

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. С. Адзерихо, А. Г. Блох, В. П. Трофимов, Ф. Д. Ложечник, Определение эффективной температуры плоского слоя непрозрачной среды с излучающими и отражающими стенками, *ТВТ*, 1979, том 17, выпуск 3, 544–551

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.239.97.34

8 ноября 2024 г., 08:00:01



УДК 536.3:535.34

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ПЛОСКОГО СЛОЯ НЕПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЫ С ИЗЛУЧАЮЩИМИ И ОТРАЖАЮЩИМИ СТЕНКАМИ

*Адзерихо К. С., Блох А. Г., Трофимов В. П.,  
Дождечник Ф. Д.*

На основе точного решения уравнения переноса излучения в непрозрачных нерассеивающих средах, ограниченных поверхностями с различными радиационными свойствами, получено выражение для интенсивности выходящего из слоя излучения. При осесимметричном распределении температуры найдена полусферическая эффективная степень черноты слоя. Приведено выражение для определения эффективной температуры неизотермического слоя, которая зависит от вида температурного профиля и оптической толщины среды. Рассмотрены восемь практически важных типов распределения температуры вдоль слоя, для которых определены границы применимости среднеарифметических и среднегеометрических способов определения температуры.

Разработке методов расчета лучистого теплообмена в современных теплотехнических устройствах посвящено значительное количество работ (в частности, [1—5]). Предельные режимы работы этих устройств предъявляют особые требования к определению основных характеристик рабочих тел (или теплоносителей). В данной работе получено точное решение задачи о распространении излучения в непрозрачной нерассеивающей среде, ограниченной отражающими и излучающими поверхностями. На основе этого решения вводится понятие эффективной температуры для плоских слоев таких неизотермических сред и анализируется ее зависимость от оптических свойств среды и типа температурного профиля.

Рассмотрим плоский слой излучающей среды с граничными поверхностями, характеризующимися некоторыми значениями степени черноты  $\epsilon_j = \epsilon_j(\lambda)$  ( $j=1, 2$ ) и коэффициентами отражения  $r_j = r_j(\lambda, \mu, \mu')$ , где  $\lambda$  — длина волны излучения,  $\theta' = \arccos \mu'$  и  $\theta = \arccos \mu$  — углы падения и отражения излучения от граничной поверхности соответственно (рис. 1). В случае ламбертовского отражения, часто реализующегося на практике,  $r_j = \text{const}$ . Конечные результаты данной работы в принципе нетрудно обобщить на произвольный коэффициент отражения.

Уравнение переноса теплового излучения в непрозрачной нерассеивающей плоской среде при условии локального термодинамического равновесия имеет вид [1—3]

$$\mu \frac{dJ(x, \mu)}{dx} = -\kappa J(x, \mu) + \kappa B[T(x)], \quad (1)$$

где  $J(x, \mu)$  — интенсивность излучения в точке  $x$  и направлении  $\theta = \arccos \mu$ ;  $B(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} (e^{h\nu/kT} - 1)^{-1}$  — спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела при температуре  $T = T(x)$ ,  $\kappa = \kappa(x)$  — коэффициент поглощения теплоносителя.

Граничные условия для уравнения (1) должны учитывать испускание излучения и процессы отражения излучения граничными поверхностями  $x=0$  и  $x=x_0$

$$J(0, \mu) |_{\mu>0} = \varepsilon_1 B(T_1) + r_1 J(0, \mu) |_{\mu<0}, \quad (2)$$

$$J(\tau_0, \mu) |_{\mu<0} = \varepsilon_2 B(T_2) + r_2 J(\tau_0, \mu) |_{\mu>0}. \quad (3)$$

Общее решение уравнения (1) при граничных условиях (2), (3) можно записать в виде

$$J(\tau, \mu) |_{\mu>0} = b_1(\tau) + \varepsilon_1 B(T_1) e^{-\tau/\mu} + r_1 e^{-\tau/\mu} J(0, \mu) |_{\mu<0}, \quad (4)$$

$$J(\tau, \mu) |_{\mu<0} = b_2(\tau) + \varepsilon_2 B(T_2) e^{-(\tau_0-\tau)/\xi} + r_2 e^{-(\tau_0-\tau)/\xi} J(\tau_0, \mu) |_{\mu>0}, \quad (5)$$

