Н. Г. Мощевитин, О наилучших двумерных совместных диофантовых приближениях в sup-норме, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, номер 6, 50–53

# Краткие сообщения

УДК 511

## О НАИЛУЧШИХ ДВУМЕРНЫХ СОВМЕСТНЫХ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ В sup-НОРМЕ

**Н. Г. Мощевитин**

**1. Обозначения и формулировка.** Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. Через $\dim_{\mathbb{Z}}\alpha$ будем обозначать максимальное количество линейно независимых над $\mathbb{Z}$ чисел из набора $1, \alpha_1, \alpha_2$. Пусть $\|\cdot\|$ — расстояние до ближайшего целого. Для целого $q$ положим $\|q\alpha_j\| = |q\alpha_j - a_j|$, $\xi(q) = (q\alpha_1 - a_1, q\alpha_2 - a_2) \in \mathbb{R}^2$. Через $|\cdot|$ будем обозначать sup-норму в $\mathbb{R}^2$, так что для $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ выполнено равенство $|\eta| = \max_{j=1,2} |\eta_j|$.

Наилучшим совместным приближением к набору $\alpha$ называется целая точка $\zeta = (q, a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^3$, $q \geqslant 1$, такая, что неравенство

$$|\xi(q)| = \max_{j=1,2} |q\alpha_j - a_j| < \max_{j=1,2} |p\alpha_j - b_j|$$

выполняется для всех целых точек $(p, b_1, b_2)$, таких, что $1 \leqslant p < q$ или $p = q$, $(b_1, b_2) \neq (a_1, a_2)$.

Если $\dim_{\mathbb{Z}}\alpha \geqslant 2$, то все наилучшие приближения $\alpha$ можно расположить в виде бесконечной последовательности $(q_\nu, a_{1,\nu}, a_{2,\nu})$, $\nu = 1, 2, \ldots$, так, что $q_1 < \ldots < q_\nu < q_{\nu+1} < \ldots$, и если $\xi(q_\nu) = \xi_\nu$, то $|\xi_1| > \ldots > |\xi_\nu| > |\xi_{\nu+1}| > \ldots$.

Рассмотрим величину $g(\alpha) = \liminf_{\nu\to\infty} (q_\nu)^{1/\nu}$. Из теории цепных дробей известно, что если $\dim_{\mathbb{Z}}\alpha = 2$, то $g(\alpha) \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. В [1] Дж. Лагариас получил в случае $\dim_{\mathbb{Z}}\alpha = 3$ оценку

$$g(\alpha) \geqslant \theta = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1{,}2720^+.$$

Мы же в настоящей заметке несколько усилим эту оценку и докажем следующий результат.

**Теорема.** *В случае* $\dim_{\mathbb{Z}}\alpha = 3$ *выполнено*

$$g(\alpha) \geqslant \theta \left(\frac{8+13\theta}{\theta^{13}}\right)^{\frac{1}{11}} = 1{,}28040^+.$$

**Замечание.** Оценка сформулированной теоремы может быть улучшена (в пятом знаке после запятой), однако, по-видимому, такого рода результат уже не представляет интереса.

**2. Вспомогательные утверждения.** Всюду ниже считаем, что $\dim_{\mathbb{Z}}\alpha = 3$.

**Лемма 1.** *Для каждого* $\nu$ *выполняется* $|\xi_{\nu+12}| \leqslant \frac{|\xi_\nu|}{2}$.

**Доказательство.** Пусть $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$. Разобьем замкнутый квадрат $|\eta| \leqslant |\xi_\nu|$ на 16 меньших замкнутых квадратиков со стороной $|\xi_\nu|/2$, разделив каждую из сторон исходного квадрата на 4 части. Обозначим через $E_1, E_2, E_3, E_4$ те из маленьких квадратиков, которые в качестве одной из вершин имеют центр исходного квадрата $|\eta| \leqslant |\xi_\nu|$.

