Все описанное относится к стационарной во времени системе, рассматриваемой при различных, но *не меняющихся со временем*, фиксированных значениях параметра (при новых значениях которого положение равновесия неустойчиво). Обратимся теперь к случаю, когда и сам этот параметр меняется, хотя и медленно с течением времени. Оказывается, сценарии поведения системы при таком медленном изменении параметра совершенно различны в гладких и аналитических системах.

А именно, в гладких, но не аналитических системах типично квазистационарное поведение. Например, в случае рождения цикла наблюдается смена стационарного состояния периодическим движением медленно растущей со временем амплитуды (пропорциональной корню квадратному из закритичности).

В аналитической же системе в момент потери устойчивости положением равновесия никаких колебаний вначале не заметно: *положение равновесия математически уже потеряло устойчивость, но скорость нарастания возмущений и их начальная амплитуда столь малы, что эффект неустойчивости практически не сказывается в течение столь длительного времени, за которое медленно меняющийся параметр успевает измениться на величину порядка единицы* (так что закритичность и радиус цикла-аттрактора тоже становятся не малыми).

После этого неустойчивость положения равновесия вызывает быстрый перескок на давно уже готовящийся цикл-аттрактор. Этот перескок может быть столь же опасным, что и жесткая потеря устойчивости: система скачком меняет режим своего поведения на далекий от первоначального режим, не оставляя наблюдающему ее оператору времени на реакцию, возвращающую параметры в безопасную область (что типично для управления системами, теряющими устойчивость мягким образом).

Все эти теоремы доказаны как в случае принудительного изменения значения параметра со временем, так и при наличии обратной связи, когда на изменение параметра влияют и происходящие в системе процессы.

Из этих теорем следует, как опасно системе быть слишком совершенной (аналитической): *это совершенство может сделать незаметными признаки уже имеющейся потери устойчивости и затянуть момент потери устойчивости настолько, что вызванные переходом на новый режим потрясения делаются опасными для системы.* Я слышал от специалистов, что именно так и обстояло дело в ряде знаменитых катастроф: операторы не замечали уже имеющейся опасности вследствие чрезмерного совершенства устройств, приводящих к затягиванию потери устойчивости.

Возвращаясь к гидродинамике, подчеркну, что до Колмогорова идею о необходимости исходить здесь не столько из теорий, сколько из экспериментов, высказывали,

например, Р. Бойль и Галилей (в то время как Леонардо да Винчи уже пытался понять законы гидродинамики и турбулентности на основе степенных законов теории размерностей, явившихся предшественниками Колмогоровских).

Леонардо выводил из соображений подобия причину бóльшего размера китов по сравнению со слонами: вес тела растет пропорционально *кубу* линейных размеров, а прочность костей – пропорционально *квадрату*. Если бы слон был вдвое больше, он был бы тяжелее в 8 раз, и ноги не выдержали бы этого веса – а для кита этой проблемы нет.

Роберт Бойль, как и Колмогоров, явно предпочитал эксперимент теоретическим рассуждениям:

"Математиков, которые внесли достойный вклад в гидростатику, приходится обыкновенно рассматривать скорее как геометров, нежели как философов, и не ссылаться на них при объяснении явлений природы. *Экспериментальные доказательства, хоть и подвержены ошибкам, имеют более высокий статус, нежели математические*, ибо последние строятся на предположениях и постулатах, кои легко могут привести к ошибкам, вследствие того, что объекты математики абстрактны".

Robert Boyle, Hydrostatical Paradoxes, The Works,
Ed. Th. Birch, London, 1772, Vol. 2, pp. 739–790.

Во время Государственного экзамена по военной подготовке генерал-артиллерист, приехавший в МГУ оценивать выпускников, спросил меня: "а кто у вас сейчас самый лучший математик России?" Я назвал Колмогорова, и генерал обрадовался: "он и у нас сделал много полезного, мы это помним и тоже его ценим".

Андрей Николаевич с удовольствием рассказывал мне, как в 1942 году Артиллерийское управление пригласило его из Казани (куда была эвакуирована Академия наук) в Москву для консультаций: в Москве Андрей Николаевич получил по его словам в качестве жилья *диван* (так он мне рассказывал) в Нескучном саду (в здании Президиума Академии наук)[2] и разработал статистическое обоснование своих предложений по организации зенитного огня против массированных налетов противника.