где  $\tau = \int_0^x \kappa(x) dx$  — оптическая толщина слоя,  $\tau_0 = \int_0^{x_0} \kappa(x) dx$ ,  $\xi = -\mu = |\mu|$ ,

$$b_1(\tau) = \int_0^{\tau_0} B[T(\tau')] e^{-(\tau-\tau')/\mu} \frac{d\tau'}{\mu}; \quad b_2(\tau) = \int_0^{\tau_0} B[T(\tau')] e^{-(\tau'-\tau)/\xi} \frac{d\tau'}{\xi}. \quad (6)$$

Физический смысл членов, входящих в выражения (4) и (5), вполне очевиден: первый член определяет собственное излучение слоя; второй — излучение, испускаемое граничной поверхностью и ослабленное средой; третий — ослабленное собственное излучение слоя, отраженное от граничной поверхности. Эти выражения позволяют определить интенсивность выходящего из слоя излучения

$$J(\tau_0, \mu) |_{\mu>0} = \frac{1}{1-r_1 \cdot r_2 e^{-2\tau_0/\mu}} \{b_1(\tau_0) + \varepsilon_1 B(T_1) e^{-\tau_0/\mu} + r_1 e^{-\tau_0/\mu} [b_2(0) + \varepsilon_2 B(T_2) e^{-\tau_0/\mu}]\}, \quad (7)$$

$$J(0, \mu) |_{\mu<0} = \frac{1}{1-r_1 \cdot r_2 e^{-2\tau_0/\xi}} \{b_2(0) + \varepsilon_2 B(T_2) e^{-\tau_0/\mu} + r_2 e^{-\tau_0/\mu} [b_1(\tau_0) + \varepsilon_1 B(T_1) e^{-\tau_0/\mu}]\}. \quad (8)$$

С помощью полученных выражений можно проанализировать спектроскопические характеристики слоя в зависимости от его оптических свойств, граничных условий и условий наблюдения.

Обычно на практике реализуется осесимметричное распределение температуры, т. е.  $T(\tau) = T(\tau_0 - \tau)$  и идентичность свойств граничных поверхностей ( $T_1 = T_2 = T_{ст}$ ;  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{ст}$ ,  $r_1 = r_2 = r$ ). В этом случае выражения (7), (8) определяются одним довольно простым соотношением [6]

$$J = J(0, \mu) |_{\mu<0} = J(\tau_0, \mu) |_{\mu>0} = \frac{b + \varepsilon_{ст} B_0 e^{-\tau_0/\mu}}{1 - r e^{-\tau_0/\mu}}, \quad (9)$$

где

$$b = \int_0^{\tau_0} B[T(\tau')] e^{-(\tau_0-\tau')/\mu} \frac{d\tau'}{\mu} = \int_0^{\tau_0} B[T(\tau')] e^{-\tau'/\mu} \frac{d\tau'}{\mu}, \quad (10)$$

$T_{ст}$  — температура стенки (граничной поверхности),  $B_0 = B(T_{ст})$ .

Величина (10) характеризует излучательную способность (или степень черноты) плоского слоя непрозрачной среды. Так, в случае  $T(\tau) = \text{const}$

$$\varepsilon = b/B(T) = 1 - e^{-\tau_0/\mu}. \quad (11)$$

Определение полусферических степени черноты и потока излучения связано с интегрированием выражений (7) — (9) по  $\mu$ . Аналитические соотношения для этих величин можно получить, используя так называемое условие полной диффузности излучения [7—9]. Согласно этому условию усредненная по направлениям интенсивность излучения равна интенсив-

ности излучения, наблюдаемого под углом  $\theta=60^\circ$  к нормали слоя

$$J_{\pi} = \int_0^1 J(\tau, \mu) d\mu = J(\tau, 1/2).$$

Использование приведенного условия для простейшего случая (11) при  $\tau_0 \geq 0,5$  приводит к погрешности  $< 5\%$ , быстро уменьшающейся с ростом  $\tau_0$ . Следует отметить, что наличие отражения и испускания излучения граничными поверхностями значительно уменьшает погрешность расчетов

