УДК 519.171+519.179.3

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ И СЕТЕЙ (КОДИРОВАНИЕ, УКЛАДКИ И ВЛОЖЕНИЯ)

В. П. Козырев, С. В. Юшманов

При решении многих дискретных задач, имеющих теоретическое или прикладное значение и сформулированных на языке теории графов, большое значение приобретает выбор способов задания графов и получаемых решений. Один и тот же способ задания (представления) графов по-разному эффективен для различных задач. Общепринятыми и универсальными способами являются задание графов с помощью матрицы смежности, списка ребер и структуры смежностей, определяемой списками вершин, смежными с каждой. В начале 60-х годов изучалось строение графов, обладающих некоторыми заданными свойствами, с точки зрения их экономного представления. Однако относительно таких естественных свойств, как наличие в графе симметричных частей или небольшого разреза, были построены предельно «плохие» графы и было показано, что большинство графов (например, в классе графов с фиксированным числом вершин n и ребер m для достаточно большого числа ребер $m=m(n)$) являются «плохими».

Для отдельных классов графов можно найти более экономные способы задания, чем общепринятые. Таким классы образуют деревья, параллельно-последовательные сети, плоские графы и ряд других графов. Оказывается, что для каждого из этих классов (за исключением одного) некоторые NP-полные задачи становятся полиномиально разрешимыми (обычно строится алгоритм решения, имеющий полиномиальную сложность), другие задачи остаются NP-полными. И только для одного класса — класса интервальных графов — все известные NP-полные задачи становятся полиномиальными.

Установить принадлежность рассматриваемого графа к данному классу — это, как правило, значит построить специальное представление графов этого класса. Такие представления для известных (и описываемых в данной статье) классов строятся с полиномиальной сложностью. Отметим, что и каноническое представление для графов из этих классов, т. е. задание графов с точностью до изоморфизма, также строится с полиномиальной сложностью.

Представление графов и сетей в памяти ЭВМ при своей разработке связано с 4 основными проблемами: 1) анализом экономичности задания, 2) выявления сложности кодирования и декодирования, 3) исследования сложности обработки закодированной информации, 4) анализом сложности решения конкретных задач на графах при определенном способе их задания. В настоящее время неизвестны способы представления, которые обладали бы одновременно 4 свойствами: 1) были бы экономными, 2) позволяли бы простое и экономное кодирование и декодирование, 3) позволяли бы простую обработку закодированной информации и 4) допускали бы эффективное решение дискретных задач на графах и сетях. Так, каноническое представление графа с помощью построчной записи матрицы смежности является таким примером.

Данный обзор состоит из 7 разделов. В первом, самом большом разделе рассматриваются представления графов семействами множеств объектов различной природы. В результате возникают подразделы: графы пересечений геометрических объектов, графы кривых, графы функций, графы перестановок, графы круговых перестановок, графы хорд, графы дуг круга, графы интервалов, графы неограниченных интервалов, графы пересечений подграфов графа, хордовые графы, расщепленные графы, 3-расщепленные графы, графы неориентированных цепей, графы ориентированных цепей, UE-графы, UEH-графы, DE-графы, RDE-графы. В этом разделе также описаны представления произвольных графов графами пересечений, оценивается их сложность, описываются модификации и обобщения графов пересечений.

Второй раздел посвящен топологической тематике укладки графов на поверхностях. Здесь для наглядности выделены подразделы, в которых рассматриваются вложение графов в проективную плоскость и укладки графов на торе, описываются свойства вложений в ориентируемые и неориентируемые поверхности, изучаются различные обобщения понятия рода графа. В третьем разделе рассматриваются некоторые нетрадиционные топологические представления графов. В разделе 4 приводится описание метрических и алгебраических представлений графов в арифметических пространствах. В разделе 5 описываются некоторые результаты о представлении графов с помощью стандартных операций. В двух последних разделах, шестом и седьмом, приводятся результаты прикладного характера, относящиеся к двум областям знания. В разделе 6 исследования относятся к автоматизации построения схем современных ЭВМ и организации работ программирования на них. В разделе 7 представления графов используются для записи молекул и химических формул в органической и неорганической химии. В последние годы приложение теории графов именно в этих областях естествознания представляет, по мнению авторов, наибольший интерес.