Если при некотором $j \in 1, 2, \ldots, 12$ оказалось, что $\xi_{\nu+j} \in \cup_{i=1}^4 E_i$, то лемма доказана.

Если же это не так, то получим противоречие. Действительно, в этом случае тринадцать векторов $\xi_{\nu+j}, j \in \{0, 1, 2, \ldots, 12\}$, попали в объединение двенадцати оставшихся квадратиков со стороной $|\xi_\nu|/2$. Следовательно, для некоторых $0 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant 12$ выполнено неравенство $|\xi_{\nu+j_2} - \xi_{\nu+j_1}| < \xi_\nu/2$ и $0 < q = q_{\nu+j_2} - q_{\nu+j_1} < q_{\nu+j_2} \leqslant q_{\nu+12}$. Таким образом, $|\xi(q)| < |\xi_\nu|/2$ и $q < q_{\nu+12}$. Теперь из последних двух соотношений и определения наилучших приближений получаем $|\xi_{\nu+12}| < |\xi_\nu|/2$, что противоречит сделанному предположению. Лемма 1 доказана.

Следующая лемма мгновенно следует из леммы К. Роджерса [2] (см. также теорему 1 из работы автора [3, с. 732]).

**Лемма 2.** *При каждом* $\nu$, *таком, что*

$$|\xi_\nu| < 1/4, \tag{1}$$

*выполнено неравенство* $|\xi_\nu - \xi_{\nu+1}| > |\xi_\nu|$.

**Доказательство.** Теорема 1 из работы автора [3, с. 732], в частности, утверждает, что $|\xi_\nu - \xi_{\nu+1}| \geqslant |\xi_\nu|$. Покажем, что в нашем случае знак равенства невозможен. Действительно, предположив, что имеет место равенство, получаем либо

$$(q_\nu - q_{\nu+1})\alpha_i + A = \pm q_\nu \alpha_j + B, \quad i \neq j, \ A, B \in \mathbb{Z},$$

что противоречит линейной независимости над $\mathbb{Z}$ чисел $1, \alpha_1, \alpha_2$, либо

$$(q_\nu - q_{\nu+1})\alpha_i + A = \pm q_\nu \alpha_i + B, \quad A, B \in \mathbb{Z}.$$

В последнем случае из иррациональности $\alpha_i$ следует, что $q_{\nu+1} = 2q_\nu$. Но тогда в силу условия (1) будет выполнено $\|q_{\nu+1}\alpha_j\| = 2\|q_\nu \alpha_j\|$, т.е. $|\xi_{\nu+1}| = 2|\xi_\nu|$, что противоречит определению наилучшего приближения. Лемма доказана.

Отметим, что неравенство (1) выполнено для всех значений $\nu$, кроме, быть может, конечного числа. Следующее утверждение доказано Лагариасом (см. [1, с. 551, теорема 3.1 и с. 554, ф-ла (3.25)]).

**Лемма 3.** *При каждом $\nu$ выполняется $q_{\nu+4} \geqslant q_\nu + q_{\nu+2}$, причем если*

$$q_{\nu+3} < q_\nu + q_{\nu+1}, \tag{2}$$

*то*

$$q_{\nu+3} - q_{\nu+2} = q_{\nu+1} - q_\nu. \tag{3}$$

*Более того, неравенство (2) не может быть выполнено для двух последовательных значений $\nu$.*

**Замечание.** Из определения наилучших приближений очевидно вытекает, что если выполнено равенство (3), то выполнено и векторное равенство

$$\xi_{\nu+3} - \xi_{\nu+2} = \xi_{\nu+1} - \xi_\nu. \tag{4}$$

**Лемма 4.** *Пусть $\nu_0$ таково, что для него имеет место соотношение (2). Тогда найдется $\nu$, такое, что $\nu_0 + 1 \leqslant \nu \leqslant \nu_0 + 9$ и одновременно*

$$q_{\nu+3} \geqslant q_\nu + q_{\nu+1}, \quad q_{\nu+4} \geqslant q_{\nu+1} + q_{\nu+2}. \tag{5}$$

