А. Б. Венков, Об акцессорных коэффициентах уравнения Фукса второго порядка с вещественными особыми точками, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1983, том 129, 17–29

А.Б.Венков

ОБ АКЦЕССОРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ УРАВНЕНИЯ ФУКСА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

В работе [I] нами были получены формулы для акцессорных коэффициентов X_k уравнения Шварца, связанного с конформным отображением полуплоскости на круговой многоугольник, и для соответствующего уравнения Фукса. Группа монодромии этого уравнения Фукса являлась "симметричной" фуксовой группой первого рода, топологического рода ноль. Напомним, что знание акцессорных коэффициентов позволяет полностью восстановить указанные уравнения по группе. Коэффициенты X_k в [I] выражались через геометрические параметры порождающего многоугольника, параметры его группы и через непосредственные параметры уравнения Фукса - его особые точки. Однако, так как группа монодромии в [I] является фуксовой (для простоты мы также предположим в этой работе, что все внутренние углы многоугольника равны нулю), то число независимых параметров задачи значительно меньше и равно $n-3$, если n - число особых точек уравнения Фукса. Поэтому вновь возникает классический вопрос об определении акцессорных коэффициентов как функций особых точек (см. [2]), вопрос, на который до сих пор нет никакого конструктивного ответа в общей ситуации.[ж)] По-видимому, хотя это еще не ясно до конца, даже идеальный ответ здесь будет трансцендентным и в лучшем случае можно надеяться получить для искомой функции представление в виде ряда, коэффициенты которого будут задаваться сложными рекуррентными соотношениями.

В настоящей работе мы займемся этой задачей, развивая идеи и методы [I] . Основные результаты работы: теоремы I, 2, 3, 4, 5. Относительно подробный комментарий к ним содержится в контексте теоремы I. Здесь мы ограничимся лишь оптимистическим высказыванием, что утверждения теорем 3, 4, 5 позволяют надеяться получить нужные формулы для акцессорных коэффициентов X_k , как

[ж)] Первый нетривиальный случай четырехугольника с нулевыми углами рассматривался еще в 20-х годах, например, в работе В.А. Фока [3] с точки зрения уравнения Ламе, а также, в настоящее время - А.М.Поляковым и А.Б.Замолодчиковым.

функций лишь особых точек a_j, в самой общей ситуации.

Для корректной постановки задачи рассмотрим сначала ситуацию в полной общности. Пусть M – односвязный многоугольник, ограниченный конечным числом дуг окружностей (круговой многоугольник), P – верхняя полуплоскость, $z: P \longrightarrow M$ – данное конформное отображение. Это отображение (функция) $z(\mathfrak{J})$ удовлетворяет уравнению Шварца:

$$\{z, \mathfrak{J}\} = Q_M(\mathfrak{J}), \tag{I}$$

где $\{z, \mathfrak{J}\} = z'^{-1} z''' - 3/2\, z''^2 z'^{-2}$ – производная Шварца, $Q_M(\mathfrak{J})$ – рациональная функция:

$$Q_M(\mathfrak{J}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\alpha_k^2}{(\mathfrak{J}-a_k)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\mathfrak{J}-a_k} \tag{2}$$

В формуле (2): n – число вершин b_k многоугольника M, $\pi\alpha_k$ – внутренний угол в вершине $b_k, a_k \in \mathbb{R}, z(a_k) = b_k, c_k \in \mathbb{R}, k=1,\dots,n$; c_k не зависят от $\mathfrak{J}$.

Хорошо известно, что уравнение (I) тесно связано со специальным уравнением Фукса

$$f''(\mathfrak{J}) + 1/2\, Q_M(\mathfrak{J}) f(\mathfrak{J}) = 0 \tag{3}$$

Точнее, если $z(\mathfrak{J})$ конформное отображение из (I), тогда

$$z(\mathfrak{J}) = \frac{f_1(\mathfrak{J})}{f_2(\mathfrak{J})}, \tag{4}$$

где $f_1(\mathfrak{J}), f_2(\mathfrak{J})$ два линейно независимых решения уравнения (3).

На константы c_k в (2) (константы, в том смысле, что они не зависят от $\mathfrak{J}$) накладываются три простых условия

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} [2 a_k c_k + 1 - \alpha_k^2] = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} [c_k a_k^2 + a_k(1-\alpha_k^2)] = 0 \tag{5}$$

которые вытекают из формального разложения производной Шварца $\{z, \mathfrak{J}\}$ в окрестности $\mathfrak{J} = \infty$. Мы считаем при этом, что ни одна из вершин не соответствует бесконечно удаленной точке.