В обзоре рассматриваются статьи 9—10 последних лет, за небольшим исключением. Отметим, что в обзоре [20], в котором охватывались работы с 1963 по 1971 год, имеются разделы «Топологические задачи» и «Представления графов». Сравнение результатов двух указанных интервалов времени показывает, что происходит как расширение фронта работ, так и некоторое углубление результатов. В обзоре авторов 1985 года [25] имеется раздел, в котором описываются результаты о каноническом представлении графов. За прошедшие 5 лет в этом направлении существенных результатов не получено. К сожалению, не произошло никаких сдвигов и относительно отставания исследований в области теории графов и ее приложений в нашей стране по сравнению с зарубежными исследованиями. Отметим, что с 1989 года в СССР начал выпускаться журнал «Дискретная математика», в который, по-видимому, охотно будут принимать статьи по теории графов. Еще раз хочется обратить внимание на необходимость создания творческих коллективов, которые могли бы заниматься фундаментальными проблемами комбинаторики и теории графов.

§ 1. Графы пересечений

1.1. Предварительные сведения. Граф $G(V, E)$ называется графом пересечений семейства множеств S, если существует функция $f: V \to S$ такая, что для всех $v \neq w$ $f(v) \cap f(w) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда v и w смежны. В таком случае говорят также, что G представим на S и функция f есть S-представление графа G. Класс всех графов, представимых на S, обозначается $\Omega(S)$ и называется классом пересечений S. Граф называется графом пересечений, если он является графом пересечений некоторого семейства множеств.

Часто в определении графа пересечений семейства множеств на функцию f накладывают требование инъективности: $f(v) \neq f(w)$ для всех $v \neq w$. S-представления, удовлетворяющие такому требованию, называются инъективными, а класс всех графов, инъективно представимых на S, обозначается $\Omega_1(S)$ и называется инъективным классом пересечений S. Ясно, что, вообще говоря, $\Omega(S) \neq \Omega_1(S)$.

Но, тем не менее, если граф является графом пересечений в смысле первого определения, он является графом пересечений и в смысле второго определения, и наоборот.

Естественным образом возникают следующие вопросы:

1. Дан граф G. Является ли он графом пересечений некоторого семейства множеств?

2. Дан класс графов P. Является ли он классом пересечений некоторого семейства множеств?

Для произвольных семейств ответ на первый вопрос тривиален — любой граф является графом пересечений некоторого семейства множеств. Но этот вопрос становится нетривиальным и зачастую труднорешаемым при наличии ограничений на рассматриваемые семейства. Некоторые из таких ограничений будут рассмотрены ниже.

Ответ на второй вопрос был дан в [265], но для его формулировки нам понадобится ряд определений.

Класс графов P монотонен, если всякий раз, когда граф лежит в P, в P лежит и любой его порожденный подграф. Операция расширения вершины v графа G состоит в замене v новыми вершинами $v_1, \ldots, v_k$ таким образом, что все вершины $v_1, \ldots, v_k$ попарно смежны и w смежна с v в исходном графе тогда и только тогда, когда w смежна с v_i для всех i в расширенном. Будем говорить, что граф H получен из графа G вершинным расширением, если существует последовательность графов $G_0, G_1, \ldots, G_t$ такая, что $G_0 = G$, $G_t = H$ и для любого $t > i \geqslant 0$ граф G_{i+1} получен из графа G_i расширением некоторой его вершины. И, наконец, класс P имеет композиционную серию, если существует счетное семейство $\{G_1, G_2, \ldots, G_k, \ldots\}$ графов из P такое, что для любого i граф G_i является порожденным подграфом графа G_{i+1} и любой граф из P является порожденным подграфом некоторого графа этого семейства.