**Доказательство.** Предположим противное: утверждение леммы 4 не выполнено при $\nu_0$, удовлетворяющем указанному соотношению. Тогда из леммы 3 (с учетом замечания к ней) получаем, что неравенство (2), а значит, и векторное равенство (4) выполнены для значений индексов $\nu_0, \nu_0+2, \ldots, \nu_0+10$. Теперь, с одной стороны, из леммы 3 вытекает равенство

$$|\xi_{\nu_0+13} - \xi_{\nu_0+12}| = |\xi_{\nu_0+1} - \xi_{\nu_0}|.$$

С другой стороны, по лемме 1 имеем

$$|\xi_{\nu_0+13} - \xi_{\nu_0+12}| \leqslant 2|\xi_{\nu_0+12}| \leqslant |\xi_{\nu_0}|,$$

а по лемме 2 имеем $|\xi_{\nu_0+1} - \xi_{\nu_0}| > |\xi_{\nu_0}|$. Последние три соотношения противоречивы. Лемма 4 доказана.

**3. Доказательство теоремы.** Из лемм 3 и 4 следует, что если рассмотреть строго возрастающую последовательность $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k, \ldots$ всех тех значений $\nu$, для которых одновременно выполнены неравенства (5), то эта последовательность будет удовлетворять условию

$$\nu_{k+1} \leqslant \nu_k + 11. \tag{6}$$

Отметим, что из определения $\nu_k$ следует

$$\nu_{k+1} \neq \nu_k + 2, \ \forall k. \tag{7}$$

Предположим, что для некоторого $k$ имеет место оценка

$$q_{\nu_k+i} \geqslant \gamma\theta^{\nu_k+i} \ \text{при } i = 0, 1, 2, \tag{8}$$

и разберем несколько случаев.

Случай 1. Значение индекса $k$ таково, что $\nu_{k+1} \geqslant \nu_k + 3$. Тогда при $\nu = \nu_k, \nu_k + 1$ будет выполнено $q_{\nu+3} \geqslant q_{\nu+1} + q_\nu$, а при $\nu_k + 2 \leqslant \nu \leqslant \nu_{k+1} - 1$, согласно лемме 3, заведомо выполнено $q_{\nu+3} \geqslant q_{\nu+1} + q_{\nu-1}$.

Применяя указанные рекуррентные неравенства, получаем

$$q_{\nu_k+j} \geqslant \gamma\lambda_j\theta^{\nu_k}, \quad 3 \leqslant j \leqslant \nu_{k+1} - \nu_k + 2,$$

где $\lambda_{2l} = F_l + F_{l+1}\theta$, $\lambda_{2l+1} = F_l\theta + F_{l+1}\theta^2$, а $F_0 = F_1 = 1$, $F_t = F_{t-1} + F_{t-2}$ — числа Фибоначчи. Простой подсчет показывает, что при каждом $\nu$ имеет место равенство

$$\min_{j:\, \nu+3\leqslant j\leqslant \nu+11} \min_{i=0,1,2} \left(\frac{\lambda_{j+i}}{\theta^{j+i}}\right)^{\frac{1}{j-\nu}} = \theta_1 = \left(\frac{\lambda_{10}}{\theta^{13}}\right)^{\frac{1}{11}} = \left(\frac{8+13\theta}{\theta^{13}}\right)^{\frac{1}{11}}. \tag{9}$$

Таким образом, в первом случае из неравенств (8) с $\nu = \nu_k$ получаются следующие неравенства с $\nu = \nu_{k+1}$:

$$q_{\nu_{k+1}+i} \geqslant \gamma\theta^{\nu_{k+1}+i}\theta_1^{\nu_{k+1}-\nu_k} \quad \text{при } i = 0, 1, 2. \tag{10}$$

Отметим, что в рассмотренном нами случае наборы индексов, фигурирующие в формулах (8), (10), не пересекаются.