Если многоугольник M такой, как указано выше (без дополнительных предположений), то условия (5) – единственные нетривиальные ограничения, накладываемые на коэффициенты c_k (помимо вещественности). Приведем соответствующий подсчет параметров, известный, впрочем, еще классикам.

Многоугольник M задается $3n$ вещественными параметрами, так как каждая его сторона определяется координатами центра соответствующей окружности и ее радиусом. Уравнение (I) определяет M с точностью до 6 вещественных параметров

$$z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2,\mathbb{C}),$$

так как производная Шварца не зависит от применения дробно-линейного преобразования к первому ее аргументу. Следовательно, Q_M зависит от $3n-6$ вещественных параметров.

С другой стороны, в Q_M есть $\alpha_k, a_k, c_k \in \mathbb{R}$, $k=1,\dots,n$ с условиями (5), что дает $3n-3$ параметров. Кроме того, рассмотрим произвольное дробно-линейное преобразование $g\mathfrak{J}=(\alpha\mathfrak{J}+\beta)(\gamma\mathfrak{J}+\delta)^{-1}$, $g: P \to P$, $g \in PSL(2,\mathbb{R})$. Композиция $z(g\mathfrak{J})=z(\tilde{\mathfrak{J}})$ очевидно является снова конформным отображением $P \longrightarrow M$. Поэтому $z(\tilde{\mathfrak{J}})$ удовлетворяет уравнению типа (I)

$$\{z, \tilde{\mathfrak{J}}\} = \tilde{Q}_M(\tilde{\mathfrak{J}}), \tag{6}$$

где $\tilde{Q}_M(\tilde{\mathfrak{J}})$ определится формулой, аналогичной (2), но с $\tilde{\mathfrak{J}}=(\alpha\mathfrak{J}+\beta)\times(\gamma\mathfrak{J}+\delta)^{-1}$, $\tilde{a}_k=(\alpha a_k+\beta)(\gamma a_k+\delta)^{-1}$, и какими-то $\tilde{c}_k$, вместо $\mathfrak{J}, a_k, c_k$, соответственно. Из определения производной Шварца следует

$$\{z, \tilde{\mathfrak{J}}\} = (\gamma\mathfrak{J}+\delta)^4 \{z, \mathfrak{J}\} \tag{7}$$

Из (I), (6), (7) окончательно получаем:

$$\tilde{Q}_M(\tilde{\mathfrak{J}}) = Q_M(\mathfrak{J})(\gamma\mathfrak{J}+\delta)^4,$$

что дает нам три дополнительных тривиальных ограничения на параметры a_k, c_k в Q_M. Таким образом, в Q_M есть ровно $3n-6$ независимых вещественных параметров, которые могут быть, в принципе однозначно определены геометрическими параметрами многоугольника M. И наоборот, для каждого разумного набора $3n-6$ вещественных чисел α_k, a_k, c_k (я имею в виду ограничение лишь на величины углов $\pi\alpha_k$) в уравнении (3) найдется многоугольник M с нужными геометрическими параметрами, который однозначно определит группу монодромии этого уравнения.

Если мы теперь наложим дополнительные ограничения на многоугольник M так, что соответствующая группа станет фуксовой группой первого рода, то ситуация окажется более специальной. Для иллюстрации проведем соответствующий подсчет параметров.

Предположим, что круговой многоугольник M обладает дополнительными свойствами: I) все его вершины b_k лежат на одной окружности (например, радиуса I) 2) все углы $\pi\alpha_k$ равны нулю. Очевидно, такой многоугольник задается n – вещественными параметрами (n – по-прежнему число вершин M). Уравнение (I) в отличие от предыдущего общего случая определяет M с точностью до 3х вещественных параметров

$$z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2,\mathbb{R})$$

Следовательно Q_M зависит от $n-3$ вещественных параметров.

С другой стороны, по аналогии с общим случаем, Q_M в (2) зависит от $2n-6$ параметров a_k, c_k $(\alpha_j = 0)$. Таким образом, мы можем исключить $n-3$ лишних параметров и считать $n-3$ коэффициента c_k (акцессорные коэффициенты) функциями от $n-3$ параметров многоугольника M . Однако, с точки зрения теории дифференциальных уравнений важно иметь формулы, выражающие коэффициенты c_k как функции $n-3$(основных)особых точек a_j . Именно этой задачей мы будем заниматься здесь.