Эти предложения, называемые *теорией искусственного рассеяния снарядов* указывают, что в некоторых условиях *предпочтительно не целиться, а стрелять наугад*, создавая заграждающую самолетам противника путь завесу из снарядов. Дело в том, что при попытке попасть в отдельный самолет несколько зенитных орудий или даже батарей могут выбрать одну и ту же цель, а соседние самолеты противника оказались бы неповрежденными, если бы сбить старались только выбранные цели.

"*Подходить к формулам хаоса и броуновского движения капризных частиц, вооружившись ясным светом логики и разума – это все равно, что есть желе вязальной спицей*", – пишет Татьяна Толстая ("Русский мир" в книге "День", М.: Подкова, 2001, с. 402).

Гуманитарии редко могут столь точно описывать математику, как это удается Толстой, которая, например, включила в роман "Кысь" математическое описание расстановки книг в библиотеке на полки, которое живо напомнило мне и нашу нелепую

[2] В письме Андрея Николаевича Павлу Сергеевичу Александрову от 23 марта 1942 года сказано: "Условия жизни в Москве для меня создаются вполне хорошие. Получил прекрасную комнату в нижнем этаже Нескучного дворца с кроватью и чистым бельем . . . ", см. юбилейное издание "Колмогоров" в трех книгах (М.: Физматлит, 2003), книга II, с. 490. (*Прим. ред.*)

систему УДК, и обязанность американских библиотекарей ставить каждую книгу на полку с таким же номером, как полка этой книги в Библиотеке Конгресса США (из-за чего, например, тома изданной Шпрингером Encyclopaedia of Mathematical Sciences оказались разбросанными по разным ненаходимым местам, в соответствии с алфавитным списком фамилий авторов первых статей каждого тома).

В "Кыси" на одну полку попали математик Лобачевский и педагог Ушинский, детский писатель Носов и криминалист Шейнин ... – читатель-математик, вероятно, уже догадался, что у них общего (ни для плеч, ни для бедер подходящих фамилий авторов в этой библиотеке не было, но Телешов стоял на той же полке, что Лобачевский).

Гёте – еще один пример хорошо разбиравшегося в сущности математики гуманитария:

"*Математики подобны французам, они все переводят на свой язык, и все совершенно меняется*" (это его maxima 1256, цитирую по журналу Mathematical Intelligencer, том 16, № 3, 1994, с. 5).

Роджера Бэкона, изобретателя очков и парашюта, вряд ли следует считать гуманитарием, но он сказал в 1267:

He who does not know mathematics cannot know any of the other sciences. What is more, he can not discover his own ignorance.

Колмогоров выбрал математику не сразу: он начинал как *историк*, но после того, как его первая статья (о земельных отношениях в одной из пятин древнего Новгорода, с применением математической статистики к сохранившимся архивным налоговым записям) была признана историками недостаточно убедительной ("у нас, историков, каждое утверждение требует по меньшей мере пять доказательств" сказал ему профессор Бахрушин, в семинаре которого 17-летний Колмогоров докладывал свою работу) – после требования пяти доказательств Колмогоров навсегда перешел к математике, где *одного* доказательства хватает.

Предпочтительность математического подхода ко всему естествознанию особенно яростно отстаивал Дирак, считавший "физические представления" просто *устарелыми исторически сложившимися предрассудками*:

I learnt to distrust all physical concepts as the basic for a theory. Instead one should put one's trust in a mathematical scheme even if the scheme does not appear at first sight to be connected with physics. One should concentrate on getting an interesting mathematics.

(Я цитирую слова Дирака по книге P. Masani "Norbert Wiener", Birkhäuser, 1970, с. 6).

Именно по этому пути шел Колмогоров, занимался ли он статистикой нарушений Пушкинской строфы в Онегине или миниатюризацией компьютеров, теорией передачи информации или неравенствами между производными разных порядков, небесной механикой или расходящимися рядами Фурье, полями Галуа (о которых он читал лекции в школе-интернате в 1963 году) или законами турбулентности.

