

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. А. Сатин, Исследование модели типа $M_t/M_t/1$ с двумя различными классами требований,
Системы и средства информ., 2021, том 31, выпуск 1, 17–27

<https://www.mathnet.ru/ssi746>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.174

13 мая 2025 г., 14:22:08



ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ТИПА $M_t/M_t/1$ С ДВУМЯ РАЗЛИЧНЫМИ КЛАССАМИ ТРЕБОВАНИЙ*

Я. А. Сатин¹

Аннотация: Исследуется нестационарная модель массового обслуживания $M_t/M_t/1$ с одним сервером и двумя классами требований. Для этой модели получен одномерный процесс рождения и гибели (ПРГ), описывающий число требований в исходной системе. С помощью стандартного метода логарифмической нормы линейной операторной функции получены соответствующие оценки скорости сходимости и условия эргодичности, а также построен численный пример, показывающий применение изучаемого подхода. Приведены графические иллюстрации, построенные на основе общего алгоритма, разработанного в предыдущих работах и связанного с решением задачи Коши для прямой системы Колмогорова на соответствующем временном интервале.

Keywords: системы массового обслуживания; нестационарная модель массового обслуживания; одномерный процесс рождения и гибели; скорость сходимости; оценки эргодичности; логарифмическая норма; модель $M_t/M_t/1$ с двумя классами требований

DOI: 10.14357/08696527210102

1 Введение

В работе исследуется нестационарная модель системы массового обслуживания с одним сервером и двумя классами требований, а также одномерный ПРГ, получающийся из нее и описывающий число требований в исходной системе.

Для оценки скорости сходимости используется обобщенное понятие логарифмической нормы, введенное в [1]. Для удобства напомним, как оно вводится. Рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy}{dt} = Hy(t) \quad (1)$$

в пространстве l_1 в предположении существования и единственности решения задачи Коши для любого начального условия $y(0)$.

Тогда верна следующая оценка:

$$\frac{d\|y\|}{dt} = \sum_i \frac{d|y_i|}{dt} \leq \sum_i \left(h_{ii}|y_i| + \sum_{j \neq i} |h_{ij}||y_j| \right) \leq \beta^* \|y\|, \quad (2)$$

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00020.)

¹ Вологодский государственный университет, yasovi@mail.ru

где

$$\beta^* = \sup_i \left(h_{ii} + \sum_{j \neq i} |h_{ji}| \right).$$

Отметим, что элементы h_{ij} матрицы $H = (h_{ij})$ могут зависеть как от времени t , так и от $\mathbf{y}(t)$.

Из (2) следует

$$\|y(t)\| \leq e^{\int_0^t \beta^* du} \|y(0)\|.$$

При этом, если H является ограниченным при всех $t \geq 0$ линейным оператором из l_1 в себя, $\beta^*(t) = \gamma(H(t))$ совпадает с логарифмической нормой [2, 3]. Таким образом, $\beta^*(t)$ представляет собой обобщение логарифмической нормы для нелинейной системы уравнений.

В разд. 2 рассмотрено описание модели, в разд. 3 и 4 изучен процесс, описывающий число требований в системе, а затем связанный с ним одномерный процесс. В разд. 5 рассмотрен пример, иллюстрирующий изучаемый подход.

2 Описание модели

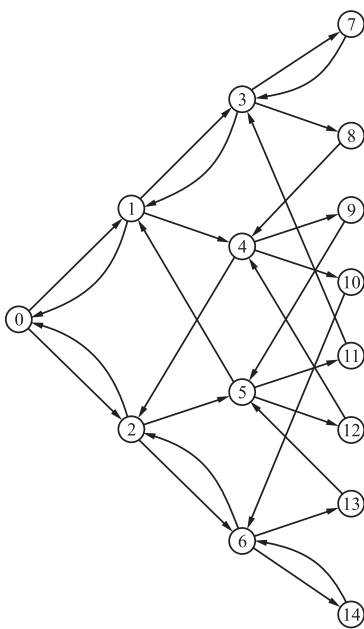


Рис. 1 Граф процесса $X(t)$

Рассмотрим систему обслуживания с двумя классами требований, которые поступают с интенсивностями $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ соответственно, а обслуживаются с интенсивностями $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ соответственно (см. общее описание такого типа и более общих, но стационарных моделей в [4]). Требования из очереди обслуживаются в порядке их поступления в систему.