Приведем сначала необходимые определения и результаты работы [I] применительно к рассматриваемой ситуации $\alpha_k = 0$, $k=1,\dots,n$. Отобразим единичный круг, содержащий M на верхнюю полуплоскость и в дальнейшем будем считать, что $M \subset H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ Отношение (4) допускает обращение (как отображение). Обратное к этому отношению отображение $J_M(z) = J(z)$ существует и является аналитической в H автоморфной относительно группы уравнения (3) Γ_M функцией, т.е.,в частности, $J_M(\gamma z) = J_M(z)$ для любых $\gamma \in \Gamma_M$, $z \in H$; $\gamma z = (az+b)(cz+d)^{-1}$. Функция $J_M(z)$ – общий инвариант Клейна, связанный с группой Γ_M . При принятых нами предположениях относительно M группа Γ_M является специальной "симметричной" фуксовой группой первого рода с некомпактной фундаментальной областью и топологическим родом ноль. Как абстрактная группа она порождается n – образующими S_k , каждая из которых является параболическим элементом, с одним соотношением:

$$S_1 S_2 \dots S_n = E,$$

где E – единица группы Γ_M . Группа Γ_M строится по многоугольнику M . Для этого рассмотрим $\overset{\circ}{\Gamma}_M$ – группу, порожденную отражениями относительно всех сторон M. Γ_M по определению является подгруппой индекса 2 в $\overset{\circ}{\Gamma}_M$, состоящей из слов четной длины относительно образующих группы $\overset{\circ}{\Gamma}_M$. Фундаментальная область

F_M для Γ_M может быть выбрана так: $F_M = M \cup \mathcal{E} M$, где $\mathcal{E}$ - фиксированное отражение относительно какой-либо стороны M. Как было видно из предыдущего, мы можем безболезненно выбирать многоугольник M с точностью до дробно-линейного преобразования из $PSL(2,\mathbb{R})$. Для технического удобства выберем его таким: I) вершина $b_n = i\infty$ 2) для достаточно большого $a>0$ выполняется равенство $\{z \in M \mid \operatorname{Im} z \geqslant a\} = [0,1/2]\times[a,\infty)$, Im - мнимая часть числа. Кроме этого, будем считать, что в качестве $\mathcal{E}$ выбрано отражение: $z \longrightarrow -\bar{z}$, где черта означает комплексное сопряжение. Указанная выше нормировка M (а значит и F_M) приводит к тому, что в группе Γ_M, например, образующую S_n можно считать трансляцией: $S_n z = z+1$, $z \in H$.

Таким образом, из автоморфности функции $\mathcal{J}_M(z)$ следует ее периодичность. Так как $\mathcal{J}_M(z)$ - аналитична в H и $\mathcal{J}_M(-1/2\pi i \ln z)$ имеет на бесконечности лишь полюс первого порядка, то этот общий инвариант Клейна допускает следующее разложение Фурье:

$$\mathcal{J}_M(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z},\, k\geqslant -1} A_k \exp 2\pi i k z, \tag{8}$$

при этом все коэффициенты A_k - вещественные числа.

Сделаем здесь важное замечание. Не умаляя общности нашей задачи мы можем считать, что:

$$A_{-1} = 1 \tag{9}$$

а коэффициент A_0 равен произвольному вещественному числу. Дело в том, что произвольный инвариант Клейна $\mathcal{J}_{M,\text{общ.}}$ - аналитичен внутри многоугольника M и имеет ровно один простой полюс где-либо на границе M. Наш нормированный инвариант с простым полюсом в вершине b_n и указанными свойствами коэффициентов A_{-1}, A_0 получается из $\mathcal{J}_{M,\text{общ.}}$ дробно-линейным преобразованием $(\alpha\mathcal{J}+\beta)(\gamma\mathcal{J}+\delta)^{-1}$ из $PSL(2,\mathbb{R})$. Однако, как мы уже знаем, такая свобода выбора дробно-линейного преобразования у нас есть, что приводит к закреплению трех особых точек $a_n=\infty$ и, например, a_{n-1}, a_1 - образов в полуплоскости P вершин многоугольника M b_n, b_{n-1}, b_1 при отображении $\mathcal{J}(z)$, обратном к $z(\mathcal{J})$ из (I). Мы будем считать теперь, что $\mathcal{J}_M(z)$ обладает свойствами (8), (9), а в качестве A_0 выберем немного позднее удобное для нас число.