Я хотел бы еще подчеркнуть сходство точек зрения на науку у Андрея Николаевича и у очень им любимого Пастернака, слова которого о математике Андрей Николаевич высоко ценил:

– "*Алгебра стеснена* одноплоскостностью в отношении величины" ("Охранная грамота").

– "*Творчество начинается с рисунка*, но никогда не с элементов, преувеличенное внимание к которым – проявление бессилия.

Наука достигла своего подъема не в пестроте случайно нахватанных фактов, сводимых к произвольному единству, но *только в открытии постоянных простых и дающих непрерывные выводы математических точек зрения*" ("Из студенческих тетрадей 1909–1911 года").

– "Не все на свете создается *дедуктивно*, сверху" (Речь на III пленуме Союза Писателей в Минске, 1936).

– "Самые поразительные открытия производились, когда переполнявшее содержание не давало времени задуматься, и второпях произносили *новое слово на старом языке*, *не разобрав*, *стар он или нов*" ("Люди и положения").

Поразительно, насколько мнение Пастернака о науке расходится здесь с утверждениями Манина, объявившего математику филологическим изобретательством.

– "Напрасно думать, что искусство вообще когда-либо поддастся *окончательному пониманию* и что наслаждение им в этом нуждается" ("Замечания к переводам Шекспира").

Андрей Николаевич гордился не "окончательным пониманием" (которого иногда все же добивался), но именно конкретными установленными им фактами, вроде степенных законов теории турбулентности.

Степенные законы часто долго остаются экспериментальными фактами, подтвержденными всего лишь тысячами или миллионами наблюдений. Приведу несколько примеров, в которых степень "окончательного понимания" источника степенной зависимости весьма неодинакова.

– Закон Аррениуса: Число видов на острове площади S пропорционально $S^{1/4}$ ("Ботанический журнал", 1975, т. 60, № 11, с. 1537–1550, статья "Пространственное разнообразие").

– Закон Л. Толстого: средства, затрачиваемые на удовольствие, пропорциональны квадрату достигаемого наслаждения (письмо сыну от 16.X.1895, М., 1984, т. 19, с. 334).

– Скорость метаболизма пропорциональна массе в степени $3/4$ (а не $2/3$, как дало бы поверхностное распределение соответствующих химических превращений): Science, апрель 1997.

– Число извержений вулкана Piton de la Fournaise (на острове Реюньон), выбрасывающих объем больше V, убывает как выбрасываемый объем в степени минус три вторых (Comptes Rendus Acad. Sci., Paris, Ser. II, 1996, том 323, № 7, с. 569–574, авторы F. Lahaie, J.-R. Grasso, P. Marcenac, S. Giroux).

– Число научных работников, опубликовавших больше n работ, обратно пропорционально числу опубликованных ими работ.

– Число типов клеток в организме пропорционально квадратному корню из числа генов его генома.

– Минимальный радиус шара, куда можно поместить без самопересечений граф из n вершин (шариков фиксированного радиуса, соединенных каждый не более чем

с k другими связями фиксированной толщины), растет с ростом n (при фиксированном k) как *квадратный* (а не кубический, как подсказывает объем) корень из "числа нейронов мозга" или "числа ячеек компьютера" n (Колмогоров и Барздинь).

Такой большой шар требуется не для всякого графа, а лишь для наиболее сложных из них, к числу которых относится, впрочем, большинство графов с n вершинами, но не относится, например, "мозг червя" с графом $\bullet - \bullet - \bullet - \cdots - \bullet$, который можно уложить в шар, радиус которого пропорционален кубическому корню из числа вершин.

Более подробно эту теорию Колмогорова минимизации размера компьютера или мозга я описал в статье: V. I. Arnold, "Kolmogorov obituary", Physics Today, 1989, v. 42, № 10, p. 148–150 (по просьбе заинтересовавшихся этими теоремами американских компьютерщиков).

Почему-то в недавно изданной Физматлитом библиографии сочинений о Колмогорове не упомянута ни эта статья, ни моя статья "Kolmogorov's hydrodynamical attractors" ("Turbulence and stochastic processes: Kolmogorov's ideas 50 years on"[3] , Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1991, v. 434, № 1890, где моя статья занимает с. 19–22).

