Челябинский физико-математический журнал. 2016. Т. 1, вып. 2. С. 44–58.

УДК 517.977.5

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ЖЁСТКОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ ФАЗОВОГО ПОЛЯ

М. В. Плеханова[1,2,a], **Г. Д. Байбулатова**[1,b]

[1] *Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия*
[2] *Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия*
[a]*mariner79@mail.ru;* [b]*baybulatova_g_d@mail.ru*

В работе использован метод условного градиента для численного исследования задачи жёсткого управления решениями линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля. Доказаны существование решения задачи, устойчивость метода и аппроксимация решений задачи. При некоторых значениях параметров задачи проведён численный эксперимент.

Ключевые слова: *оптимальное управление, система с распределёнными параметрами, задача жёсткого управления, вырожденное эволюционное уравнение, численное решение, метод условного градиента.*

Введение

В работе предложен алгоритм численного решения задачи оптимального управления для линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля

$$v(x,0)=\varphi(x),\quad x\in\Omega, \tag{1}$$

$$\theta\frac{\partial v}{\partial n}(x,t)+(1-\theta)v(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{2}$$

$$\theta\frac{\partial w}{\partial n}(x,t)+(1-\theta)w(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{3}$$

$$v_t(x,t)+lw_t(x,t)=k\Delta v(x,t)+u_1(x,t),\quad x\in\Omega\times(0,T), \tag{4}$$

$$\Delta w(x,t)+\alpha w(x,t)+\beta v(x,t)+u_2(x,t)=0,\quad x\in\Omega\times(0,T), \tag{5}$$

$$\|u_1\|^2_{H^1(0,T;L_2(\Omega))}+\|u_2\|^2_{H^1(0,T;L_2(\Omega))}\le R^2, \tag{6}$$

$$J(v,w)=\frac{1}{2}\|v-\tilde v\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}+\frac{1}{2}\|w-\tilde w\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\to\inf, \tag{7}$$

где $\alpha,\beta,l,k,\theta,R$ — константы, $k>0$, $\tilde v,\tilde w\in L_2(0,T;L_2(\Omega))$ — заданные функции, v, w — искомые функции, u_1, u_2 — функции управления. Задача заключается в минимизации функционала (7) на допустимых наборах (v,w,u_1,u_2), где (u_1,u_2) принадлежат множеству допустимых управлений (6).

Задача (1)–(7) находит своё применение в металлургии — при изготовлении сплавов, в строительстве — при изучении изменения агрегатного состояния содержащейся в ограждениях влаги при колебаниях температуры наружного воздуха, и др. Особенность системы уравнений (4), (5) в том, что она является вырожденной. Исследование вырожденных уравнений, т. е. не разрешимых относительно производной по времени, и задач оптимального управления для них проводилось ранее в работах [1–6]. Результатами этих работ являются условия существования решения, обычно единственного.

Алгоритм численного решения, представленный здесь, основан на методе условного градиента, который состоит из нескольких этапов: поиск численного решения начально-краевой задачи (1)–(5) на равномерной сетке, решение сопряжённой задачи и построение итерационной последовательности управлений. Построение численной схемы ранее проводилось для упрощённого варианта уравнений фазового поля в работах [7; 8]. Настоящая работа также посвящена исследованию вопросов устойчивости предложенных разностных схем.

1. Задача управления и разностная схема

Пусть Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Рассмотрим задачу (1)–(7) жёсткого управления для линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля. Введём в рассмотрение пространства

$$H_\theta^2(\Omega) = \{z \in H^2(\Omega) : \left(\theta\frac{\partial}{\partial n} + 1 - \theta\right) z(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\},$$

$$\mathcal{Z}_1 = \big\{(v,w) \in H^1(0,T;(L_2(\Omega))^2) : \text{при всех}\, t \in [0,T]\ v(\cdot,t), w(\cdot,t) \in H_\theta^2(\Omega),$$
$$v_t + lw_t - k\Delta v \in H^1(0,T;L_2(\Omega)),\ \Delta w \in H^1(0,T;L_2(\Omega))\big\}$$

и самосопряжённый оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения $\mathrm{dom}\mathcal{A} = H_\theta^2(\Omega)$, действующий по правилу $\mathcal{A}z = \Delta z$.

Теорема 1. *Пусть $\beta l - \alpha \notin \sigma(\mathcal{A})$. Тогда существует единственное решение $(\hat{v}, \hat{w}, \hat{u}_1, \hat{u}_2) \in \mathcal{Z}_1 \times H^1(0,T;(L_2(\Omega))^2)$ задачи* (1)–(7).

Доказательство. Доказательство теоремы заключается в проверке условий следствия 2.5.4 из монографии [6]. Выбирая $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = (L_2(\Omega))^2$,

$$L = \begin{pmatrix} I & lI \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} k\Delta & 0 \\ \beta I & \alpha I + \Delta \end{pmatrix},$$

определим операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $\ker L = \{0\} \times L_2(\Omega)$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X})$, $\mathrm{dom}M = (H_\theta^2(\Omega))^2$. Как доказано в теореме 3 [9], условия $-\alpha + \beta l \notin \sigma(\mathcal{A})$, $k > 0$ гарантируют сильную $(L,0)$-радиальность оператора M. Таким образом, с учётом очевидной ограниченности и выпуклости множества $\{(u_1,u_2) \in (0,T;H^1(0,T;L_2(\Omega)))^2 : \|u_1\|^2_{H^1(0,T;L_2(\Omega))} + \|u_2\|^2_{H^1(0,T;L_2(\Omega))} \leq R^2\}$ в пространстве $H^1(0,T;L_2(\Omega))^2$ получим существование решения. Его единственность следует из инъективности оператора B при управлении, который в данной постановке является тождественным оператором. $\square$

Построение разностной схемы будем проводить в прямоугольной области $Q = \Omega\times[0,T] = [0,\pi]\times[0,T]$ с шагом $h = \pi/N$ по пространству и шагом $\tau > 0$ по времени, определив тем самым точки $x_n = nh$, $n = 0,\ldots,N$, и $t_m = m\tau$, $m = 0,\ldots,M$. Приближённые значения функций v, w, u_1, u_2 в узлах с координатами (x_n, t_m) будем обозначать через $v_n^m, w_n^m, u_{1_n}^m, u_{2_n}^m$.