Вернемся к уравнению (I) для отображающей функции $z(\mathcal{J})$. В выражении (2) для функции $Q_M(\mathcal{J})$ можно явно учесть соотношения (5) для $C_k, a_k (\alpha_j = 0)$. В результате получится выражение $(b_n = i\infty)$

$$Q_M(\mathcal{J})=\prod_{K=1}^{n-1}(\mathcal{J}-a_K)^{-1}\left[E_{n-3}(\mathcal{J})+\sum_{K=1}^{n-1}\mathcal{N}_K(\mathcal{J}-a_K)^{-1}\right] \tag{10}$$

причем

$$\mathcal{N}_K=1/2\prod_{\ell=1}^{n-1}(a_K=a_\ell),$$

где штрих означает, что произведение берется по всем указанным ℓ, кроме $\ell=K$. В формуле (10) $E_{n-3}(\mathcal{J})$ - многочлен степени $n=3$, $E_{n-3}(\mathcal{J})=\sum_{K=0}^{n-3}X_K\mathcal{J}^K$, кроме этого известно, что $X_{n-3}=1/2$. Вопрос состоит в отыскании оставшихся $n-3$ коэффициентов X_K (акцессорных коэффициентов) как функций от $a_1,a_2,\dots,a_{n-3}$. Мы считаем, разумеется, что $n>3$, так как уравнение для функций треугольника не содержит акцессорных параметров.

Приведем теперь точные формулы для коэффициентов X_K, $K=0,1,\dots,n-4$, полученные в теореме I [I]. Введем обозначения: $\prod_{K=1}^{n-1}(\mathcal{J}-a_K)=\sum_{K=0}^{n-1}B_K\mathcal{J}^K$, $\mathcal{J}=\mathcal{J}(z)$. Очевидно $B_{n-1}=1$. Кроме этого положим:

$$\Phi_p(\tau)=\sum_{\substack{t_1+t_2+\dots+t_p+s_1+\dots+s_4=\tau\\ -1\leqslant t_1,\dots,t_p,s_1,\dots,s_4<\infty}}A_{t_1}A_{t_2}\dots A_{t_p}A_{s_1}A_{s_2}A_{s_3}A_{s_4}s_1s_2s_3s_4$$

$$\Psi(\tau)=\sum_{K=0}^{n-1}B_K\sum_{\substack{\ell_1+\dots+\ell_K+m_1+m_2=\tau\\ -1\leqslant\ell_1,\dots,\ell_K,m_1,m_2<\infty}}A_{\ell_1}A_{\ell_2}\dots A_{\ell_K}A_{m_1}A_{m_2}m_1^2m_2(3/2m_2-m_1), \tag{11}$$

где все индексы целые числа. A_K - коэффициент Фурье инварианта (8), определяемого по данному решению уравнения (I). В формуле (II) будем считать, что индексы p и τ пробегают следующие значения $4\leqslant-\tau\leqslant n+1$, $0\leqslant p\leqslant n-3$. Как показано в [I] квадратная матрица $\{\Phi_p(\tau)\}$ обратима и треугольна. $\{\Phi_p(\tau)\}^{-1}=\{\eta_p(\tau)\}$ Для акцессорных коэффициентов X_p, $0\leqslant p\leqslant n-4$ справедлива формула

$$X_p=\sum_{\tau=-4}^{-n-1}\eta_p(\tau)\Psi(\tau) \tag{12}$$

Далее, в теореме 3 [I] доказано следующее важное утверждение:

$$A_{-1}^{-1}\,\mathrm{Im}\,\mathcal{J}_M(z) = -2\pi \lim_{s\to 1+0} \mathrm{Im}\,F_1(z;s), \tag{13}$$

где $F_\ell(z;s)=F_\ell(z;s;\Gamma_M)$ – ряд Зигеля-Сельберга

$$F_\ell(z;s)=\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\setminus\Gamma_M}(\exp 2\pi i\ell x(\gamma z))\sqrt{y(\gamma z)}\,I_{s-1/2}(2\pi|\ell|y(\gamma z)), \tag{14}$$

абсолютно сходящийся при $\mathrm{Re}\,s>1$. В этом выражении $\ell\in\mathbb{Z}, \ell\neq 0$, $z=\mathrm{Re}\,z+i\,\mathrm{Im}\,z=x(z)+iy(z), \Gamma_\infty\subset\Gamma_M, \Gamma_\infty$ параболическая подгруппа, циклически порожденная образующей $S_n: z\to z+1$, $I_s(z)$ – функция Бесселя мнимого аргумента. В дальнейшем у нас появится и обычная функция Бесселя $\mathcal{J}_s(z)$. К сожалению, стандартное обозначение для нее совпадает со стандартным обозначением $\mathcal{J}_M(z)$ инварианта Клейна (не путать также с мнимой частью Im!). Я надеюсь, читатель будет различать эти обозначения, исходя из контекста.