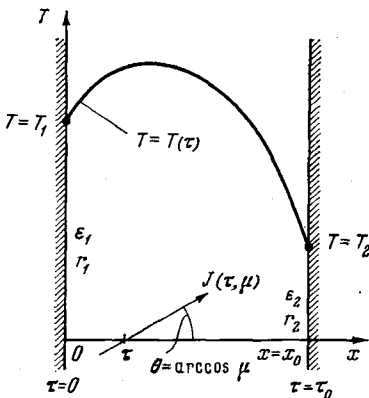


Рис. 1

Рис. 1. К задаче о переносе излучения в плоском слое

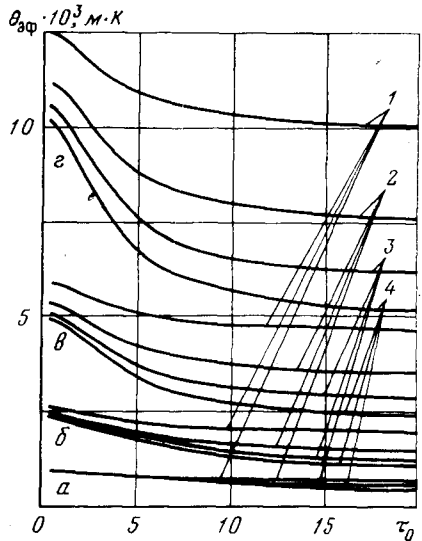


Рис. 2

Рис. 2. Эффективная приведенная температура в зависимости от оптической толщины слоя:  $a - \theta_{\text{н}} = 1 \cdot 10^{-3}$  м·К;  $b - 3 \cdot 10^{-3}$ ;  $c - 7 \cdot 10^{-3}$ ;  $d - 15 \cdot 10^{-3}$ ;  $1 - \theta_{\text{н}}/\theta_{\text{ст}} = 1,5$ ;  $2 - 2,0$ ;  $3 - 2,5$ ;  $4 - 3,0$

при использовании условия полной диффузности излучения. Для потока излучения при указанном условии имеем

$$q(\tau) = 2\pi \int_0^1 \mu J(\tau, \mu) d\mu = \pi J(\tau, 1/2).$$

Таким образом, при условии полной диффузности излучения полусферическая интенсивность выходящего излучения равна

$$J_{\pi} = \frac{1}{1 - re^{-2\tau_0}} \left\{ \epsilon_{\text{ст}} B(T_{\text{ст}}) e^{-2\tau_0} + 2 \int_0^{\tau_0} B[T(\tau')] e^{-2(\tau_0 - \tau')} d\tau' \right\}. \quad (12)$$

Полученное соотношение позволяет ввести эффективную температуру  $T_{\text{эф}}$  согласно правилу

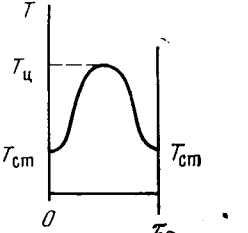
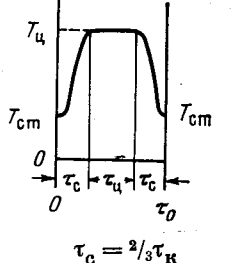
$$B(T_{\text{эф}}) = \frac{2}{1 - e^{-2\tau_0}} \int_0^{\tau_0} B[T(\tau')] e^{-2(\tau_0 - \tau')} d\tau'. \quad (13)$$

Тогда для полусферической эффективной степени черноты можно получить следующее выражение:

$$\epsilon_{\text{эф}}^{\pi} = J_{\pi} / B(T_{\text{эф}}) = [1 - (1 - \beta) e^{-2\tau_0}] / (1 - re^{-2\tau_0}), \quad (14)$$