Рассмотрим разностную схему для задачи (1)–(5)

$$\frac{v_n^{m+1}-v_n^m}{\tau}+l\frac{w_n^{m+1}-w_n^m}{\tau}=\frac{k}{h^2}(v_{n-1}^m-2v_n^m+v_{n+1}^m)+u_{1_n}^m,$$
$$m=0,\dots,M-1,\ n=1,\dots,N-1, \qquad (8)$$

$$\frac{w_{n-1}^m-2w_n^m+w_{n+1}^m}{h^2}+\alpha w_n^m+\beta v_n^m+u_{2_n}^m=0,\ m=0,\dots,M-1,\ n=1,\dots,N-1, \quad (9)$$

с граничными и начальными условиями, которые после преобразований для случая $Q=[0,\pi]\times[0,T]$, примут вид

$$v_0^m=\frac{\theta}{\theta+h-\theta h}v_1^m, w_0^m=\frac{\theta}{\theta+h-\theta h}w_1^m, \quad m=0,\dots,M,$$

$$v_N^m=\frac{\theta}{\theta+h-\theta h}v_{N-1}^m, \quad w_N^m=\frac{\theta}{\theta+h-\theta h}w_{N-1}^m, \quad m=0,\dots,M,$$

$$v_n^0=\varphi_{0_n}, \quad n=0,\dots,N.$$

Невязкой метода (8), (9) назовём сеточную функцию $\Psi=(\xi_n^m,\eta_n^m)$, где

$$\xi_n^m=\frac{v(x_n,t_{m+1})-v(x_n,t_m)}{\tau}+l\frac{w(x_n,t_{m+1})-w(x_n,t_m)}{\tau}-\frac{k}{h^2}(v(x_{n-1},t_m)-$$
$$-2v(x_n,t_m)+v(x_{n+1},t_m))-u_1(x_n,t_m),$$

$$\eta_n^m=\frac{w(x_{n-1},t_m)-2w(x_n,t_m)+w(x_{n+1},t_m)}{h^2}+\alpha w(x_n,t_m)+\beta v(x_n,t_m)+u_2(x_n,t_m).$$

Через $v(x_n,t_m)$, $w(x_n,t_m)$ обозначены истинные значения решения v,w задачи (1)–(5) в соответствующих точках. Будем говорить, что невязка имеет порядок $\tau^{p1}+h^{p2}$, если существует константа C, не зависящая от τ и h, что $\|\Psi\|_{\mathbb{R}^2}\leq C(\tau^{p1}+h^{p2})$ для всех $n=1,\dots,N-1$, $m=0,\dots,M-1$.

Лемма 1. *Пусть точное решение v, w задачи (1)–(5) таково, что функции v и w дважды непрерывно дифференцируемы по t и четырежды непрерывно дифференцируемы по x. Тогда невязка метода (8), (9) имеет порядок $\tau+h^2$.*

Доказательство. Пользуясь формулой Тейлора, сделаем замены

$$v_n^{m+1}=v_n^m+\tau v_{n\ t}^m+\frac{1}{2}\tau^2v_{n\ tt}^m,$$

$$w_n^{m+1}=w_n^m+\tau w_{n\ t}^m+\frac{1}{2}\tau^2w_{n\ tt}^m,$$

$$v_{n\pm1}^m=v_n^m\pm hv_{n\ x}^m+\frac{1}{2}h^2v_{n\ xx}^m\pm\frac{1}{6}h^3v_{n\ xxx}^m+\frac{1}{24}h^4v_{n\ xxxx}^m,$$

$$w_{n\pm1}^m=w_n^m\pm hw_{n\ x}^m+\frac{1}{2}h^2w_{n\ xx}^m\pm\frac{1}{6}h^3w_{n\ xxx}^m+\frac{1}{24}h^4w_{n\ xxxx}^m.$$

Таким образом, с учётом уравнений (8), (9) получаем выражение для невязки

$$\xi_n^m=\frac{1}{12}h^2v_{xxxx}(x_n,t_m)-\frac{1}{2}\tau w_{tt}(x_n,t_m),$$

$$\eta_n^m=-\frac{1}{12}h^2w_{xxxx}(x_n,t_m).$$

Отсюда можно сделать вывод, что $\Psi=O(\tau+h^2)$. □

Теорема 2. *Пусть* $\beta l > 0$, $\alpha < 0$, $k > 0$. *Тогда схема* (8), (9) *устойчива, если выполнено условие* $k\tau \le h^2/2$.

Доказательство. Обозначив через ρ_q^m, σ_q^m коэффициенты q-х гармоник на m-м слое, имеем

$$v(x_n, t_m) = \rho_q^m e^{iqx_n}, \quad w(x_n, t_m) = \sigma_q^m e^{iqx_n}, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{10}$$

Подставим эти выражения в (8), получим

$$\rho_q^{m+1} - \rho_q^m + l(\sigma_q^{m+1} - \sigma_q^m) = \frac{2k\tau}{h^2}\rho_q^m(\cos qh - 1). \tag{11}$$

Запишем (9) после подстановки (10) и затем упростим

$$2\sigma_q^m(\cos qh - 1) + \alpha h^2 \sigma_q^m + \beta h^2 \rho_q^m = 0. \tag{12}$$

Сделаем замену

$$\mu_q^m = \rho_q^m + l\sigma_q^m, \quad \sigma_q^m = \sigma_q^m.$$

Прежде чем произвести замену, введём некоторые изменения в запись (11) и (12):

$$\rho_q^{m+1} - \rho_q^m = \frac{2k\tau}{h^2}(\cos qh - 1)\rho_q^m + \frac{2k\tau l}{h^2}(\cos qh - 1)\sigma_q^m - \frac{2k\tau l}{h^2}(\cos qh - 1)\sigma_q^m,$$

$$2\sigma_q^m(\cos qh - 1) + \alpha h^2\sigma_q^m + \beta h^2 \rho_q^m + \beta h^2 l \sigma_q^m - \beta h^2 l \sigma_q^m = 0.$$

Теперь, выполнив подстановку в последние равенства, получим

$$\mu_q^{m+1} - \mu_q^m = \frac{2k\tau}{h^2}\mu_q^m(\cos qh - 1) - \frac{2kl\tau}{h^2}\sigma_q^m(\cos qh - 1), \tag{13}$$

$$\alpha h^2 \sigma_q^m - \beta h^2 l \sigma_q^m + 2\sigma_q^m(\cos qh - 1) + \beta h^2 \mu_q^m = 0.$$

Из последнего равенства выразим σ_q^m в следующем виде

$$\sigma_q^m = \frac{\beta h^2}{\beta l h^2 - \alpha h^2 - 2(\cos qh - 1)}\mu_q^m.$$

Подставим это выражение в равенство (13), тогда (13) примет вид

$$\mu_q^{m+1} - \mu_q^m = \frac{2k\tau}{h^2}\mu_q^m(\cos qh - 1) - \frac{2kl\tau(\cos qh - 1)}{h^2}\frac{\beta h^2}{\beta l h^2 - \alpha h^2 - 2(\cos qh - 1)}\mu_q^m.$$