Теперь мы окончательно нормируем инвариант Клейна (8) наложением условия (9) и выбором постоянного члена A_0 (относительно группы Γ_∞, разумеется). Именно, мы будем считать его равным постоянному члену функции:

$$-2\pi \lim_{s\to 1+0} F_1(z;s)$$

В силу вещественности коэффициентов Фурье A_K и формулы (13) мы получаем, что полностью нормированный инвариант Клейна $\mathcal{J}_M(z)$ равен:

$$\mathcal{J}_M(z) = -2\pi \lim_{s\to 1+0} F_1(z;s;\Gamma_M) \tag{15}$$

Вернемся теперь к основной задаче о выражении акцессорных коэффициентов X_K как функций от a_j. Для этого, на первом этапе, в соответствии с формулами (12), (15), мы найдем относительно простое геометрическое выражение для коэффициентов Фурье A_K как функций вершин b_j. Затем аналогичное выражение будет найдено для особых точек a_K уравнения (3). Сопоставление полученных результатов на третьем этапе должно привести к искомым формулам для X_K, как функций от a_j. В этой работе мы проделаем первые два этапа. На третьем этапе мы ограничимся лишь не очень строгим рассмотрением примера четырехугольника (т.е. первого нетривиального случая), который послужит иллюстрацией нашего подхода к этой задаче.

Начнем с вывода формул для коэффициентов Фурье A_K нормированного инварианта (15). Частично эта работа проделана в теореме 4 [1]. Очевидно задача сводится к вычислению коэффициентов

Фурье ряда Зигеля-Сельберга относительно подгруппы Γ_∞. Заметим здесь, что для вывода формул для особых точек a_K на втором этапе нам понадобятся разложения Фурье $F_1(z;s;\Gamma_M)$ относительно других параболических подгрупп группы Γ_M. Поэтому сейчас мы сформулируем общую теорему о таких разложениях. Эта теорема обобщает результаты работ [4], [5], в которых рассмотрена ситуация группы с одной параболической вершиной фундаментальной области. Мы не будем приводить доказательство теоремы, поскольку оно весьма техническое. Метод доказательства обобщает метод теоремы I [4] и теоремы 3.I.2 [6], в которой вычисляются коэффициенты Фурье рядов Эйзенштейна-Мааса для общих фуксовых групп с n параболическими вершинами.

Для $K=1,2,\dots,n$ определим подгруппу $\Gamma_K\subset\Gamma_M$, стабилизирующую вершину $M\,b_K$. Очевидно $\Gamma_n=\Gamma_\infty$. Каждая вершина b_K является параболической вершиной фундаментальной области F_M и никакие две $b_K, b_{K'}$ не являются эквивалентными. Все множество $b_K, K=1,\dots,n$ является полным множеством попарно неэквивалентных представителей параболических вершин области Γ_M. Введем набор $g_K\in PSL(2,\mathbb{R}), K=1,\dots,n$ таких, что $b_K=g_K\infty=g_K b_n$ и $g_K\Gamma_\infty g_K^{-1}=\Gamma_K$. Можно считать $g_n=E$ - единице группы. В обозначениях формулы (I4) введем общий ряд Эйзенштейна-Мааса:

$$E_K(z;s;\Gamma_M)=\sum_{\gamma\in\Gamma_K\setminus\Gamma_M} y^s(g_K^{-1}\gamma z) \tag{I6}$$

абсолютно сходящийся при $\operatorname{Re}s>1$.

ТЕОРЕМА I. Справедливы разложения Фурье:

$$F_\ell(g_K z;s;\Gamma_M)=\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i x m}\, b_m(y;\ell;K;s;\Gamma_M),\ z=x+iy$$

$$E_\alpha(g_K z;s;\Gamma_M)=\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i x m}\, a_m(y;\alpha;K;s;\Gamma_M),\ z=x+iy,$$

при этом для коэффициентов Фурье имеют место формулы: $(\operatorname{Re}s>1)$

I) Для ряда Зигеля Сельберга:

а) $m\neq 0,\ \ell\neq m\ (m,\ell\in\mathbb{Z}),\ K=1,2,\dots,n$

$$b_m(y;\ell;K;s;\Gamma_M)=2\sqrt{y}\,K_{s-1/2}(2\pi|m|y)\sum_{\substack{c>0\\ \gamma\in\Gamma_\infty\setminus\Gamma_M/\Gamma_K}} c^{-1}S_K(-m,-\ell;c)\,M_{2s-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{-m\ell}}{c}\right) \tag{I7}$$