Впрочем, в цитируемом сборнике "Колмогоров-2003. Юбилейное издание в трех книгах" содержится и явная дезинформация читателя. В т. 1 на с. 68 сказано, будто Трубниковский переулок, где жил Колмогоров, находится "в районе Пречистенки" (которая для нынешних обскурантистов вряд ли отличается от Поварской). В т. 2 на с. 41 "Клязьма впадает в Москва-реку" (тогда как город Москва был основан на волоке с Оки на Клязьму, текущую от Москвы на Восток, к столичному в то время Владимиру).

Недавно я воспользовался технологией, которую Андрей Николаевич применял для открытия[4] своих степенных законов в теории турбулентности, но занимался я при этом вовсе не гидродинамикой, а теорией чисел, где также встретились подобные хаотические колебания.

Начало этим исследованиям теоретико-числовой турбулентности положил Ферма, но они связаны не с "Великой теоремой Ферма", а с так называемой "*Малой теоремой Ферма*".

Речь идет о геометрической прогрессии, вроде последовательности степеней двойки,

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \ldots .$$

Ферма заметил, что если заменить эти числа их остатками от деления на простое число p (например, на 13), то получится *периодическая* последовательность с периодом $p-1$ (в примере остатки образуют последовательность

$$1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7, 1, 2, 4, \ldots).$$

[3]Этот сборник, содержащий 15 статей, в том числе и статью В. И. Арнольда, цитируется в книге I юбилейного издания "Колмогоров" (М.: Физматлит, 2003) на с. 342, позиция [98]. (*Прим. ред.*)

[4]Другую точку зрения см. в статье Г. И. Баренблатта в настоящем выпуске. (*Прим. ред.*)

Обобщая эту теорему Ферма, Эйлер доказал, что так же обстоит дело и для остатков от деления на n членов геометрической прогрессии $\{1, a, a^2, a^3, \dots\}$ с любым целым основанием a, причем простота числа n не нужна; достаточна взаимная простота чисел a и n (у которых не должно быть общего делителя, бóльшего единицы).

Я исследовал периоды получающихся последовательностей, например, для остатков от деления чисел 2^t $(t = 1, 2, \dots)$ на нечетные числа n, наименьший период оказался такой странной функцией $T(n)$:

n	3	5	7	9	11	13	15	29	31	71	509	511
$T(n)$	2	4	3	6	10	12	4	28	5	35	508	9

Чтобы разобраться в поведении этой хаотически меняющейся в зависимости от числа n величины периода $T(n)$, я, следуя методике Колмогорова, рассмотрел вместо значений $T(n)$ сглаженные средние, перейдя к суммам первых значений,

$$S(n) = \sum_{k \leqslant n} T(k).$$

Поведение этих сумм в зависимости от n уже гораздо менее хаотично, и для его исследования я, опять следуя методике Колмогоровского исследования гидродинамической турбулентности, нарисовал графики функции S в двойном логарифмическом масштабе (откладывая по оси абсцисс величину $\log n$, а на оси ординат величину $\log S(n)$). Степенные зависимости изображаются при логарифмических масштабах прямыми линиями (причем зависимость $T(n) \approx n^b$ превращается в $S(n) \approx n^B$, $B = b + 1$, что изображается в логарифмическом масштабе прямой наклона B).

Вот несколько числовых примеров (сосчитанных моей итальянской ученицей Франческой Аикарди в Триесте):

n	9	109	509	1009	1509	2009
$S(n)$	15	1409	23607	82761	176016	302277

Соответствующий билогарифмический график приведен на рис. 1, также полученном Аикарди. К сожалению, все эти результаты – *не асимптотические теоремы теории чисел, а всего лишь сводки нескольких миллионов примеров, подобных приведенным выше.* Даже логарифмические поправки к значениям A и a (которые кажутся постоянными на рис. 1) не исключены новейшими экспериментальными данными, скорее соответствующими $T \approx Cn/\ln n$ при больших n.

При этом для других прогрессий ($\{c^t\}$ вместо $\{2^t\}$) получаются такие же картины, и соответствующие графикам прямые параллельны (так что показатель b не зависит от основания прогрессии c). Этот универсальный показатель в эксперименте близок к $b = 7/8$ (при бóльших n он приближается, кажется, к 1).