Приведём подобные слагаемые в этом равенстве, сгруппируем их и получим

$$\mu_q^{m+1} = \left(1 + \frac{2k\tau}{h^2}(\cos qh - 1)\left(1 + \frac{\beta h^2}{2(\cos qh - 1) + \alpha h^2 - \beta l h^2}\right)\right)\mu_q^m. \tag{14}$$

Условие устойчивости можно записать в виде двух неравенств $\zeta \le 1$, $\zeta \ge 1$, где

$$\zeta = \left(1 + \frac{2k\tau}{h^2}(\cos qh - 1)\left(1 + \frac{\beta h^2}{2(\cos qh - 1) + \alpha h^2 - \beta l h^2}\right)\right).$$

Для начала покажем, что ζ не превосходит единицы. Перепишем выражение (14):

$$\mu_q^{m+1} = \left(1 - \frac{2k\tau}{h^2}(1 - \cos qh)\left(1 + \frac{\beta l h^2}{2(\cos qh - 1) + \alpha h^2 - \beta l h^2}\right)\right)\mu_q^m.$$

Тогда достаточно показать, что

$$\frac{2k\tau}{h^2}(1-\cos qh)\left(1+\frac{\beta lh^2}{2(\cos qh-1)+\alpha h^2-\beta lh^2}\right)\geq 0,$$

а с учётом неравенства $\frac{2k\tau}{h^2}(1-\cos qh)\geq 0$, что

$$1+\frac{\beta lh^2}{2(\cos qh-1)+\alpha h^2-\beta lh^2}\geq 0$$

или

$$\frac{-\beta lh^2}{2(\cos qh-1)+\alpha h^2-\beta lh^2}\leq 1.$$

Из условий теоремы и из последнего следует неравенство

$$\beta lh^2\leq -2(\cos qh-1)-\alpha h^2+\beta lh^2.$$

В итоге получим

$$2(\cos qh-1)\leq -\alpha h^2,$$

которое выполняется при $\alpha<0$ для всех q. Покажем, что $\zeta\geq -1$, т. е.

$$-1\leq 1-\frac{2k\tau}{h^2}(1-cosqh)\left(1+\frac{\beta lh^2}{2(\cos qh-1)+\alpha h^2-\beta lh^2}\right).$$

Очевидно, что достаточно выполнения неравенства

$$\frac{k\tau}{h^2}(1-cosqh)\left(1+\frac{\beta lh^2}{2(\cos qh-1)+\alpha h^2-\beta lh^2}\right)\leq 1.$$

Так как $k\tau\leq h^2/2$, то остаётся показать выполнение условия на один из множителей

$$1+\frac{\beta lh^2}{2(\cos qh-1)+\alpha h^2-\beta lh^2}\leq 1$$

или

$$\frac{\beta lh^2}{2(\cos qh-1)+\alpha h^2-\beta lh^2}\leq 0.$$

Из того, что $\beta l>0$ и $\beta l>\alpha$, получим требуемое. □

2. Сопряжённая задача

Метод условного градиента использует решение сопряжённой задачи, строить которую будем с помощью функции Лагранжа для задачи (1)–(5)

$$\mathfrak{L}(v,w)=\frac{1}{2}\|v-\tilde{v}\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}+\frac{1}{2}\|w-\tilde{w}\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}+$$

$$+\int_0^T\int_\Omega s(x,t)(v_t(x,t)+lw_t(x,t)-k\Delta v(x,t)-u_1(x,t))dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_\Omega r(x,t)(\Delta w(x,t)+\alpha w(x,t)+\beta v(x,t)+u_2(x,t))dxdt,$$

где $s(s,t)$, $r(x,t)$ — множители Лагранжа. Будем предполагать, что функции $s(s,t)$, $r(x,t)$ являются достаточно гладкими в Q, ограничения на $s(s,t)$, $r(x,t)$ опишем ниже. Возьмём вариации по переменным v, w и u_1, u_2, т. е. рассмотрим функции $v(x,t)+\delta v(x,t)$, $w(x,t)+\delta w(x,t)$, $u_1(x,t)+\delta u_1(x,t)$, $u_2(x,t)+\delta u_2(x,t)$ при $(x,t)\in Q$, причём будем предполагать, что вариации удовлетворяют граничным условиям. Тогда

$$\mathfrak{L}(v+\delta v, w+\delta w, u_1+\delta u_1, u_2+\delta u_2) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega (v(x,t)+\delta v(x,t)-\tilde v(x,t))^2 + (w(x,t)+\delta w(x,t)-\tilde w(x,t))^2 dxdt +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega s(x,t)(v_t(x,t)+lw_t(x,t)-k\Delta v(x,t)-u_1(x,t))dxdt +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega r(x,t)(-\Delta w(x,t)-\alpha w(x,t)-\beta v(x,t)-u_2(x,t))dxdt +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega s(x,t)(\delta v_t(x,t)+l\delta w_t(x,t)-k\Delta\delta v(x,t))dxdt +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega r(x,t)(-\Delta\delta w(x,t)-\alpha\delta w(x,t)-\beta\delta v(x,t))dxdt +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega s(x,t)\delta u_1(x,t)+r(x,t)\delta u_2(x,t)dxdt.$$

Далее рассмотрим линейную часть функции Лагранжа

$$\delta\mathfrak{L} = \int\limits_0^T\int\limits_\Omega (v(x,t)-\tilde v(x,t))\delta v(x,t)dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_\Omega (w(x,t)-\tilde w(x,t))\delta w(x,t)dxdt +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega s(x,t)(\delta v_t(x,t)+l\delta w_t(x,t)-k\Delta\delta v(x,t))dxdt +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega r(x,t)(-\Delta\delta w(x,t)-\alpha\delta w(x,t)-\beta\delta v(x,t))dxdt -$$

$$-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega r(x,t)\delta u_2(x,t)+s(x,t)\delta u_1(x,t) =$$

$$= \int\limits_0^T\int\limits_\Omega (v(x,t)-\tilde v(x,t))\delta v(x,t) + (w(x,t)-\tilde w(x,t))\delta w dxdt +$$

$$+\int_0^T\int_\Omega r(x,t)(-\alpha\delta w(x,t)-\beta\delta v(x,t))dxdt+$$

$$+\int_\Omega s(x,t)\delta v(x,t)|_0^T dx-\int_0^T\int_\Omega s_t(x,t)\delta v(x,t)dxdt+\int_\Omega ls(x,t)\delta w(x,t)|_0^T dx-$$

$$-\int_0^T\int_\Omega ls_t(x,t)\delta w(x,t)dxdt-\int_0^T\int_\Omega k\delta v(x,t)\Delta s(x,t)dxdt-$$

$$-\int_0^T\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\delta v}{\partial n}(x,t)s(x,t)-\frac{\partial s}{\partial n}(x,t)\delta v(x,t)dxdt-$$