Стандартное описание проводится с помощью двумерного ПРГ $Z(t) = (Z_1(t), Z_2(t))$, где каждая координата описывает число требований соответствующего класса, а интенсивности рождения и гибели для них — $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2$ и μ_2 .

В настоящей работе рассмотрен другой подход, а именно: вводится одномерный процесс $X(t)$, в котором учтено как число требований каждого класса, так и то, на каком месте в очереди находятся требования первого и второго класса.

Для наглядности приведен граф с начальными состояниями процесса $X(t)$ и нумерацией состояний (рис. 1).

Вершина 0 соответствует ситуации, когда в системе нет требований. Вершина 1 (2) соответствует тому, что требование первого (второго) класса находится на обслуживании, а очередь за ним пуста. Вершины с третьей по шестую соответствуют наличию одного обслуживаемого требования и одного требования за ним в очереди (например, вершина 6 соответствует тому, что обслуживается требование второго класса и в очереди тоже требование второго класса) и т. д. Стрелки показывают возможные переходы с соответствующими интенсивностями: вправо и вверх — λ_1 ; вправо и вниз — λ_2 ; влево и вниз — μ_1 ; влево и вверх — μ_2 .

При стандартных условиях вектор вероятностей состояний можно описать прямой системой Колмогорова

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A(t)\mathbf{p}, \tag{3}$$

где матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} & \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_1 & & 0 & \mu_1 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_2 & 0 & & 0 & \mu_1 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Главная диагональ заполнена так, что суммы по столбцам равны нулю. В общем случае интенсивности являются функциями времени t .

3 Оценки для процесса $X(t)$

Возьмем два разных неотрицательных решения системы (3) $\mathbf{p}^*(t)$ и $\mathbf{p}^{**}(t)$ с единичной нормой. Тогда

$$\sum_i (p_i^*(t) - p_i^{**}(t)) = 0.$$

Это означает, что на решение системы не будет влиять изменение целой строки в матрице A на одну и ту же функцию. Следовательно, оценку скорости сходимости можно свести к изучению скорости сходимости системы

$$\frac{d(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}^{**})}{dt} = (A - C)(\mathbf{p}^* - \mathbf{p}^{**}).$$

Здесь матрица C состоит из одних нулей за исключением самой верхней строки, каждый элемент которой равен неотрицательной c .

Для использования логарифмической нормы введем диагональную матрицу

$$D = \text{diag}(1, k_1, k_1, k_1 k_2, k_1 k_2, k_1 k_2, k_1 k_2, k_1 k_2 k_3, \dots).$$

На главной диагонали произведения $k_1 \cdots k_s$ встречаются 2^s раз.

Найдем условия нуль-эргодичности.

Для этого возьмем в D все $k_i < 1$ и $c = 0$.

Если взять все k_i одинаковыми и равными k , получим:

$$\alpha(t) = \min \alpha_i(t) = \min \left(-(k-1)(\lambda_1 + \lambda_2) - \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \max(\mu_1, \mu_2) \right).$$

Очевидно, что если $\max(\mu_1, \mu_2) < \lambda_1 + \lambda_2$, то всегда можно подобрать $k < 1$, при которых α положительно. Отсюда получаем теорему.

Теорема 1. Если $\max(\mu_1, \mu_2) < (\lambda_1 + \lambda_2)$, то процесс нуль-эргодичен.

Найдем условия сильной эргодичности.

Для этого возьмем в D все $k_i > 1$.

Тогда матрица $D(A - C)D^{-1}$ примет вид, показанный на рис. 2.