где

$$M_{2s-1}(a\sqrt{-m\ell})=\begin{cases} I_{2s-1}(a\sqrt{|m\ell|}),\ m\ell<0 \\ J_{2s-1}(a\sqrt{m\ell}),\ m\ell>0 \end{cases}$$

γ пробегает множество всех представителей по одному из каждого класса и $\gamma\notin\Gamma_\infty$ (для $\kappa=n$). В этих формулах, кроме указанных ранее, приняты обозначения: $K_s(z)$ – модифицированная функция Бесселя, $S_\kappa(m,\ell;c)$ – общая сумма Клостермана:

$$S_\kappa(m,\ell;c)=\sum_{0\leqslant d<c} \exp\frac{2\pi i}{c}(ma+\ell d), \qquad (18)$$

где $\gamma g_\kappa z=(az+b)(cz+d)^{-1}$, γ берется в классе $\Gamma_\infty\backslash\Gamma_M/\Gamma_\kappa$, сумма однозначно определяется матричным элементом $c=c(\gamma g_\kappa)$ и параметрами $m.\ell$.

в) $m=\ell\neq 0\,(m,\ell\in\mathbb{Z}),\ \kappa=1,2,\dots,n$

$b_m(y;m;\kappa;s;\Gamma_M)$ равно правой части равенства (17) для $m=\ell$ плюс $\delta_{\kappa n}\sqrt{y}\,I_{s-1/2}(2\pi|m|y)$, где $\delta_{\kappa n}$ – символ Кронекера (напомним, n -ая вершина многоугольника лежит в бесконечности)

с) $m=0,\ \ell\in\mathbb{Z},\ \kappa=1,\dots,n\quad(\ell\neq 0)$

$$b_0(y;\ell;\kappa;s;\Gamma_M)=\varphi(-\ell;\kappa;s;\Gamma_M)\,\frac{y^{1-s}}{2s-1},$$

где $\varphi(\ell;\kappa;s;\Gamma_M)$ определена в пункте 2) теоремы и тесно связана с ℓ -м коэффициентом Фурье ряда Эйзенштейна-Мааса.

2)а) $m\neq 0\ (m\in\mathbb{Z});\ \alpha=1,2,\dots,n;\ \kappa=1,2,\dots,n$

$$a_m(y;\alpha;\kappa;s;\Gamma_M)=\sqrt{y}\,K_{s-1/2}(2\pi|m|y)\,\varphi_\alpha(m;\kappa;s;\Gamma_M)$$

$$\varphi_\alpha(m;\kappa;s;\Gamma_M)=2\pi^s|m|^{s-1/2}\,\Gamma(s)^{-1}\,\eta(m;\alpha;\kappa;s;\Gamma_M) \qquad (19)$$

$$\eta(m;\alpha;\kappa;s;\Gamma_M)=\sum_{\substack{c>0\\ \gamma\in\Gamma_\alpha\backslash\Gamma_M/\Gamma_\kappa}} \frac{1}{|c|^{2s}}\,S_{\alpha\kappa}(0,m;c)$$

$$\varphi_n(m;\kappa;s;\Gamma_M)=\varphi(m;\kappa;s;\Gamma_M) \quad \text{из 1)}$$

в этих формулах $\Gamma(s)$ – функция Эйлера, $S_{\alpha\kappa}(m,\ell;c)$ – еще более общая сумма Клостермана, чем в 1), которая формально определяется правой частью (18), но с $g_\alpha^{-1}\gamma g_\kappa z=(az+b)(cz+d)^{-1}$; сумма (конечная) однозначно определяется матричным элементом $c=c(g_\alpha^{-1}\gamma g_\kappa)$

и параметрами m, ℓ. $S_{nn}(m,\ell;c)=S_n(m,\ell;c)$. В (I9) γ пробегает множество всех представителей по одному из каждого класса и $\gamma\notin\Gamma_\infty$ (для $\alpha=\kappa=n$)

в) $m=0$; $\alpha=1,\ldots,n$; $\kappa=1,\ldots,n$

$$a_0(y;\alpha;\kappa;s;\Gamma_M)=\delta_{\alpha\kappa}y^s+\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-1/2)\Gamma(s)^{-1}\eta_0(\alpha;\kappa;s;\Gamma_M)$$

$$\eta_0(\alpha;\kappa;s;\Gamma_M)=\sum_{\substack{c>0\\ \gamma\in\Gamma_\alpha\setminus\Gamma_M/\Gamma_\kappa}}\frac{1}{|c|^{2s}}S_{\alpha\kappa}(0,0;c)$$

$\delta_{\alpha\kappa}$ - символ Кронекера, остальные обозначения см в 2)а).