$$+\int_0^T\int_\Omega \delta w(x,t)\Delta r(x,t)dxdt-\int_0^T\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\delta w(x,t)}{\partial n}r(x,t)+\int_0^T\int_{\partial\Omega}\frac{\partial r(x,t)}{\partial n}\delta w(x,t)dxdt.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при вариациях по условию стационарности $\delta\mathfrak{L}=0$, с учётом граничных условий (2), (3) получим сопряжённую задачу

$$s_t(x,t)+\beta r(x,t)+k\Delta s(x,t)=v(x,t)-\tilde{v}(x,t),\quad (x,t)\in Q, \tag{15}$$

$$ls_t(x,t)+(\alpha+\Delta)r(x,t)=w(x,t)-\tilde{w}(x,t),\quad (x,t)\in Q, \tag{16}$$

$$s(x,T)=0,\quad x\in\Omega, \tag{17}$$

$$\theta\frac{\partial s}{\partial n}(x,t)+(1-\theta)s(x,t)=0,\quad x\in\partial\Omega, \tag{18}$$

$$\theta\frac{\partial r}{\partial n}(x,t)+(1-\theta)r(x,t)=0,\quad x\in\partial\Omega. \tag{19}$$

Исследование разрешимости, как и для исходной задачи, проведём с помощью редукции задачи (15)–(19) к абстрактной задаче в банаховых пространствах $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$

$$L\dot{x}=Mx(t)+Bu(t),$$

$$u\in\mathfrak{U}_\partial,$$
$$Px(0)=Px_0(x),$$
$$J_0(x)\to\inf.$$

Здесь $\mathfrak{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое множество в пространстве управлений $H^1(0,T;\mathcal{U})$, $\mathcal{U},\mathcal{X},\mathcal{Y}$ — гильбертовы пространства, $L\in\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $\ker L\neq\{0\}$, $M\in\mathcal{C}l(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $B\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$, $P\in\mathcal{L}(\mathcal{X})$, P — проектор на образ единицы разрешающей полугруппы однородного уравнения $L\dot{x}=Mx(t)$ вдоль её ядра [6]. Выбирая $\mathcal{X}=\mathcal{Y}=(L_2(\Omega))^2$, определим операторы $L\in\mathcal{L}(\mathcal{X})$, $\ker L=\{0\}\times L_2(\Omega)$, $M\in\mathcal{C}l(\mathcal{X})$ с областью определения $\mathrm{dom}M=(H^2_\theta(\Omega))^2$

$$L=\begin{pmatrix} I & 0\\ lI & 0\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix} -k\Delta & -\beta I\\ 0 & -(\alpha I+\Delta)\end{pmatrix}.$$

Через $\{\varphi_m, m\in\mathbb{N}\}$ будем обозначать ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора $\mathcal{A}$, занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_m, m\in\mathbb{N}\}$ с учётом их кратности.

Теорема 3. *Пусть* $-\alpha+\beta l \notin \sigma(\mathcal{A})$, $k>0$, *тогда оператор* M *сильно* $(-L,0)$-*радиален.*

Доказательство. Используя разложение по базису $\{\varphi_m : m\in\mathbb{N}\}$, при

$$\mu\neq\mu_m\equiv\frac{k\lambda_m(\alpha+\lambda_m)}{\alpha-\beta l+\lambda_m},$$

получим операторы

$$-\mu L-M=\begin{pmatrix} -\mu I+k\Delta & \beta I\\ -\mu l I & \alpha I+\Delta\end{pmatrix},$$

$$(-\mu L-M)^{-1}=\begin{pmatrix} \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{-(\lambda_m+\alpha)\langle\cdot,\varphi_m\rangle\varphi_m}{(\beta l+\alpha+\lambda_m)(\mu-\mu_m)} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{-\beta\langle\cdot,\varphi_m\rangle\varphi_m}{(\beta k+\alpha+\lambda_m)(\mu-\mu_m)}\\ \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{-\mu l\langle\cdot,\varphi_m\rangle\varphi_m}{(-\beta l+\alpha+\lambda_m)(\mu-\mu_m)} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\mu-k\lambda_m\langle\cdot,\varphi_m\rangle\varphi_m}{(-\beta l+\alpha+\lambda_m)(\mu-\mu_m)}\end{pmatrix},$$

$$R_\mu^{-L}(M)=\begin{pmatrix} \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\langle\cdot,\varphi_m\rangle\varphi_m}{\mu-\mu_m} & 0\\ \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{lk\lambda_m\langle\cdot,\varphi_m\rangle\varphi_m}{(-\beta l+\alpha+\lambda_m)(\mu-\mu_m)} & 0\end{pmatrix},$$

$$L_\mu^{-L}(M)=\begin{pmatrix} \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{(\lambda_m+\alpha)\langle\cdot,\varphi_m\rangle\varphi_m}{(-\beta l+\alpha+\lambda_m)(\mu-\mu_m)} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\beta\langle\cdot,\varphi_m\rangle\varphi_m}{(-\beta l+\alpha+\lambda_m)(\mu-\mu_m)}\\ \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{l(\lambda_m+\alpha)\langle\cdot,\varphi_m\rangle\varphi_m}{(-\beta l+\alpha+\lambda_m)(\mu-\mu_m)} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\beta l\langle\cdot,\varphi_m\rangle\varphi_m}{(-\beta l+\alpha+\lambda_m)(\mu-\mu_m)}\end{pmatrix},$$

$$R_\mu^{-L}(M)(-\mu L-M)^{-1}=\begin{pmatrix} \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{-(\lambda_m+\alpha)\langle\cdot,\varphi_m\rangle\varphi_m}{(-\beta l+\alpha+\lambda_m)(\mu-\mu_m)^2} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{-\beta\langle\cdot,\varphi_m\rangle\varphi_m}{(-\beta l+\alpha+\lambda_m)(\mu-\mu_m)^2}\\ \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{lk\lambda_m(\lambda_m+\alpha)\langle\cdot,\varphi_m\rangle\varphi_m}{(-\beta l+\alpha+\lambda_m)(\mu-\mu_m)^2} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\beta lk\lambda_m\langle\cdot,\varphi_m\rangle\varphi_m}{(-\beta l+\alpha+\lambda_m)(\mu-\mu_m)2}\end{pmatrix}.$$