где

$$\beta = \epsilon_{\text{ст}} B(T_{\text{ст}}) / B(T_{\text{эф}}). \quad (15)$$

$\theta_i(\tau) = \lambda T_i(\tau)$	Графическое изображение	Примечание
$\theta_1(\tau) = \theta_{CT} + (\theta_{II} - \theta_{CT}) \left\{ 1 - \left  1 - \frac{2\tau}{\tau_0} \right ^{1,5} \right\}^{1,6}$ $\theta_2(\tau) = \theta_{II} e^{-\alpha \tau - (\tau_0/2) }$ $\theta_3(\tau) = \theta_{II} e^{-\beta[\tau - (\tau_0/2)]^2}$		$\alpha = \frac{2}{\tau_0} \ln \frac{\theta_{II}}{\theta_{CT}}$ $\beta = \frac{4}{\tau_0} \ln \frac{\theta_{II}}{\theta_{CT}}$
$\theta_{4-8}(\tau) = \begin{cases} \theta_{CT} + (\theta_{II} - \theta_{CT}) 6,75 \frac{\tau^2 (\tau_K - \tau_0)}{\tau_K^3}, & 0 \leq \tau \leq 2/3 \tau_K \\ \theta_{II}, & 2/3 \tau_K \leq \tau \leq \tau_0 - 2/3 \tau_K \\ \theta_{CT} + (\theta_{II} - \theta_{CT}) 6,75 \frac{(\tau_0 - \tau)^2 (\tau + \tau_K - \tau_0)}{\tau_K^3}, & \tau_0 - 2/3 \tau_K \leq \tau \leq \tau_0 \end{cases}$	 <p style="text-align: center;"><math>\tau_c = 2/3 \tau_K</math></p>	<p><math>i = 4, \tau_K/\tau_0 = 0,750; \tau_{II} = 0</math></p> <p><math>i = 5, \tau_K/\tau_0 = 0,600; \tau_{II} = 0,2\tau_0</math></p> <p><math>i = 6, \tau_K/\tau_0 = 0,375; \tau_{II} = 0,5\tau_0</math></p> <p><math>i = 7, \tau_K/\tau_0 = 0,150; \tau_{II} = 0,8\tau_0</math></p> <p><math>i = 8, \tau_K/\tau_0 = 0,075; \tau_{II} = 0,9\tau_0</math></p>

Очевидно, что при постоянной по сечению слоя температуре  $T=T_{ст}$  из (5) следует  $B(T_{эф})=B(T_{ст})$ , т. е.  $T_{эф}=T_{ст}$ , и  $\beta=\varepsilon_{ст}$ .

Для анализа величины эффективной температуры удобно ввести параметр  $\theta_{эф}=\lambda T_{эф}$ , в дальнейшем именуемый приведенной температурой.

Нетрудно показать [10], что

$$\lambda T_{эф}=\theta_{эф}=C_2[\ln(1+1/A)]^{-1}, \quad (16)$$

где  $C_2=hc/k=14,387 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$  — вторая оптическая константа,

$$A = \frac{2}{1-e^{-2\tau_0}} \int_0^{\tau_0} \frac{e^{-2(\tau_0-\tau')}}{e^{C_2/\lambda T(\tau')} - 1} d\tau'. \quad (17)$$

Большой практический интерес представляет вопрос о непосредственном влиянии конкретного распределения температуры на величину излучения, выходящего из неизотермического объема. В связи с этим рассмот-

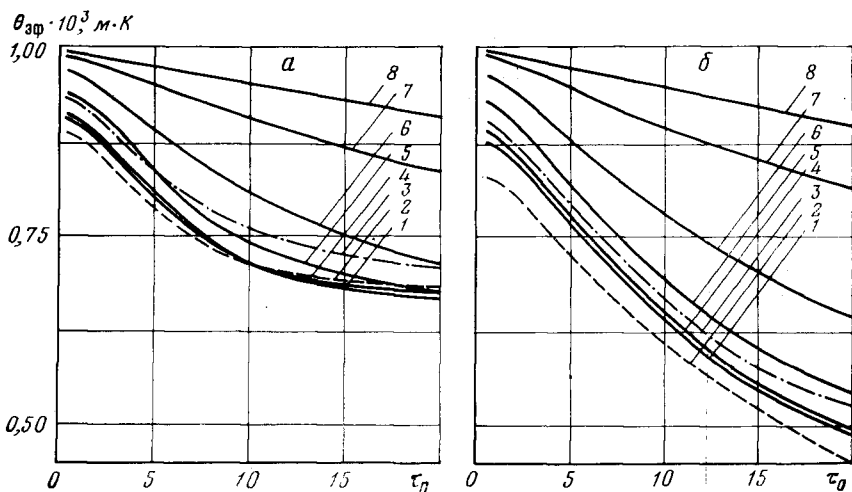


Рис. 3. Эффективная приведенная температура в зависимости от оптической толщины слоя ( $\theta_n=1 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ ;  $\theta_n/\theta_{ст}=1,5$  (а);  $\theta_n/\theta_{ст}=3,0$  (б)); 1 —  $i=1$ ; 2 — 2; 3 — 3; 4 — 4;  $\tau_n=0$ ; 5 — 5,  $\tau_n=0,2\tau_0$ ; 6 — 6,  $\tau_n=0,5\tau_0$ ; 7 — 7,  $\tau_n=0,8\tau_0$ ; 8 — 8,  $\tau_n=0,9\tau_0$