Следуя технологии исследования турбулентности, я изучил также теоретико-числовой аналог известного в гидродинамике явления *перемежаемости.* Сущность этого явления состоит в том, что средний регулярный рост (вроде $\ln T \approx b \ln n + \mathrm{const}$)

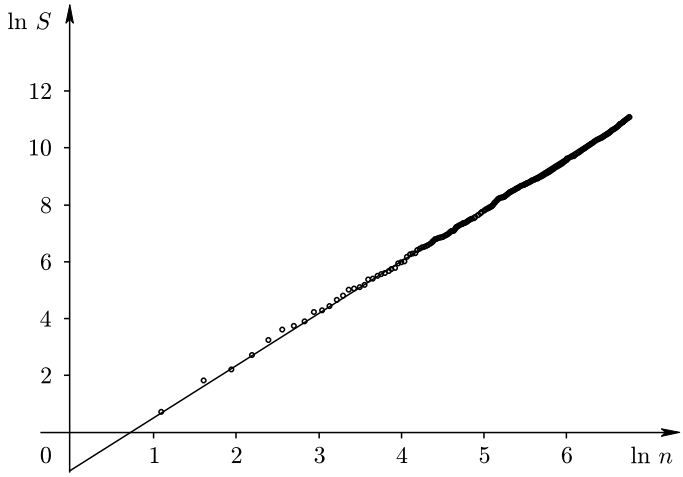

Рис. 1. Усредненный период как функция от модуля (билогарифмический график)

изредка нарушается довольно сильно (что соответствовало бы изменению коэффициента b, скажем, на 50%). Регулярные прямолинейные графики свидетельствуют о редкости таких больших нарушений, которые к тому же то увеличивают, то уменьшают величины T и b, приводя в среднем к скорости роста B для зависимости логарифма суммы S от логарифма числа n.

Изучение перемежаемости этих отклонений в сторону больших и меньших значений состоит в том, что вычисляется число разных отклонений (скажем, на x процентов) при изменении аргумента n (скажем, от 1 до N).

Доля наблюдений (от $n = 1$ до $n = N$), в которых отклонение превышает x процентов, довольно хаотическим образом зависит от величины N. Переходя опять к усреднению путем суммирования и к двойному логарифмическому масштабу для нахождения показателей степенных законов, я получил странные эмпирические степенные зависимости доли наблюдений с бóльшими x отклонения от величины N (вычисления велись до N порядка нескольких тысяч).

К сожалению, *все эти эмпирические законы теоретико-числовой перемежаемости гидродинамического типа – не теоремы, а только сводки тысяч экспериментальных фактов.*

Ситуация напоминает мне здесь положение с так называемой проблемой Фробениуса (об аддитивных полугруппах натуральных чисел).

Такая полугруппа – это множество чисел, включающее вместе с любыми двумя своими членами также и их сумму. Например, линейные комбинации двух чисел a и b с целыми неотрицательными коэффициентами образуют полугруппу. При $a = 3, b = 5$ эта полугруппа состоит из чисел

$$0, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, \ldots$$

(включая все целые числа, начиная с числа 8).

Первый крупный американский математик Сильвестр доказал, что для взаимно простых a и b полугруппа линейных комбинаций содержит все целые числа, начиная

с $K = (a-1)(b-1)$ (в нашем случае $K = 8$), и между 0 и K в полугруппу входит половина целых чисел (с симметрией: x входит, если и только если $y = K - 1 - x$ не входит в полугруппу).

Задача Фробениуса состоит в том, начиная с какого числа $K(a_1, \dots, a_n)$ содержит все натуральные числа полугруппа линейных комбинаций взаимно простых чисел $a_1, \dots, a_n$. Ответ неизвестен уже для трех образующих ($n = 3$).

Математики склонны думать (по аналогии с исследованным Сильвестром случаем $n = 2$), что величина K будет расти с образующими a примерно как их произведение, $p = a_1 \cdots a_n$.

Естественно-научный подход к этой задаче теории чисел дает совершенно другой ответ (подтверждаемый многочисленными экспериментами, но, к сожалению, не обоснованный доказательствами):

$$K \sim Cp^{\alpha}, \qquad \alpha = 1/(n-1).$$

В этой задаче, как и в обсуждавшихся выше вопросах теории чисел, ответ $K(a)$ зависит от аргументов $(a_1, \dots, a_n)$ прихотливым образом, сильно меняясь при малом изменении a_i, с перемежающимися большими и малыми ответами $K(a)$.