В условиях теоремы

$$\min_{m\in\mathbb{N}}|-\beta l+\alpha+\lambda_m|>0,\quad \max_{m\in\mathbb{N}}\left|\frac{\lambda_m+\alpha}{-\beta l+\alpha+\lambda_m}\right|<\infty,\quad \max_{m\in\mathbb{N}}\left|\frac{lk\lambda_m}{-\beta l+\alpha+\lambda_m}\right|<\infty,$$

$$\max_{m\in\mathbb{N}}\left|\frac{\beta}{-\beta l+\alpha+\lambda_m}\right|<\infty,\quad \max_{m\in\mathbb{N}}\left|\frac{l(\lambda_m+\alpha)}{-\beta l+\alpha+\lambda_m}\right|<\infty,\quad \max_{m\in\mathbb{N}}\left|\frac{\beta l}{-\beta l+\alpha+\lambda_m}\right|<\infty,$$

$$\max_{m\in\mathbb{N}}\left|\frac{-lk\lambda_m(\lambda_m+\alpha)}{(-\beta l+\alpha+\lambda_m)^2}\right|<\infty,\quad \max_{m\in\mathbb{N}}\left|\frac{\beta lk\lambda_m}{-\beta l+\alpha+\lambda_m}\right|<\infty,\quad a=\max_{m\in\mathbb{N}}\mu_m.$$

Следовательно, существует $K>0$, такое, что для всех $\mu>a$,

$$\max\left\{\|R_\mu^{-L}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})},\|L_\mu^{-L}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\right\}\leq\frac{K}{|\mu-a|},$$

$$\|R_\mu^{-L}(M)(-\mu L-M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})}\leq\frac{K}{(\mu-a)^2}.$$

□

Теорема 4. *Пусть* $-\alpha + \beta l \notin \sigma(\mathcal{A})$, $k > 0$. *Тогда задача* (15)–(19) *имеет единственное решение* $(s, r) \in H^1(0, T; (L_2(\Omega))^2$.

Доказательство. При замене $\tau = T - t$ получаем задачу, которая сводится к абстрактному уравнению $L\dot{x}(\tau) = Mx(\tau) + y(\tau)$, где $x(\tau) = (s(T-\tau), r(T-\tau))$, $y(\tau) = (v(x, T-\tau) - \tilde{v}(x, T-\tau), w(x, T-\tau) - \tilde{w}(x, T-\tau))$. Операторы L, M заданы выше. Как показано в предыдущей теореме, оператор M сильно $(-L, 0)$-радиален при условии $-\alpha + \beta l \notin \sigma(\mathcal{A})$. Согласно теореме 1.4.2 [6] однозначная разрешимость задачи (15)–(19) следует из условия $(v - \tilde{v}, w - \tilde{w}) \in H^1(0, T; (L_2(\Omega))^2)$. А поскольку (v, w) является решением задачи (1)–(5), последнее очевидно выполняется. □

3. Численное решение сопряжённой задачи

Аналогично исходной задаче построим разностную схему для сопряжённой задачи (15)–(19) в прямоугольнике $Q = [0, \pi] \times [0, T]$.

$$s_t(x,t) + \beta r(x,t) + k\Delta s(x,t) = v(x,t) - \tilde{v}(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$

$$l s_t(x,t) + (\alpha + \Delta) r(x,t) = w(x,t) - \tilde{w}(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$

$$s(x,T) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\theta \frac{\partial s}{\partial n}(x,t) + (1-\theta) s(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$\theta \frac{\partial r}{\partial n}(x,t) + (1-\theta) r(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Заменяя производные на разностные аналоги, получим

$$\frac{s_n^m - s_n^{m-1}}{\tau} + \beta r_n^m + k\frac{s_{n-1}^m - 2s_n^m + s_{n+1}^m}{h^2} = v_n^m - \tilde{v}_n, \ m = 1, \ldots, M, \ n = 1, \ldots, N-1, \tag{20}$$

$$l\frac{s_n^m - s_n^{m-1}}{\tau} + \alpha r_n^m + \frac{r_{n-1}^m - 2r_n^m + r_{n+1}^m}{h^2} = w_n^m - \tilde{w}_n, \ m = 1, \ldots, M, \ n = 1, \ldots, N-1, \tag{21}$$

$$s_n^M = 0, \quad n = 0, \ldots, N, \tag{22}$$

$$s_0^m = \frac{\theta}{\theta + h - \theta h} s_1^m, \quad m = 0, \ldots, M, \tag{23}$$

$$s_N^m = \frac{\theta}{\theta + h - \theta h} s_{N-1}^m, \quad m = 0, \ldots, M. \tag{24}$$

Разностная задача (20)–(24) позволяет получить явную схему для s_n^m и неявную для r_n^m.

$$s_n^{m-1} = \tau s_n^m + \beta\tau r_n^m + k\tau\frac{s_{n-1}^m - 2s_n^m + s_{n+1}^m}{h^2} - v_n^m - \tau\tilde{v}_n,$$

$$\alpha r_n^m + \frac{r_{n-1}^m - 2r_n^m + r_{n+1}^m}{h^2} - \beta l r_n^m - kl\frac{s_{n-1}^m - 2s_n^m + s_{n+1}^m}{h^2} = w_n^m - \tilde{w}_n - l(v_n^m - \tilde{v}_n).$$

Невязкой метода (20)–(24) назовём сеточную функцию $\Phi = (\chi_n^m, \gamma_n^m)$, где

$$\chi_n^m = \frac{s(x_n, t_m) - s(x_n, t_{m-1})}{\tau} + \beta r(x_n, t_m) + k\frac{s(x_{n-1}, t_m) - 2s(x_n, t_m) + s(x_{n+1}, t_m)}{h^2},$$

$$\gamma_n^m = l\frac{s(x_n, t_m) - s(x_n, t_{m-1})}{\tau} + \alpha r(x_n, t_m) + \frac{r(x_{n-1}, t_m) - 2r(x_n, t_m) + r(x_{n+1}, t_m)}{h^2}.$$

Лемма 2. *Пусть точное решение* (s, r) *задачи* (15)–(19) *таково, что функция* s *дважды непрерывно дифференцируема по* t*, функции* s*,* r *четырежды непрерывно дифференцируемы по* x*. Тогда невязка метода* (20)–(24) *имеет порядок* $\tau + h^2$*.*

Доказательство. С помощью формулы Тейлора получим равенства

$$s_n^{m-1} = s_n^m - \tau s_{n\,t}^m + \frac{1}{2}\tau^2 s_{n\,tt}^m,$$

$$s_{n\pm1}^m = s_n^m \pm h s_{n\,x}^m + \frac{1}{2}h^2 s_{n\,xx}^m \pm \frac{1}{6}h^3 s_{n\,xxx}^m + \frac{1}{24}h^4 s_{n\,xxxx}^m,$$

$$r_{n\pm1}^m = r_n^m \pm h r_{n\,x}^m + \frac{1}{2}h^2 r_{n\,xx}^m \pm \frac{1}{6}h^3 r_{n\,xxx}^m + \frac{1}{24}h^4 r_{n\,xxxx}^m.$$