Случай 2. Значение индекса $k$ таково, что $\nu_{k+1} = \nu_k + 1$. Здесь надо рассмотреть несколько подслучаев: $\nu_{k+2} \geqslant \nu_{k+1} + 3$ (назовем этот случай 2.1) и $\nu_{k+2} = \nu_{k+1} + 1$ (назовем этот случай 2.2).

Рассмотрим случай 2.1. Если $\nu_{k+2} \geqslant \nu_{k+1} + 3$, то при $\nu_{k+2} \leqslant \nu_{k+1} + 10$ вычисления (аналогичные проведенным в случае 1) показывают, что из (8) следуют соотношения

$$q_{\nu_{k+2}+i} \geqslant \gamma\theta^{\nu_{k+2}+i}\theta_1^{\nu_{k+2}-\nu_k} \quad \text{при } i = 0, 1, 2, \tag{11}$$

где $\theta_1$ определено в формуле (9). Если же

$$\nu_{k+2} = \nu_{k+1} + 11 = \nu_k + 12, \tag{12}$$

то сразу получить желаемый результат не удается, поскольку наименьший увеличивающий множитель $\theta_2 = \left(\frac{8+13\theta}{\theta^{13}}\right)^{\frac{1}{12}} < \theta_1$ окажется в выражении $q_{\nu_k+14} = q_{\nu_{k+2}+2} \geqslant \gamma\theta^{\nu_k+14}\theta_2^{12}$, причем улучшить оценку нельзя. Чтобы получить желаемый нами результат в случае (12), следует рассмотреть значение индекса $\nu_{k+3}$, если $\nu_{k+3} \geqslant \nu_{k+2} + 3$ (назовем эту возможность 2.1.1), и $\nu_{k+4}$ (или даже $\nu_{k+5}$), если $\nu_{k+3} = \nu_{k+2} + 1$ (назовем эту возможность 2.1.2).

В случае 2.1.1 вычисления величин $\lambda_j^{(1)}$, для которых $q_{\nu_k+j} \geqslant \gamma\lambda_j^{(1)}\theta^{\nu_k}$, $15 \leqslant j \leqslant \nu_{k+3} - \nu_k + 2$, показывают, что

$$\min_{j:\, \nu+15\leqslant j\leqslant \nu+23} \min_{i=0,1,2} \left(\frac{\lambda_{j+i}^{(1)}}{\theta^{j+i}}\right)^{\frac{1}{j-\nu}} = \left(\frac{40+104\theta+129\theta^2}{\theta^{24}}\right)^{\frac{1}{23}} > \theta_1.$$

Таким образом, в случае 2.1.1 получаем

$$q_{\nu_{k+3}+i} \geqslant \gamma\theta^{\nu_{k+3}+i}\theta_1^{\nu_{k+3}-\nu_k} \quad \text{при } i = 0, 1, 2. \tag{13}$$

Рассмотрим случай 2.1.2. Здесь тоже рассмотрим две альтернативы: $\nu_{k+4} \geqslant \nu_{k+3} + 3$ (этот случай назовем 2.1.2.1) и $\nu_{k+4} = \nu_{k+3} + 1$ (случай 2.1.2.2). В случае 2.1.2.1 получаем, что для величин $\lambda_j^{(2)}$, которые стоят в неравенствах $q_{\nu_k+j} \geqslant \gamma\lambda_j^{(2)}\theta^{\nu_k}$, $16 \leqslant j \leqslant \nu_{k+4} - \nu_k + 3$, выполнено

$$\min_{j:\, \nu+16\leqslant j\leqslant \nu+24} \min_{i=0,1,2} \left(\frac{\lambda_{j+i}^{(2)}}{\theta^{j+i}}\right)^{\frac{1}{j-\nu}} = \left(\frac{64+168\theta+209\theta^2}{\theta^{26}}\right)^{\frac{1}{24}} > \theta_1.$$

Таким образом, в случае 2.1.2.1 имеют место соотношения

$$q_{\nu_{k+4}+i} \geqslant \gamma\theta^{\nu_{k+4}+i}\theta_1^{\nu_{k+4}-\nu_k} \quad \text{при } i = 0, 1, 2. \tag{14}$$