Этим формулировка теоремы I заканчивается.

Из теоремы I (утверждение I) $\kappa=n$) и формулы (I5), по аналогии с доказательством теоремы 4 [I] , получаем:

ТЕОРЕМА 2. Справедливы следующие формулы для коэффициентов Фурье (относительно Γ_∞) нормированного инварианта Клейна $J_M(z)$.

$$A_\kappa=\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}\sum_{c>0}c^{-1}\left\{S_n(-\kappa,1;c)I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{\kappa}}{c}\right)-S_n(-\kappa,-1;c)J_1\left(\frac{4\pi\sqrt{\kappa}}{c}\right)\right\}+\delta_{\kappa 1}$$

$\kappa\geqslant 1$, $\gamma z=(az+b)(cz+d)^{-1}$, γ пробегает множество всех представителей из $\Gamma_\infty\setminus\Gamma_M/\Gamma_\infty$, $\gamma\notin\Gamma_\infty$, по одному из каждого двойного класса.

Снова также как в работе [I] , привлекая формулу Римана-Роха и разложения Фурье для рядов Пуанкаре, получаем уточнение теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. В обозначениях теоремы 2 имеем:

$$A_\kappa=\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}\sum_{c>0}c^{-1}S_n(-\kappa,1;c)I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{\kappa}}{c}\right),\ \kappa\in\mathbb{Z},\ \kappa\geqslant 1$$

Для завершения вычисления коэффициентов Фурье A_κ инварианта $J_M(z)$ из (I5) осталось рассмотреть постоянный член

ТЕОРЕМА 4. В обозначениях теорем I, 2 имеем:

$$A_0=-4\pi^2\sum_{c>0}c^{-2}S_n(0,-1;c)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно воспользоваться утверждением I)с) теоремы I, полагая $\ell=1$, $\kappa=n$, $s=1$, и утверждением 2)а) той же теоремы. Доказательство закончено.

Сходимость рядов из теорем 2, 3, 4 оправдывается так же как сходимость классических рядов Пуанкаре веса 2.

Получим теперь аналогичные формулы для особых точек a_κ, $\kappa=1,2,\ldots,n-1$ уравнения (3). Напомним, что положение точек a_1, a_{n-1}, a_n

фиксировано условиями нормировки инварианта $J_M(z)$ из (I5).

По определению: $a_K = J_M(b_K)$. Из теоремы I и формулы (I5) следует, что значения $J_M(b_K)$ определяются только постоянными членами соответствующих разложений Фурье, так как остальные коэффициенты Фурье экспоненциально убывают при приближении z к b_K. Точнее, для $K=1,\dots,n-1$, имеем:

$$
\begin{aligned}
J_M(b_K) &= -2\pi F_1(b_K;1;\Gamma_M) = -2\pi F_1(g_K\infty;1;\Gamma_M) = \\
&= -2\pi\varphi(-1;K;1;\Gamma_M) = -4\pi^2\eta(-1;n;K;1;\Gamma_M) = \\
&= -4\pi^2 \sum_{\substack{c>0 \\ \gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_M/\Gamma_K}} \frac{1}{c^2} S_{nK}(0,-1;c)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Мы доказали теорему:

ТЕОРЕМА 5. Для особых точек $a_K, K=1,2,\dots,n-1$, уравнения (3) (соответствующих нормированному инварианту $J_M(z)$ из (I5)) справедлива формула:

$$
a_K = -4\pi^2 \sum_{\substack{c>0 \\ \gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_M/\Gamma_K}} \frac{1}{c^2} S_{nK}(0,-1;c)
$$

где как и ранее, $\gamma g_K z = (az+b)(cz+d)^{-1}$, сумма S_{nK} определена в теореме I.