Таким образом, после всех преобразований невязка примет вид

$$\chi_n^m = \frac{1}{2}\tau s_{tt}(x_n, t_m) - \frac{k}{12}h^2 s_{xxxx}(x_n, t_m),$$

$$\gamma_n^m = l\tau s_{tt}(x_n, t_m) - \frac{1}{12}h^2 r_{xxxx}(x_n, t_m).$$

Отсюда следует требуемое. □

Теорема 5. *Пусть* $\beta l > 0$*,* $\alpha < 0$*,* $k > 0$*. Тогда схема* (20)–(24) *устойчива при* $\tau \le h^2/2$*.*

Доказательство. Обозначив через ρ_q^m, σ_q^m коэффициенты q-х гармоник на m-м слое, имеем

$$s(x_n, t_m) = \rho_q^m e^{iqx_n}, \quad r(x_n, t_m) = \sigma_q^m e^{iqx_n}, \quad q = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

$$v(x_n, t_m) - \tilde{v}(x_n) = \xi_q^m e^{iqx_n}, \quad w(x_n, t_m) - \tilde{w}(x_n) = \eta_q^m e^{iqx_n}, \quad q = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Подставим эти выражения в (18) и (19), получим

$$\frac{\rho_q^m e^{iqx_n} - \rho_q^{m-1} e^{iqx_n}}{\tau} + \beta\sigma_q^m e^{iqx_n} + \frac{k}{h^2}(\rho_q^m e^{iq(x_n-h)} - 2\rho_q^m e^{iq(x_n)} + \rho_q^m e^{iq(x_n+h)}) = \xi_q^m e^{iqx_n},$$

$$l\frac{\rho_q^m e^{iqx_n} - \rho_q^{m-1} e^{iqx_n}}{\tau} + \alpha\sigma_q^m e^{iqx_n} + \frac{1}{h^2}(\sigma_q^m e^{iqx_{n-1}} - 2\sigma_q^m e^{iqx_n} + \sigma_q^m e^{iqx_{n+1}}) = \eta_q^m e^{iqx_n}.$$

Умножим на τe^{-iqx_n}

$$\rho_q^m - \rho_q^{m-1} + \beta\tau\sigma_q^m + \frac{2k\tau}{h^2}\rho_q^m(\cos qh - 1) = \tau\xi_q^m, \tag{25}$$

$$l(\rho_q^m - \rho_q^{m-1}) + \alpha\tau\sigma_q^m + \frac{2\tau}{h^2}\sigma_q^m(\cos qh - 1) = \tau\eta. \tag{26}$$

Умножим (25) на l и вычтем (26):

$$\beta l\tau\sigma_q^m + \frac{2\tau lk}{h^2}\rho_q^m(\cos qh - 1) - \alpha\tau\sigma_q^m(\cos qh - 1) - \frac{2\tau}{h^2}\sigma_q^m(\cos qh - 1) = l\tau\xi_q^m - \tau\eta_q^m,$$

и выразим σ_q^m из получившегося равенства

$$\sigma_q^m(\beta l\tau - \alpha\tau - \frac{2\tau}{h^2}(\cos qh - 1)) = -\frac{2\tau lk}{h^2}\rho_q^m(\cos qh - 1) + l(\tau\xi_q^m + \tau\eta_q^m),$$

$$\frac{\tau(\beta lh^2 - \alpha h^2 - 2(\cos qh - 1))}{h^2}\sigma_q^m = -\frac{2\tau lk}{h^2}\rho_q^m(\cos qh - 1) + (l\tau\xi_q^m + \tau\eta_q^m),$$

$$\sigma_q^m = \frac{-2kl(\cos qh - 1)}{\beta lh^2 - \alpha h^2 - 2(\cos qh - 1)}\rho_q^m + \frac{(l\xi_q^m - \eta_q^m)h^2}{\beta lh^2 - \alpha h^2 - 2(\cos qh - 1)}.$$

После подстановки этого выражения в (25) получим

$$\rho_q^m - \rho_q^{m-1} - \beta\tau\frac{2kl(\cos qh - 1)}{\beta lh^2 - \alpha h^2 - 2(\cos qh - 1)}\rho_q^m + \frac{2k\tau}{h^2}\rho_q^m(\cos qh - 1) +$$

$$+\beta\tau\frac{(l\xi_q^m - \eta_q^m)h^2}{\beta lh^2 - \alpha h^2 - 2(\cos qh - 1)} = \xi_q^m\tau$$

или

$$\rho_q^m\left(1 - \frac{2kl\beta\tau(\cos qh - 1)}{\beta lh^2 - \alpha h^2 - 2(\cos qh - 1)} + \frac{2k\tau}{h^2}(\cos qh - 1)\right) =$$

$$= \rho_q^{m-1} + \frac{h^2\beta\tau\eta_q^m - \alpha h^2\xi_q^m\tau - 2\xi_q^m\tau(\cos qh - 1)}{\beta lh^2 - \alpha h^2 - 2(\cos qh - 1)}.$$

Преобразуем последнее равенство

$$\rho_q^m\left(1 - \frac{2k\tau}{h^2}(1 - \cos qh)\left(1 - \frac{\beta lh^2}{\beta lh^2 - \alpha h^2 - 2(\cos qh - 1)}\right)\right) =$$

$$= \rho_q^{m-1} + \frac{h^2\beta\tau\eta_q^m - \alpha h^2\xi_q^m\tau - 2\xi_q^m\tau(\cos qh - 1)}{\beta lh^2 - \alpha h^2 - 2(\cos qh - 1)}. \tag{27}$$

Здесь константа

$$\frac{h^2\beta\tau\eta_q^m - \alpha h^2\xi_q^m\tau - 2\xi_q^m\tau(\cos qh - 1)}{\beta lh^2 - \alpha h^2 - 2(\cos qh - 1)}$$

не оказывает влияния на устойчивость разностной задачи (20)–(24). В (27) ρ_q^{m-1} заменим на ρ_q^{m+1}, так как переход по временным слоям происходит в обратном порядке, и $(m-1)$-й слой по порядку станет $(m+1)$-м. Коэффициент при ρ_q^m есть ζ, поэтому последующие рассуждения о необходимой для доказательства устойчивости ограниченности ζ по модулю единицей были ранее приведены в теореме 2. □

4. Метод условного градиента

Обозначим вектор-функции $\mathbf{z}(x,t,\mathbf{u}) = (v(x,t,\mathbf{u}), w(x,t,\mathbf{u}))$, $\tilde{\mathbf{z}}(x) = (\tilde{v}(x), \tilde{w}(x))$, $\mathbf{u}(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))$. И, соответственно, $\mathbf{z}(x,t,\mathbf{u}_k) = \mathbf{z}_k$, $\mathbf{z}(x,t,\overline{\mathbf{u}}_k) = \overline{\mathbf{z}}_k$, где $\overline{\mathbf{u}}_k$ — вспомогательное управление, k — номер итерации. Определим оператор A, действующий по правилу $A\mathbf{u} = \mathbf{z}$. Оператор A определяется видом решения начальной задачи (приведён, например, в теореме 1.4.2 [6]) и фактически является оператором, который по формуле, задающей решение задачи (1)–(7) с нулевым начальным условием, управлению ставит в соответствие функцию состояния.