Далее, проводя вычисления в случае 2.1.2.2, получаем, что две альтернативы рассматривать нет необходимости и при *любом* значении $\nu_{k+5}$ из интервала $1 \leqslant \nu_{k+5} \leqslant 11$ достаточно получающихся неравенств

$$q_{\nu_k+j} \geqslant \gamma\lambda_j^{(3)}\theta^{\nu_k}, \quad 15 \leqslant j \leqslant \nu_{k+5} - \nu_k + 2,$$

где

$$\min_{j:\,\nu+15\leqslant j\leqslant\nu+25}\ \min_{i=0,1,2}\left(\frac{\lambda_{j+i}^{(3)}}{\theta^{j+i}}\right)^{\frac{1}{j-\nu}} = \left(\frac{104+233\theta+273\theta^2}{\theta^{27}}\right)^{\frac{1}{25}} > \theta_1.$$

Итак, в случае 2.1.2.2 выполнено

$$q_{\nu_{k+5}+i} \geqslant \gamma\theta^{\nu_{k+4}+i}\theta_1^{\nu_{k+5}-\nu_k} \quad \text{при } i = 0,1,2. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь случай 2.2. Здесь $\nu_{k+2} = \nu_{k+1} + 1 = \nu_k + 2$ и (так же, как и в случае 2.1.2.2) при *любом* возможном значении $\nu_{k+3}$ оказываются достаточными неравенства

$$q_{\nu_k+j} \geqslant \gamma\lambda_j^{(4)}\theta^{\nu_k}, \quad 3 \leqslant j \leqslant \nu_{k+3} - \nu_k + 2,$$

где

$$\min_{j:\,\nu+3\leqslant j\leqslant\nu+13}\ \min_{i=0,1,2}\left(\frac{\lambda_{j+i}^{(4)}}{\theta^{j+i}}\right)^{\frac{1}{j-\nu}} = \left(\frac{13+13\theta+8\theta^2}{\theta^{15}}\right)^{\frac{1}{13}} > \theta_1,$$

из которых следует

$$q_{\nu_{k+3}+i} \geqslant \gamma\theta^{\nu_{k+3}+i}\theta_1^{\nu_{k+3}-\nu_k} \quad \text{при } i = 0,1,2. \tag{16}$$

Поскольку имеет место (7), то мы разобрали все возможные случаи. Итак, объединяя формулы (10), (11), (13)–(16), видим, что во всех случаях из условия (8) для некоторого $1 \leqslant r \leqslant 5$ выполняется

$$q_{\nu_{k+r}+i} \geqslant \gamma\theta^{\nu_{k+r}+i}\theta_1^{\nu_{k+r}-\nu_k+i} \quad \text{при } i = 0,1,2.$$

Рекуррентное применение последнего неравенства обеспечивает оценку $q_{\nu_{k_l}} \geqslant \gamma_1(\theta\theta_1)^{\nu_{k_l}}$ с некоторым положительным $\gamma_1$ и для некоторой последовательности значений $k_l$, причем $k_{l+1} \leqslant k_l + 5$. Если теперь учесть соотношение (6) и определение величины $\theta_1$ (формула (9)), то сразу получаем утверждение доказываемой теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента РФ МД–3321.2004.1, НШ–136.2003.1 и INTAS 03–51–5070.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lagarias J.S.* Best simultaneous Diophantine approximation I. Growth rates of best approximation denominators // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. **272**, N 2. 545–554.
2. *Rogers C.A.* The signatures of the errors of simultaneous Diophantine approximations // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1951. **52**. 186–190.
3. *Мощевитин Н.Г.* Наилучшие совместные приближения: нормы, сигнатуры и асимптотические направления // Матем. заметки. 2000. **67**, вып. 5. 730–737.

Поступила в редакцию
17.09.2003
После доработки
30.05.2005