Поэтому рассматривать естественно асимптотику не самой величины $K(a)$, а ее усреднения по окрестности целой точки a n-мерного целочисленного пространства $\mathbb{Z}^n$.

Нестрогое математически, но убедительное в естественно-научном смысле рассуждение, приводящее к указанному выше ответу Cp^{α}, таково.

Рассмотрим число целых неотрицательных точек k в $\mathbb{Z}^n_+$, для которых линейная комбинация $k_1a_1 + \dots + k_na_n$ не превосходит числа N. С ростом числа N число таких комбинаций растет как объем n-мерного симплекса с линейными размерами N/a_i, то есть как $(1/n!)N^n/p$.

При увеличении числа N на единицу это число целых точек увеличивается на величину порядка $N^{n-1}/(p(n-1)!)$.

Все целые значения $N, N+1, N+2, \dots$ будут поэтому покрываться значениями комбинаций, когда это число кандидатов на представление числа N в виде линейной комбинации образующих a_i станет бóльшим единицы:

$$N^{n-1} \geqslant p(n-1)!, \qquad N \geqslant Cp^{\alpha}, \qquad \alpha = 1/(n-1).$$

При $n = 2$ это рассуждение дает как раз асимптотику точного ответа Сильвестра, $N \geqslant p = ab$. При $n = 3$ приведенный нестрогий эвристический анализ дает предположение о слабой (т.е. усредненной) асимптотике $K \sim \sqrt{2abc}$, но это никак не доказано.

Вот еще один пример удивительной степенной слабой (т.е. усредненной) асимптотики, недавно найденный моими учениками А. Гориновым и С. Шадшиным.

Функция Эйлера $\varphi(n)$ выражает число взаимно простых с n остатков от деления на n:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varphi(n)$	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4

Поведение этой функции при больших n довольно хаотическое, но в среднем она растет как cn, где постоянная c есть $1/\zeta(2) = 6/\pi^2 \approx 2/3$, где ζ-функция определяется как сумма ряда, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$, или как произведение Эйлера по простым числам p

$$\zeta(s) = \prod (1 - 1/p^s)^{-1}.$$

Сущность дела в том, что c – это "вероятность несократимости дроби k/l" (соответствующая теорема теории вероятностей привела Эйлера к изобретению своего произведения и была несомненно известна Гауссу, а подробное доказательство содержится в работе Б. А. Венкова).

Функцию Эйлера можно определить как число элементов в мультипликативной группе вычетов,

$$\varphi(n) = |\mathrm{GL}_1(\mathbb{Z}_n)|, \quad \text{где} \quad \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Результат Горинова и Шадшина обобщает эту слабую асимптотику на *случай группы матриц порядка k, элементы которых являются вычетами по модулю n*:

$$\varphi_k(n) = |\mathrm{GL}_k(\mathbb{Z}_n)|.$$

В этом случае слабая (усредненная по n) асимптотика имеет вид

$$\varphi_k(n) \sim cn^{\alpha}, \qquad \alpha = k^2,$$

причем для постоянной c получено обобщающее формулу Эйлера произведение по простым числам (например, для группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_n)$ слабая асимптотика числа элементов имеет вид $n^3/\zeta(3)$). Все перечисленные результаты строго доказаны, но открыты при помощи численного эксперимента.

К сожалению, специалисты по теории чисел редко пользуются эвристическими вероятностными соображениями и вовсе не ценят усредненные асимптотики, которые часто замечательны, хотя редко доказаны.

Например, из закона Колмогорова[5] (о том, что вероятность того, что из независимых событий с вероятностями p_i состоится бесконечное число, равна 1, если $\sum p_i = \infty$) можно было бы, если не заботиться о строгости, вывести бесконечность числа пар $(p, 2p+1)$ простых чисел (как 3 и 7, 5 и 11): вероятность простоты большого числа n убывает как $1/(\ln n)$, согласно эмпирическому закону Лежандра (доказанному сотню лет спустя совместными усилиями Чебышева, Валле-Пуссена и Адамара), просто́ты чисел p и $2p+1$ вряд ли сильно зависимы, а ряд из $(1/\ln p)(1/\ln(2p+1))$ расходится.