Сумма по нулевому столбцу с противоположным знаком (вне главной диагонали элементы берутся по модулю)

$$\alpha_0 = c - (k_1 - 1)(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Суммы по остальным столбцам можем аналогично ограничить (i относится сразу к выделенной на рис. 2 группе столбцов):

$$\alpha_i = -\frac{c}{k_1 \cdots k_i} - (k_{i+1} - 1)(\lambda_1 + \lambda_2) - \left(\frac{1}{k_i} - 1 \right) \min(\mu_1, \mu_2).$$

Если взять все k_i одинаковыми и равными k ,

$$\begin{aligned} \alpha &= \min \alpha_i(t) = \\ &= \min \left(-\frac{c}{k} - (k-1)(\lambda_1 + \lambda_2) - \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \min(\mu_1, \mu_2), c - (k-1)(\lambda_1 + \lambda_2) \right). \end{aligned}$$

Взяв

$$c = \frac{(k-1) \min(\mu_1, \mu_2)}{k+1},$$

получим:

$$\alpha = \frac{(1-k^2)(\lambda_1 + \lambda_2) + (k-1) \min(\mu_1, \mu_2)}{k+1}. \quad (5)$$

Очевидно, что если $\min(\mu_1, \mu_2) > \lambda_1 + \lambda_2$, то всегда можно подобрать $k > 1$ при которых α положительно. Отсюда получаем теорему.

Теорема 2. Если $\min(\mu_1, \mu_2) > (\lambda_1 + \lambda_2)$, то процесс сильно эргодичен и верна оценка

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} \leq e^{-\alpha t} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_{1D}. \quad (6)$$

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 можно легко обобщить на случай 1-периодических интенсивностей.

Теорема 3. Если интенсивности 1-периодичны и $\int_0^1 \max(\mu_1(s), \mu_2(s)) ds < \int_0^1 (\lambda_1(s) + \lambda_2(s)) ds$, то процесс нуль-эргодичен.

Теорема 4. Если интенсивности 1-периодичны и $\int_0^1 \min(\mu_1(s), \mu_2(s)) ds > \int_0^1 (\lambda_1(s) + \lambda_2(s)) ds$, то процесс слабо эргодичен и верна оценка

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\|_{1D} \leq e^{-\int_0^t \alpha(u) du} \|\mathbf{p}^*(0) - \mathbf{p}^{**}(0)\|_{1D}.$$

4 Сведение к одномерному процессу рождения и гибели

Рассмотрим теперь новый процесс $\tilde{X}(t)$, определяющий число требований в системе. В отличие от $X(t)$ в проекции теряется информация о порядке требований в очереди и учитывается только число требований в системе. Для исследования будет применяться подход из статьи [1], где было показано, что при фиксированном начальном условии интенсивности проекции для многомерного ПРГ при больших значениях времени можно рассматривать как соответствующие характеристики для одномерных ПРГ. Там же получены условия нуль-эргодичности, слабой эргодичности и оценки сходимости для полученных одномерных процессов. Теоремы, приведенные в [1], справедливы и в рассматриваемой ситуации для одномерного процесса, получающегося для модели $M_t/M_t/1$ с двумя классами требований.

Из соответствующих уравнений прямой системы Колмогорова получаем

$$\frac{d(p_0)}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2) p_0 + \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2,$$

откуда

$$\frac{d(p_0)}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2)p_0 + \frac{\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2}{p_1 + p_2} (p_1 + p_2).$$

Далее аналогично:

$$\begin{aligned} \frac{d(p_1 + p_2)}{dt} &= (\lambda_1 + \lambda_2)p_0 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)p_1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)p_2 + \\ &\quad + \mu_1 p_3 + \mu_1 p_4 + \mu_2 p_5 + \mu_2 p_6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(p_1 + p_2)}{dt} &= (\lambda_1 + \lambda_2)p_0 - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)p_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)p_2}{p_1 + p_2} (p_1 + p_2) + \\ &\quad + \frac{\mu_1 p_3 + \mu_1 p_4 + \mu_2 p_5 + \mu_2 p_6}{p_3 + \dots + p_6} (p_3 + \dots + p_6). \end{aligned}$$

И так далее складываем по 2^s уравнений.

Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_1 &= \frac{\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2}{p_1 + p_2}; \\ \tilde{\mu}_2 &= \frac{\mu_1 p_3 + \mu_1 p_4 + \mu_2 p_5 + \mu_2 p_6}{p_3 + \dots + p_6}. \end{aligned}$$

Аналогично определяем остальные $\tilde{\mu}_k$. Обозначим $\tilde{\lambda}_k = \lambda_1 + \lambda_2$ и

$$x_0 = p_0; \quad x_1 = p_2 + p_3; \quad x_2 = p_4 + p_5 + p_6 + p_7; \quad \dots$$

Получим систему

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \tilde{A}\mathbf{x}(t),$$

где

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_1 + \lambda_2; \quad \tilde{\mu}_i = \frac{\mu_1 \sum_{k=2^{i-1}}^{2^i+2^{i-1}-2} p_i + \mu_2 \sum_{k=2^{i-1}}^{2^{i+1}-2} p_i}{\sum_{k=2^{i-1}}^{2^{i+1}-2} p_i};$$

соответствующий процесс обозначим $\tilde{X}(t)$.

Положим

$$l \leq \tilde{\lambda}_k \leq L, \quad m \leq \tilde{\mu}_k \leq M$$

для любых k, t и любого начального условия.

Получим теоремы 5 и 6, аналогичные которым доказаны в [1].

1. Пусть $\tilde{X}(t)$ имеет счетное число состояний и

$$M < l. \tag{7}$$

Пусть $\sigma = \sqrt{M/l} < 1$, $\delta_n = \sigma^n$, $n \geq 0$, $\tilde{x}_n = \delta_n x_n$ и $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots)$. Пусть $\Lambda = \text{diag}(\delta_0, \delta_1, \dots)$.

Теорема 5. Пусть верно (7). Тогда $\tilde{X}(t)$ нуль-эргодичен и верны оценки

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| &\leq e^{-\alpha^* t} \|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|; \\ \Pr\left(\tilde{X}(t) \leq n/\tilde{X}_j(0) = k\right) &\leq \sigma^{k-n} e^{-\alpha^* t}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\Pr\left(\tilde{X}(t) > n/\tilde{X}(0) = k\right) > 1 - \sigma^{k-n} e^{-\alpha^* t}$$

и $\Pr\left(\tilde{X}(t) > n/\tilde{X}(0) = k\right) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$ для любых n и k .

2. Пусть

$$L < m, \quad \alpha_* = l + m - 2\sqrt{LM} > 0. \tag{8}$$

Теорема 6. Пусть верно (8). Тогда $\tilde{X}(t)$ слабо эргодичен и верна оценка

$$\|D\mathbf{w}(t)\| \leq e^{-\alpha_* t} \|D\mathbf{w}(0)\| \tag{9}$$

для любых $t \geq 0$ и любого соответствующего начального условия.

Замечание 2. Аналогичные утверждения, как и в предыдущем разделе, справедливы и в случае 1-периодических интенсивностей.

Замечание 3. Условия на нуль-эргодичность в теоремах 1 и 5 и слабую эргодичность в 2 и 6, а также оценки (6) и (9) формально выглядят одинаково. Однако в них использованы разные нормы. В (1), (2) и (6) норма раскрывается привычным способом:

$$\|\mathbf{p}\| = \sum_{i=0}^{\infty} |p_i|,$$

в то время как в (5), (6) и (9) оценивается норма

$$\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i| = \sum_{i=0}^{\infty} \left| \sum_{2^i-1}^{2^{i+1}-2} p_i \right|$$

(сумма модулей суммы вероятностей состояний по столбцам в графе).

Замечание 4. Рассмотренный в этом разделе процесс можно описать как сумму координат $Z_1 + Z_2$ соответствующего двумерного ПРГ.