рены восемь различных температурных профилей  $\theta_i=\lambda T_i(\tau)$ , заданных аналитически (таблица).

Первое из этих распределений представляет температурный профиль в установившемся турбулентном потоке (температурный профиль Шлихтинга), два последующих — часто реализуемые на практике температурные профили, остальные пять распределений — профили с постоянной температурой в ядре.

Расчеты эффективной приведенной температуры  $\theta_{эф}$  выполнены в диапазоне изменения оптической толщины слоя  $\tau_0$  от 0,5 до 20; максимальной приведенной температуры на оси  $\theta_n$  — в пределах  $(1-15) \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$  с шагом через  $2 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ ; отношения  $\theta_n/\theta_{ст}$ , характеризующего градиентную часть профиля, — при значениях 1,5; 2,0; 2,5; 3,0. Характерные кривые зависимости температуры  $\theta_{эф}$  от указанных выше параметров приведены на рис. 2, 3. Величина  $\theta_{эф}$  в сильной степени зависит от типа распределения температуры в среде, величины  $\theta_n$ , отношения  $\theta_n/\theta_{ст}$  и оптической толщины среды. Для распределения типа 1 (температурный профиль Шлихтинга) сильное изменение  $\theta_{эф}$  происходит при  $0 \leq \tau_0 \leq 5$ . Для температурного профиля типа 4 при переходе от  $i=5$  к 8 зависимость  $\theta_{эф}$  от  $\tau_0$  сглаживается. Отметим, что кривые  $\theta_{эф}(\tau_0)$  для температурных распределений  $i=1$  и  $i=4$  практически совпадают.

В теплотехнических расчетах [2, 3, 11] в качестве эффективных температур, определяющих теплообмен излучением, обычно используются значения среднеарифметической  $\bar{T}_1$  или среднегеометрической температур  $\bar{T}_2$ . Для выяснения допустимой погрешности при использовании в качестве эффективной температуры указанных выше величин проведен расчет отношений

$$\frac{\theta_{эф}}{\bar{\theta}_1} = \frac{T_{эф}}{\bar{T}_1} = \frac{T_{эф}}{(T_{ц} + T_{ст})/2}; \quad \frac{\theta_{эф}}{\bar{\theta}_2} = \frac{T_{эф}}{\bar{T}_2} = \frac{T_{эф}}{\sqrt{T_{ц} \cdot T_{ст}}} \quad (18)$$

при изменении параметров  $\theta_{д}$ ,  $\theta_{п}/\theta_{ст}$  и  $i$ .

Расчеты показывают (рис. 4), что в области малых оптических толщин величины  $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_2$  занижены, в области больших оптических толщин —

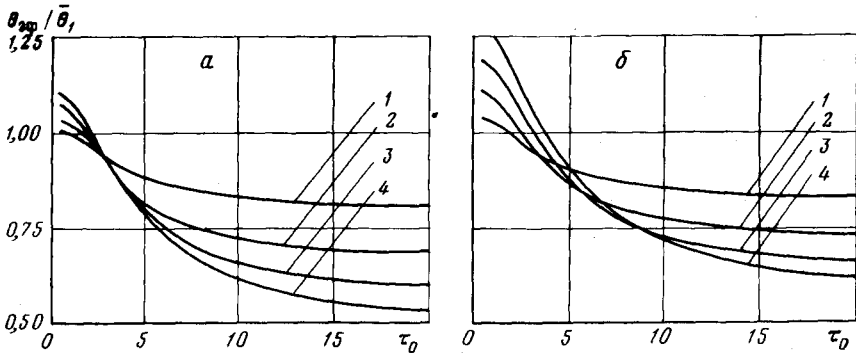


Рис. 4. Зависимость  $\theta_{эф}/\bar{\theta}_1$  (а) и  $\theta_{эф}/\bar{\theta}_2$  (б) от оптической толщины слоя ( $\theta_{д} = 5 \cdot 10^{-3}$  м·К): 1 —  $\theta_{п}/\theta_{ст} = 1,5$ ; 2 — 2,0; 3 — 2,5; 4 — 3,0