В заключение работы рассмотрим пример $n=4$, т.е. M -четырехугольник. Как было видно из постановки задачи, M можно считать нормированным. Он задается четырьмя вершинами $b_1=0, b_2=b$, $b_3=1/2$, $b_4=i\infty$ (напомним, что все внутренние углы - нулевые). Далее, поскольку $n=4$, то есть только один акцессорный параметр X_0, который следующим образом выражается через коэффициенты Фурье нормированного инварианта $J_M(z)$ (см.формулы (8), (I5), (II), (I2)): $0\leq p\leq 1, -5\leq r\leq -4, A_{-1}=1, X_1=1/2, a_4=\infty$

$$X_0\Phi_0(-5)+X_1\Phi_1(-5)=\Psi(-5)$$

$$X_0\Phi_0(-4)+X_1\Phi_1(-4)=\Psi(-4),$$

где $\Phi_0(-5)=0, \Phi_0(-4)=1, \Phi_1(-4)=A_0$. Кроме этого $\Psi(-4)=B_2\,1/2+3/2\,B_3A_0$, $B_3=1$, $B_2=-a_1-a_2-a_3$ Окончательно:

$$X_0 = A_0 - \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3) \tag{21}$$

Таким образом, в сумму для X_0 (21) входит только постоянный член разложения Фурье. И задача, которую мы должны решить состоит в том, чтобы выразить A_0 как функцию a_2. Имеем (см.теоремы 4, 5)

$$A_0 = -4\pi^2 \sum_{\substack{c>0 \\ \Gamma_\infty \backslash \Gamma_M / \Gamma_\infty}} c^{-2} S_4(0,-1;c), \quad a_2 = -4\pi^2 \sum_{\substack{c>0 \\ \Gamma_\infty \backslash \Gamma_M / \Gamma_2}} c^{-2} S_{42}(0,-1;c) \tag{22}$$

Нетрудно видеть, что $A_0 = A_0(b)$, $a_2 = a_2(b)$ – т.е., являются функциями от одной переменной (координаты вершины b_2, M) деформации группы Γ_M. Более того, есть основание ожидать, что A_0, a_2- вещественно-аналитические функции b. Однако, это далеко не очевидный вопрос, который требует специального рассмотрения. В частности, в связи с ним возникает другой вопрос о малых собственных значениях Γ_M -автоморфного лапласиана. Но если предположить сейчас вещественную аналитичность $A_0(b)$, $a_2(b)$, то, по крайней мере на принципиальном уровне, искомая формула для A_0 получается таким образом. Имеем:

$$A_0(b) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k b^k, \quad a_2(b) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k b^k \tag{23}$$

Обращая второе равенство (23), формально получаем: $b = \sum_{k=0}^{\infty} (a_2 - c)^k \tilde{p}_k$, $c = \mathrm{const}$, где коэффициенты $\tilde{p}_k$ последовательно определяются по p_k. И, наконец, получаем искомую формулу:

$$A_0 = \tilde{A}_0(a_2) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \Big(\sum_{\ell=0}^{\infty} (a_2 - c)^\ell \tilde{p}_\ell\Big)^k = \sum_{\tau=0}^{\infty} m_\tau a_2^\tau$$

Литература

1. В е н к о в А.Б. О точных формулах для акцессорных коэффициентов в уравнении Шварца. – Функц.анализ и его прил., 1983, № 2.
2. P o i n c a r é H. Sur les groupes des équations lineares – Acta Math., 1884, v.4, p.201-312.
3. Ф о к В.А. О конформном изображении четырехугольника с нулевыми углами на полуплоскости. – Л., Ж.Физ.-матем.о-ва, 1927,

№ I, с.I47-I68.
4. N i e b u r D. A class of nonanalytic automorphic functions. - Nagoya Math. J., 1973, v.52, p.133-145.
5. F a y J.D. Fourier coefficients of the resolvent for a Fuchsian group - J.Reine Angew.Math., 1977, v.293/294, p.143-203.
6. В е н к о в А.Б. Спектральная теория автоморфных функций. Тр.Мат.ин-та АН СССР, I98I, т.I53, с.I-I7I.

Venkov A.B. On accessory coefficients of second order Fuchsian equation with real singular points.

In the paper the author considers equations of Fuchs and Schwarz connected with a conformal mapping of the half-plane onto curvilinear polygon. The equations are studied from point of view of spectral theory of automorphic functions. A monodromy group is supposed to be a special Fuchsian group. The main question investigated in the paper (following Poincaré) is the problem of finding the accessory coefficients as functions of singular points of Fuchsian equation. The principal results of the paper are following ones. In addition to another paper of the author "On explicit formulas for accessory coefficients in Schwarz equation", Functional analysis and its appl., 1983, N 2, in this paper the Fourier expansions of Siegel-Selberg series with relation to parabolic subgroups of monodromy group are studied (theorem 1). From here the author receives the formulas for all Fourier coefficients of Klein invariant (theorems 3, 4) and the formulas for singular points of Fuchs equation in geometric terms of generating polygon (theorem 5). In conclution, the example of quadrangle is given for which the problem of funding the accessory parameters is simplified.