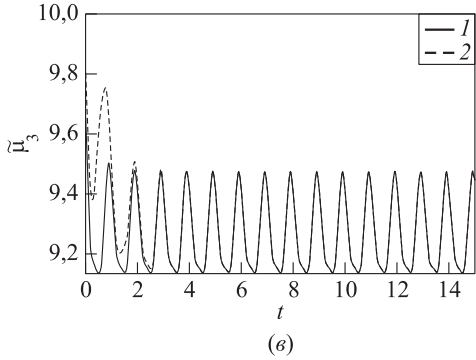
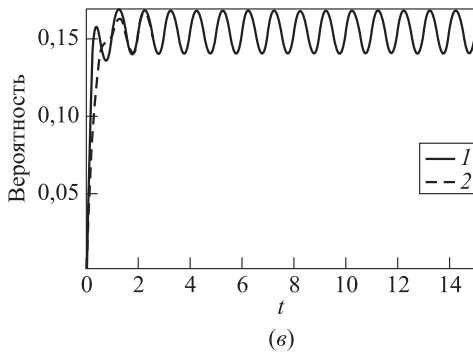
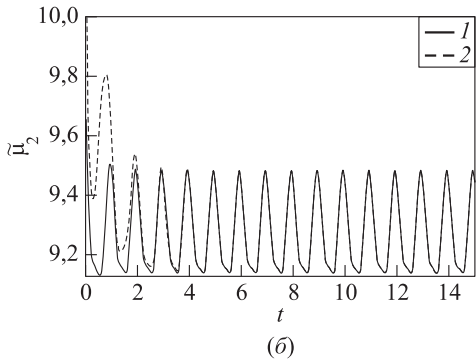
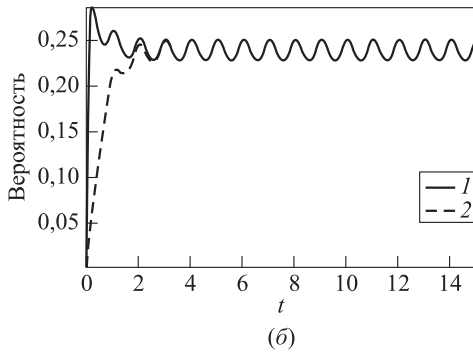
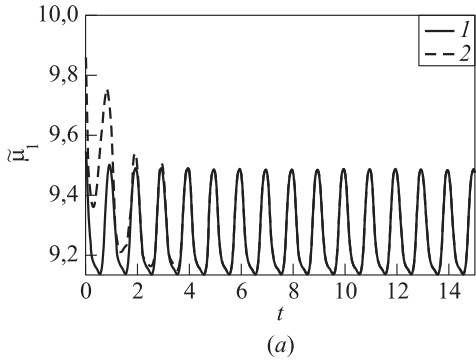
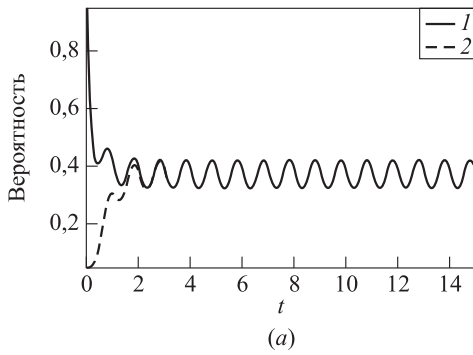


Рис. 3 Вероятности отсутствия требований (а), наличия ровно одного требования первого или второго класса (б) и наличия ровно двух каких-либо требований в системе (в): 1 — $p_0 = 0,95$; 2 — $p_0 = 0,05$

Рис. 4 Интенсивности $\tilde{\mu}_1$ (а), $\tilde{\mu}_2$ (б) и $\tilde{\mu}_3$ (в): 1 — $p_0 = 0,95$; 2 — $p_0 = 0,05$

5 Численный пример

Пусть интенсивности имеют вид:

$$\lambda_1(t) = 1 + \cos(2\pi t); \lambda_2(t) = 5 + \sin(2\pi t); \mu_1(t) = 11 + \sin(2\pi t); \mu_2 = 9.$$

Применить теорему 2 для получения оценок скорости сходимости затруднительно, так как нужно подбирать k , очень близкое к единице. Это связано с тем, что $\lambda_1 + \lambda_2$ не сильно отличается от $\min(\mu_1, \mu_2)$, при этом по формуле (5) получается $\alpha(t)$, почти равная нулю.

Применим теорему 6 для получения оценок скорости сходимости «проекции».

Подбираем l_1, L_1, m_1 и M_1 , при которых верно $l_1 \leq \tilde{\lambda} \leq L_1$ и $m_1 \leq \tilde{\mu} \leq M_1$.