завышенные относительно  $T_{эф}$ . Одновременно следует отметить изменение характера этих отличий при переходе к более высоким значениям максимальной приведенной температуры  $\theta_{п}$ . При больших значениях  $\theta_{п}$  в рассматриваемом диапазоне  $\tau_0$  имеем в основном область оптических толщин, в которой  $\bar{\theta}_1$  и  $\bar{\theta}_2$  — завышенные относительно  $\theta_{эф}$ . В области же малых оптических толщин для этого случая значения указанных температур практически совпадают.

Имея в виду, что наибольшие расхождения эффективной приведенной температуры  $\theta_{эф}$  с  $\bar{\theta}_1$  и  $\bar{\theta}_2$  наблюдаются на концах рассмотренного диапазона изменения оптических толщин, можно сделать вывод, что в этих условиях при использовании среднеарифметических и среднегеометрических значений температуры в расчетах теплообмена в излучающем газовом плоскоградIENTных профилях этот эффект усиливается. Так, например, при  $\theta_{п} = 1 \cdot 10^{-3}$  м·К для профилей  $i = 1-4$  с большим температурным градиентом ( $\theta_{п}/\theta_{ст} = 3,0$ ) величина среднеарифметической температуры  $\bar{T}_1$  оказывается заниженной по отношению к  $T_{эф}$  на 35% в области малых оптических толщин и завышенной на 30% в области больших оптических толщин. Для среднегеометрической температуры  $\bar{T}_2$  при упомянутых выше профилях температуры это отличие может достигать 60 и 40% в соответствующих областях значений оптической толщины слоя.

Значительное влияние на соотношения (8) оказывает размер ядра с постоянной температурой  $\tau_{ц} = \tau|_{T_{ц}}$ . Величины  $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_2$  заниженные относительно  $T_{эф}$  во всем диапазоне оптических толщин слоя; расхождение может достигать 70% в области малых оптических толщин. Это понятно из физических условий расчета: нелогично принимать в качестве средней величины для слоя значение температуры, определяемое по формулам (18), когда ядро с максимальной температурой составляет, например,  $\tau_{ц} = 0,9\tau_0$  ( $i = 8$ ).

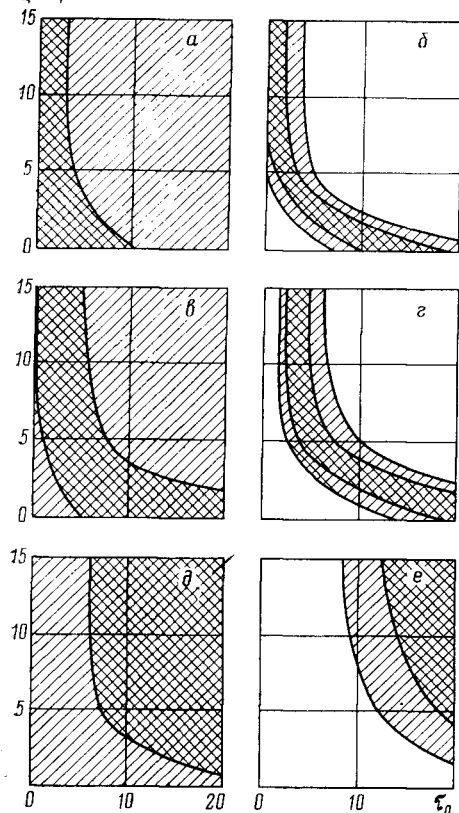
$\theta_{\text{ц}} \cdot 10^3, \text{ м} \cdot \text{К}$ 