Определим оператор A^*, сопряжённый к оператору A. Учитывая, что (s,r) — решение сопряжённой задачи (15)–(19), при $\mathbf{c} = (\tilde{v} - v, \tilde{w} - w)$ имеем

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{c}\rangle_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^2)} =$$

$$= \int_0^T\int_\Omega \mathbf{z}(\tilde{\mathbf{z}} - \mathbf{z})dx = \int_0^T\int_\Omega v(x,t)(-s_t(x,t) - \beta r(x,t) - k\Delta s(x,t))dxdt +$$

$$+\int_0^T\int_\Omega w(x,t)(-ls_t(x,t)-\alpha r(x,t)-\Delta r(x,t))dxdt=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega -v(x,t)s_t(x,t)-\beta v(x,t)r(x,t)-kv(x,t)\Delta s(x,t)dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_\Omega -lw(x,t)s_t(x,t)-\alpha w(x,t)r(x,t)-w(x,t)\Delta r(x,t)dxdt=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega s(x,t)(v_t(x,t)lw_t(x,t))-\beta v(x,t)r(x,t)-ks(x,t)\Delta v(x,t)+$$

$$+\int_0^T\int_\Omega -\alpha w(x,t)r(x,t)-r(x,t)\Delta w(x,t)dxdt=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega s(x,t)(v_t(x,t)+lw_t(x,t)-k\Delta v(x,t))dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_\Omega r(x,t)(-\beta v(x,t)-\alpha w(x,t)-\Delta w(x,t))dxdt=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega s(x,t)u_1(x,t)+r(x,t)u_2(x,t)dxdt=\langle\mathbf{u},A^*\mathbf{c}\rangle_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^2)}.$$

Таким образом, $A^*\mathbf{c}=(s,r)$.

Задача заключается в минимизации функционала (7). Реализация решения осуществляется методом условного градиента. Метод представляет собой выполнение шагов следующего алгоритма:

1) выбираются начальное управление u_0 и необходимые константы;
2) построение итерационной последовательности проводится по формуле

$$\mathbf{u}_{k+1}=\mathbf{u}_k+\alpha_k(\overline{\mathbf{u}}_k-\mathbf{u}_k),$$

где

$$\overline{\mathbf{u}}_k=\left(\frac{Rs(x,t,\mathbf{u}_k)}{(\int_0^T\int_\Omega(s^2(x,t,\mathbf{u}_k)+r^2(x,t,\mathbf{u}_k))dxdt)^{\frac{1}{2}}},\frac{Rr(x,t,\mathbf{u}_k)}{(\int_0^T\int_\Omega(s^2(x,t,\mathbf{u}_k)+r^2(x,t,\mathbf{u}_k))dxdt)^{\frac{1}{2}}}\right),$$

$$\alpha_k=\min\{1,\alpha_k^*\}.$$

Здесь $s(x,t)$, $r(x,t)$ — решение сопряжённой задачи, $\mathbf{u}_k$ — значение функций управления на k-м итерационном шаге. Параметр α_k^* определяется следующими рассуждениями. Функционал (7) на каждом шаге итерации примет вид

$$J(\mathbf{u}_k)=\frac{1}{2}\|v(x,t,\mathbf{u}_k)-\tilde{v}\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}+\frac{1}{2}\|w(x,t,\mathbf{u}_k)-\tilde{w}\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}=\frac{1}{2}\|\mathbf{z}(\mathbf{u}_k)-\tilde{\mathbf{z}}\|^2_{L_2(\Omega)^2}.$$

Несложно получить цепочку равенств

$$J(\mathbf{u}_k+\alpha(\overline{\mathbf{u}}_k-\mathbf{u}_k))=\frac{1}{2}\|\mathbf{z}_k+\alpha\overline{\mathbf{z}}_k-\alpha\mathbf{z}_k-\tilde{\mathbf{z}}\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}=$$

$$=\frac{1}{2}\langle\mathbf{z}_k-\tilde{\mathbf{z}}+\alpha\overline{\mathbf{z}}_k-\alpha\mathbf{z}_k,\mathbf{z}_k-\tilde{\mathbf{z}}+\alpha\overline{\mathbf{z}}_k-\alpha\mathbf{z}_k\rangle_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}=$$

$$=\frac{1}{2}\|\mathbf{z}_k-\tilde{\mathbf{z}}\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}+\alpha\langle\mathbf{z}_k-\tilde{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{z}}_k-\mathbf{z}_k\rangle_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}+\frac{1}{2}\alpha^2\|\overline{\mathbf{z}}_k-\mathbf{z}_k\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}.$$

Относительно параметра α последнее выражение представляет собой квадратный многочлен, минимум которого достигается в точке

$$\alpha_k^*=-\frac{\langle\mathbf{z}_k-\tilde{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{z}}_k-\mathbf{z}_k\rangle_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}}{\|\overline{\mathbf{z}}_k-\mathbf{z}_k\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}}.$$

Согласно определению оператора A и вида сопряжённого к нему оператора получим

$$\langle\mathbf{z}_k-\tilde{\mathbf{z}}_k,\overline{\mathbf{z}}_k-\mathbf{z}_k\rangle_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}=\langle\mathbf{z}_k-\tilde{\mathbf{z}}_k,A(\overline{\mathbf{u}}_k-\mathbf{u}_k)\rangle_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}=$$

$$=\langle A^*(\mathbf{z}-\tilde{\mathbf{z}}_k),\overline{\mathbf{u}}_k-\mathbf{u}_k\rangle_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}=-\langle A^*(\tilde{\mathbf{z}}-\mathbf{z}_k),\overline{\mathbf{u}}_k-\mathbf{u}_k\rangle_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}.$$

Окончательно, учитывая полученное выше выражение для $A^*\mathbf{c}$, получим формулу

$$\alpha_k^*=\frac{\int\limits_0^T\int\limits_\Omega s(x,t)(\overline{u}_{1k}(x,t)-u_{1k}(x,t))dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega r(x,t)(\overline{u}_{2k}(x,t)-u_{2k}(x,t))dxdt}{(\int\limits_\Omega(\overline{v}_k(x,t)-v_k(x,t))^2+(\overline{w}_k(x,t)-w_k(x,t))^2dx)^{\frac{1}{2}}}.$$

Интерфейс написанной авторами программы, реализующей метод условного градиента для исследуемой задачи, позволяет выполнить следующие действия:

— задавать отрезки изменения пространственной и временно́й переменной;

— устанавливать начальное значение, количество итераций;

— строить графики решения начально-краевой задачи для системы уравнений фазового поля, графики решения сопряжённой задачи управления, приближённое управление.