Но написать подобное рассуждение математику трудно: ведь обоснования придется, подобно Лежандру, ждать сотни лет.

Считая факты более важными, чем доказательство, Андрей Николаевич очень требовательно относился и к своему, и к чужому писанию. "*Писать математическую статью надо так*, – говорил он мне, – *как-будто лежишь на гильотине, и одно неточное слово достаточно, чтобы она сработала*".

[5] На самом деле из леммы Бореля–Кантелли. (*Прим. ред.*)

В то же время Андрей Николаевич считал, что искусство решать задачи и доказывать теоремы – совсем не то, что искусство писания статей, поэтому ученик, даже самый лучший, никогда не может сам правильно написать свою первую работу, и учитель должен ее за него переписать (после чего по-настоящему хороший ученик вторую работу уже сумеет написать сам).

Я думаю, что первые работы большинства учеников Андрея Николаевича были, как и моя, переписаны им от слова до слова.

Что же касается чтения чужих работ, то здесь Андрей Николаевич часто предпочитал переоткрывать новые для него области самостоятельно, а не путем изучения каких-нибудь текстов.

Впрочем, мне он дал однажды хороший совет: *принцип Гюйгенса теории распространения волн (вместе с вытекающими из него при рассмотрении бесконечно-малых промежутков времени уравнениями Гамильтона) лучше всего описан в учебнике Уитеккера "Аналитическая динамика"*.

Эта теория, составляющая базу и симплектической, и контактной геометрии, мало известна даже большинству специалистов. Например, Понтрягин независимо выводил в своей теории оптимального управления так называемый "принцип максимума", являющийся, на самом деле, частным случаем более общей теории Гюйгенса и Гамильтона.

Прекрасно это понимая и используя, (например, в своей теории неравенств между производными разных порядков, на много лет предвосхитившей теорию оптимального управления и являющейся для этой теории тем же, чем была задача о брахистохроне для вариационного исчисления) – зная все это, Колмогоров не хотел об этом говорить из-за того, что он всегда стремился поддерживать Л. С. Понтрягина и не предвидел полезных последствий от упоминания о своей основополагающей работе.

Я же сейчас думаю, что последствия возможны, и что связи между неравенствами Колмогорова (обобщившего, не зная об этом, предшествовавшие неравенства Литтльвуда и Адамара) с одной стороны и теорией оптимального управления – с другой будут должным образом проанализированы и использованы.

Адамара Андрей Николаевич хорошо знал и очень любил. Он рассказывал мне, что восьмидесятилетний Адамар с ненавистью вспоминал об "общем конкурсе" (нечто вроде нашей математической олимпиады) своих школьных лет. Он получил тогда *вторую* премию, и недовольство сохранилось на всю жизнь: "тот, *первый*, тоже стал математиком, но *гораздо* более слабым – он и *тогда* был слабее!"

Представление о занятиях математикой как своеобразным спортом было и у Андрея Николаевича, который рассказывал своим студентам по случаю празднования Рождества такую теорию:

"Качество математика определяется тем, *на сколь раннем этапе этот человек остановился в своем развитии как человеческая личность.*

Наш самый великий математик остановился около четырех лет, когда дети любят отрывать крылышки и ножки насекомым.

Я, – продолжал Андрей Николаевич, – остановился около 13 лет, когда мальчишки бывают очень любознательными, но более взрослые интересы их еще не волнуют . . . "

Воспитание любознательности малолетних учеников Андрей Николаевич начал в студенческие годы, когда он был учителем (преподавал математику) в средней школе

на Потылихе. Но школьники недооценили его усилия, и, когда им нужно было выбирать классного руководителя (в те послереволюционные годы эта должность была выборной), то они выбрали не его, а учителя физкультуры.

Андрей Николаевич сделал для себя вывод, стал много бегать на лыжах, грести, и даже готовился к концу жизни стать бакенщиком на Волге. Но гребные лодки бакенщиков сменили к тому времени моторки, так что проект остался нереализованным. Зато Андрей Николаевич организовал 18-ю школу-интернат с математическим уклоном, подготовившую огромное количество замечательных математиков и физиков (я упомяну лишь Ю. Матиясевича и Н. Нехорошева, математиков уровня академиков, учившихся там в период образования интерната, начавшийся с летней школы в Красновидове, на Можайском море).