Рис. 5

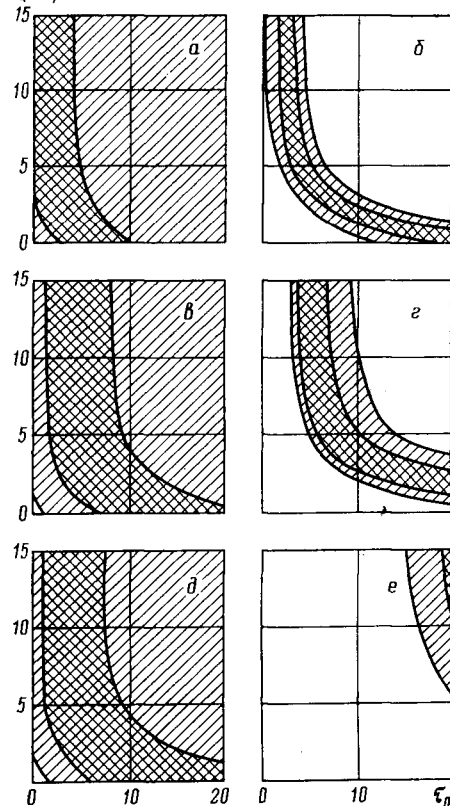
 $\theta_{\text{ц}} \cdot 10^3, \text{ м} \cdot \text{К}$ 

Рис. 6

Рис. 5. Области различной эффективной приведенной и среднеарифметической температур (заштрихованная в клетку область соответствует отличию  $\theta_{\text{эф}}$  и  $\bar{\theta}_1$  не более, чем на 10%, заштрихованная в линию – на 10–20%, незаштрихованная – более, чем на 20%):

Рис. 5	$i$	$\theta_{\text{ц}}/\theta_{\text{ст}}$	Рис. 5	$i$	$\theta_{\text{ц}}/\theta_{\text{ст}}$	Рис. 5	$i$	$\theta_{\text{ц}}/\theta_{\text{ст}}$
а	4	1,5	е	6	1,5	д	8	1,5
б	4	3,0	з	6	3,0	е	8	3,0

Рис. 6. Области эффективной приведенной температуры и различий среднегеометрической температуры (обозначения те же, что и на рис. 5)

Анализ полученных расчетных данных позволяет определить области значений оптических толщин, в которых для рассмотренных температурных профилей с различными градиентами расхождение между температурой  $T_{\text{эф}}$  и температурами  $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_2$  не превышает наперед выбранного значения. На рис. 5 показаны области параметров ( $\tau_0, \theta_{\text{ц}}$ ), в которых расхождение среднеарифметической температуры  $\bar{T}_1$  от  $T_{\text{эф}}$  не превышает 20 и 10% соответственно. Области расхождений в 20 и 10% при использовании среднегеометрической температуры показаны на рис. 6. Аналогичные закономерности поведения эффективной температуры, задаваемой отличным от представленного в данной работе способом, отмечены в [12].

Институт физики АН БССР

Центральный котлотурбинный институт им. И. И. Ползунова

Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова АН БССР

Институт математики АН БССР

Поступила в редакцию

21 VIII 1978



## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Адрианов. Основы радиационного и сложного теплообмена. «Энергия», 1972.
2. Р. Зигель, Дж. Хауэлл. Теплообмен излучением. «Мир», 1975.
3. М. Н. Оцисик. Сложный теплообмен. «Мир», 1976.
4. А. С. Невский. Лучистый теплообмен в печах и топках. «Металлургия», 1971.
5. Э. М. Спарроу, Р. Д. Сесс. Теплообмен излучением. «Энергия», Л., 1971.
6. В. П. Трофимов, К. С. Адзерихо. В сб. Конвективный тепло- и массоперенос. Изд. ИТМО АН БССР, Минск, 1979.
7. А. М. Самсон. ИФЖ, I, № 1, 65, 1958.
8. К. S. Adzerikho, V. P. Nekrasov. Intern. J. Heat Mass Transfer, 18, 1131, 1975.
9. K. S. Adzerikho, V. I. Anculevich, J. K. Lapko, V. P. Nekrasov. Intern. J. Heat Mass Transfer, 22, 131, 1979.
10. В. П. Трофимов, К. С. Адзерихо. В сб. Конвективный тепло- и массоперенос. Изд. ИТМО АН БССР, Минск, 1979.
11. P. Rosin, K. Fehling. Wärme, H. 3, 1931.
12. И. Р. Микх. Изв. АН ЭССР, 22, серия физика, математика, № 3, 296, 1973.