Положив $\beta = \sqrt{M_1/L_1} = \sqrt{6}$, получаем

$$\alpha_* = l_1 + m_1 - 2\sqrt{L_1 M_1} \geq 10 - 4\sqrt{6}.$$

Получаем оценку

$$\|D\mathbf{w}(t)\| \leq e^{-\alpha_* t} \|D\mathbf{w}(0)\|$$

для любых $t \geq 0$ и любого соответствующего начального условия. Здесь D — треугольная матрица с $d_{k+1} = \beta^k, k \geq 0$.

На рис. 3 и 4 приведены графики для усеченной системы с состояниями от 0 до $2^7 - 2$. Графики строились для двух разных начальных условий. В одном случае $p_0 = 0,95$, остальные вероятности равны между собой. В другом случае $p_0 = 0,05$, остальные вероятности также равны между собой. «Проекция» описывает число требований в системе, и получается ПРГ с периодическими интенсивностями и семью состояниями. В частности, $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$ и $\tilde{\mu}_3$ приведены соответственно на рис. 4. Можно заметить, что изначально интенсивности сильно отличаются от периодических, но затем практически совпадают друг с другом и мало отличаются от периодических, причем они заключены между μ_1 и μ_2 .

Литература

1. Zeifman A., Satin Y., Kiseleva K., Korolev V. On the rate of convergence for a characteristic of multidimensional birth–death process // Mathematics, 2019. Vol. 7. Iss. 5. Art. No. 477. 10 p. doi: 10.3390/math7050477.
2. Zeifman A. I. On the estimation of probabilities for birth and death processes // J. Appl. Probab., 1995. Vol. 32. No. 3. P. 623–634.
3. Granovsky B., Zeifman A. Nonstationary queues: Estimation of the rate of convergence // Queueing Syst., 2004. Vol. 46. P. 363–388.
4. Adan I., Hathaway B., Kulkarni V. G. On first-come, first-served queues with two classes of impatient customers // Queueing Syst., 2019. Vol. 91. P. 113–142. doi: 10.1007/s11134-018-9592-z.

Поступила в редакцию 22.01.21

ON THE BOUNDS OF THE RATE OF CONVERGENCE FOR $M_t/M_t/1$ MODEL WITH TWO DIFFERENT TYPES OF REQUESTS

Ya. A. Satin

Department of Applied Mathematics, Vologda State University, 15 Lenin Str.,
Vologda 160000, Russian Federation

Abstract: The author deals with a nonstationary queuing model $M_t/M_t/1$ with one server and two different types of requests. For this model, the author obtains a one-dimensional birth and death process that describes the number of requirements in the original system. By applying the standard method of the logarithmic norm of the operator of a linear function, corresponding estimates for the rate of convergence and ergodicity are obtained. A numerical example with exact given values of intensities showing the application of the studied approach is constructed and corresponding graphic illustrations are provided. The author uses the general algorithm to build graphs, it is associated with solving the Cauchy problem for the forward Kolmogorov system on the corresponding interval which has already been used by the authors in previous papers.

Keywords: queuing systems; nonstationary queuing model; one-dimensional birth–death process; rate of convergence; ergodicity bounds; logarithmic norm; $M_t/M_t/1$ queue

DOI: 10.14357/08696527210102

Acknowledgments

This work was financially supported by the Russian Science Foundation (grant No. 19-11-00020).

References

1. Zeifman, A., Y. Satin, K. Kiseleva, and V. Korolev. 2019. On the rate of convergence for a characteristic of multidimensional birth-death process. *Mathematics* 7(5):477. 10 p. doi: 10.3390/math7050477.
2. Zeifman, A. I. 1995. On the estimation of probabilities for birth and death processes. *J. Appl. Probab.* 32(3):623–634.
3. Granovsky, B., and A. Zeifman. 2004. Nonstationary queues: Estimation of the rate of convergence. *Queueing Syst.* 46:363–388.
4. Adan, I., B. Hathaway, and V. G. Kulkarni. 2019. On first-come, first-served queues with two classes of impatient customers. *Queueing Syst.* 91:113–142. doi: 10.1007/s11134-018-9592-z.

Received January 22, 2021

Contributor

Satin Yacov A. (b. 1978) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Vologda State University, 15 Lenin Str., Vologda 160000, Russian Federation; yacovi@mail.ru