Но Андрей Николаевич решил изменить преподавание математики не только для талантливых победителей олимпиад, вербовавшихся в интернат, но и для всех школьников страны.

Должен сознаться, что, хотя я и стал преподавать в интернате, прочитав для школьников курс топологии и теории римановых поверхностей, включавший топологическое доказательство неразрешимости уравнений пятой и более высокой степени в радикалах, попытки Андрея Николаевича привлечь меня к реформированию школьных программ успехом не увенчались.

Например, он заменил евклидово "равенство" треугольников их "конгруентностью" (от чего много и школьников, и родителей навсегда возненавидели и математику, и вообще науки).

Понятие "угла" он сделал точно определенным так, чтобы школьники могли правильно понимать "угол в 721 градус" (вовсе не являющийся частью плоскости). *Соответствующее бурбакистское определение угла в учебнике Колмогорова занимало всего пару десятков страниц* (я запомнил только теоретико-множественное определение полуплоскости, занимавшее всего одну страницу с анализом нужного отношения эквивалентности).

Описывать эти недостатки и последствия этого проекта реформы средней школы было бы мне слишком легко, и я только сравню здесь этот проект Колмогорова с теми событиями, которые происходили примерно в то же время в других странах.

Недостатки современного школьного образования в США (где студенты университетов думают, будто $1/2 + 1/3 = 2/5$, а штат Калифорния требует от поступающих в университет делить 111 на 3 без компьютера, чего они не умеют делать) – эти недостатки слишком хорошо известны, чтобы здесь о них много писать. Но я хочу показать, как была создана столь плохая система школьного образования, пытаясь предупредить повторение подобного процесса в наших условиях.

Следующее описание эволюции математического образования составили американцы на основе анализа своих школьных учебников.

– В учебнике 60-х годов была такая задача: "Крестьянин продал мешок картошки за 10 долларов, затратив на это производство $4/5$ этой суммы. Спрашивается, какова величина дохода".

– В семидесятые годы формулировка стала такой: "Крестьянин обменял *множество* K картошек на *множество* D денег. *Мощность* множества D равна десяти, а каждый элемент из D стоил 18. Нарисуйте 10 больших точек, представляющих эле-

менты множества D. Множество C, изображающее стоимость производства, имеет на 2 точки меньше, чем D. Представьте C как *подмножество* множества D и найдите *мощность множества* 'Доход'".

– К 1980 году эта задача приобрела такой вид: "Мешок картошки продан за 10 долларов, затраты на его производство составили 8 долларов, доход от продажи – 2 доллара. *Подчеркните* слово 'картошка' и *обсудите* ситуацию с одноклассниками".

– В девяностые годы достигнут дальнейший прогресс: "Фермер продал мешок картошки за 10 долларов. *Его или ее* затраты составили 0.80 от его или ее оплаты. *На компьютере* составьте график зависимости дохода от цены. Дайте программе "КАРТОФ" определить доход. Обсудите с одноклассниками и *напишите рассказ с анализом этой ситуации для журнала реальной экономики*".

Да минет нас чаша сия!

"Известия" сообщили 15 апреля 2003 года, что гипотеза Пуанкаре, что трехмерная сфера односвязна, оставалась недоказанной до последнего времени.

Эта статья в газете ясно показывает, что обскурантизм и невежество движутся и к нам.

Андрей Николаевич Колмогоров, хотя и старался ввести в школу теоретико-множественную идеологию, был человеком-практиком, умевшим быстро оборудовать байдарку самодельным парусом, управляемым диагональной слегой с помощью хитрой петли, заимствованной им, по его словам, от древних волжских укшуйников. Посаженные им в своем саду цветы, кусты и деревья неизменно вырастали, даже когда у занимавшихся тем же коллег ничего не выходило.

Армия учеников, выращенных Андреем Николаевичем во всех областях математики, составляет и сегодня мировую славу нашей науки. Надеюсь, так оно и будет в дальнейшем: общество и страна со временем поймут, что для того, чтобы лучшие ученые не уезжали, им нужно соответственно платить.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
20.05.2003