№ п/п	$J(v,w)$
1	0.223330
2	0.222587
3	0.221412
4	0.219651
5	0.217918
6	0.216242
7	0.214619
8	0.213048
9	0.211527
10	0.210054

Выполнена программная реализация метода условного градиента при $\mathbf{u}_0(x,t)\equiv 0$, $\alpha=-0.75$, $\beta=0.02$, $R=0.5$, $k=0.75$, $l=0.04$, $\varphi=\sin^2(x)$, $N=15$, $M=50$. Найденные значения функционала (7) для 10 итераций указаны в таблице. Скорости сходимости помогает сравнение значений функционала стоимости на итерационной последовательности оптимальных наборов.

Список литературы

1. **Федоров, В. Е.** О гладкости решений линейных уравнений соболевского типа / В. Е. Федоров // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, № 12. — С. 1646–1649.
2. **Плеханова, М. В.** Задача оптимального управления для одного класса вырожденных уравнений / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2004. — № 5. — С. 40–44.

3. **Плеханова, М. В.** Критерий оптимальности в задаче управления для линейного уравнения соболевского типа / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2007. — № 2. — С. 37–44.
4. **Плеханова, М. В.** О существовании и единственности решений задач оптимального управления линейными распределёнными системами, не разрешёнными относительно производной по времени / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров // Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — Т. 75, № 2. — С. 177–194.
5. **Исламова, А. Ф.** Задачи смешанного управления для линейных распределённых систем соболевского типа : дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Челябинск, 2012.
6. **Плеханова, М. В.** Оптимальное управление вырожденными распределёнными системами / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров. — Челябинск : Издат. центр ЮУрГУ, 2013. — 174 с.
7. **Омельченко, Е. А.** Численное решение линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля с запаздыванием / Е. А. Омельченко, М. В. Плеханова, П. Н. Давыдов // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Математика. Механика. Физика. — 2013. — Т. 5, № 2. — С. 45–51.
8. **Плеханова М. В.** Метод условного градиента для одной задачи жёсткого управления вырожденной эволюционной системой / М. В. Плеханова, Г. Д. Байбулатова // Челяб. физ.-мат. журн. — 2016. — Т. 1, вып. 1. — С. 81–92.
9. **Федоров, В. Е.** Нелокальная по времени краевая задача для линеаризованной системы уравнений фазового поля / В. Е. Федоров, Н. Д. Иванова // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Математика. Механика. Физика. — 2015. — Т. 7, № 3. — С. 10–15.

Поступила в редакцию 02.05.2016
После переработки 12.06.2016

Сведения об авторах

Плеханова Марина Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; доцент кафедры прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: mariner79@mail.ru.

Байбулатова Гузель Дамировна, студентка математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: baybulatova_g_d@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 2. P. 44–58.

NUMERICAL STUDY OF A ROBUST CONTROL PROBLEM FOR THE LINEARIZED QUASISTATIONARY SYSTEM OF THE PHASE FIELD EQUATIONS

M.V. Plekhanova[1,2,a], **G.D. Baybulatova**[1,b]

[1] *Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*
[2] *South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia*
[a] *mariner79@mail.ru;* [b] *baybulatova_g_d@mail.ru*

The conditional gradient method is used for the numerical study of a robust control problem for the linearized quasistationary system of the phase field equations. The existence of a solution of the control problem is obtained, the method stability and approximation of solutions are proved. For some values of the problem parameters the numerical experiment was carried out.

Keywords: *optimal control, system with distributed parameters, robust control problem, degenerate evolution equation, numerical solution, conditional gradient method.*

References

1. **Fedorov V.E.** Smoothness of solutions of linear equations of Sobolev type. *Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 12, pp. 1731–1735.
2. **Plekhanova M.V., Fedorov V.E.** An optimal control problem for a class of degenerate equations. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2004, vol. 43, no. 5, pp. 698–702.
3. **Plekhanova M.V., Fedorov V.E.** An optimality criterion in a control problem for a Sobolev-type linear equation. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2007, vol. 46, no. 2, pp. 248–254.
4. **Plekhanova M.V., Fedorov V.E.** On the existence and uniqueness of solutions of optimal control problems of linear distributed systems which are not solved with respect to the time derivative. *Izvestiya: Mathematics*, 2011, vol. 75, no. 2, pp. 395–412.
5. **Islamova A.F.** *Zadachi smeshannogo upravleniya dlya lineynykh raspredelyonnykh sistem sobolevskogo tipa* [Mixed control problems for linear distributed systems of Sobolev type. Thesis]. Chelyabinsk, 2012. (In Russ.).
6. **Plekhanova M.V., Fedorov V.E.** *Optimalnoye upravleniye vyrozhdennymi raspredelyonnymi sistemami* [Optimal control for degenerate distributed systems]. Chelyabinsk, Publishing Center of South Ural State University, 2013. 174 p. (In Russ.).
7. **Omelchenko E.A., Plekhanova M.V., Davydov P.N.** Chislennoye resheniye linearizovannoy kvazistatsionarnoy sistemy uravneniy fazovogo polya s zapazdyvaniyem [Numerical solution of the linearized quasistationary phase field system of equations with delay]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika. Mekhanika. Fizika"* [Bulletin of South Ural State University. Ser.: Mathematics. Mechanics. Physics], 2013, vol. 5, no. 2, pp. 45–51. (In Russ.).
8. **Plekhanova M.V., Baybulatova G.D.** Metod uslovnogo gradienta dlya odnoy zadachi zhyostkogo upravleniya vyrozhdennoy evolyutsionnoy sistemoy [Conditional gradiend method for a robust control problem to a degenerate evolution system]. *Chelyabinskiy phiziko-matematicheskiy zhurnal* [Chelyabinsk physical and mathematical journal], 2016, vol. 1, iss. 1, pp. 81–92. (In Russ.).
9. **Fedorov V.E., Ivanova N.D.** Nelokal'naya po vremeni krayevaya zadacha dlya linearizovannoy sistemy uravneniy fazovogo polya [Time nonlocal boundary value problem for a linearized phase field equations system]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika. Mekhanika. Fizika"* [Bulletin of South Ural State University. Ser.: Mathematics. Mechanics. Physics], 2015, vol. 7, no. 3, pp. 10–15. (In Russ.).

Accepted article received 02.05.2016
Corrections received 12.06.2016