Теорема 1.1 ([265]. Пусть P есть некоторый класс графов. Тогда для существования такого семейства непустых множеств S, что $P = \Omega(S)$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

1. P монотонен;
2. P замкнут относительно вершинного расширения;
3. P имеет композиционную серию.

Теорема 1.2. [265]. Пусть P есть некоторый класс графов. Тогда для существования такого семейства непустых множеств S, что $P = \Omega_1(S)$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

1. P монотонен;
2. P имеет композиционную серию.

Следствие. Каждый класс пересечений есть инъективный класс пересечений.

Отметим, что обратное неверно. Так, класс всех линейных лесов (графов, в которых каждая компонента связности является простой цепью) является классом инъективных пересечений, но не является классом пересечений, так как он удовлетворяет условиям 1,3 теоремы 1.1, но не удовлетворяет условию 2.

1.2. Графы пересечений геометрических объектов. Многие важные классы графов являются классами пересечений семейств множеств евклидова пространства E^n. Более того, любой граф является графом пересечений некоторого семейства E^n. Например, любой граф является графом пересечений параллелепипедов [254] и графом пересечений шаров [209] в евклидовом пространстве достаточно большой размерности. Более того, любой граф является графом пересечений выпуклых множеств в трехмерном евклидовом пространстве E^3 [316], [17]. И, наконец, если не накладывать на множества из S требований связности, любой граф является графом пересечения семейства множеств вещественной прямой E^1 [162]. Поэтому в этом разделе мы будем рассматривать только графы пересечений связных подмножеств плоскости. Этого требования достаточно, чтобы соответствующие классы пересечений являлись собственными подклассами класса всех графов.

Графы кривых. Графы кривых (графы нитей [195]) определяются как графы пересечений семейства несамопересекающихся кривых, имеющих только конечное число общих точек [120], [195]. Графы кривых могут быть еще определены как графы пересечений связных множеств плоскости, но класс пересечений выпуклых множеств плоскости уже является собственным подклассом класса графов кривых [195]. Характеризация графов кривых и алгоритмы их распознавания неизвестны.

Известно, что этот класс графов содержит следующие классы: планарные графы [120], [195], графы, чье дополнение планарно [195], и графы с не более чем 11 вершинами [195]. С другой стороны, многочисленные примеры графов, не являющихся графами кривых, можно получить следующим образом. Обозначим через G^* граф, полученный добавлением на каждое ребро G новой вершины (заменой ребра (x_i, y_i) ребрами (x_i, v_i), (v_i, y_i), где $v_i \notin G$ и $v_i \neq v_j$ для всех i, j).

Теорема 1.3 [195]. G^* не является графом кривых тогда и только тогда, когда G непланарен.

В классе графов кривых NP-полны задачи о независимом множестве, разбиении на клики, хроматическом числе, гамильтоновом цикле и дереве Штейнера, так как они NP-полны для их подкласса — класса планарных графов [184]. В то же время на них NP-полна и задача о максимальной клике [195], полиномиально разрешимая для планарных графов.

И, наконец, отметим, что графы кривых возникли и применяются в задачах построения электрических схем [278].

Варьируя дополнительные ограничения, накладываемые на множество кривых, можно получить ряд важных в практическом и теоретическом отношениях классов графов. Рассмотрим некоторые из них.

Графы функций. Граф называется графом функций, если он изоморфен графу пересечений графиков некоторого семейства вещественных функций, определенных на интервале [0, 1]. Характеризация графов функций получена в [157], [195].

Теорема 1.4. Граф G является графом функций тогда и только тогда, когда его дополнение является графом сравнимости.

Напомним, что неориентированный граф называется графом сравнимости, если существует ориентация его ребер P такая, что из условия $(x, y) \in P$, $(y, z) \in P$ следует, что $(x, z) \in P$.

В [241] показано, что теорема 1.4 остается справедливой и в том случае, когда семейство непрерывных вещественных функций, фигурирующих в определении графа функций, задано не на интервале [0, 1], а на связном вполне регулярном хаусдорфовом пространстве с более чем одной точкой.

Так как для графов сравнимости задачи распознавания и задачи о независимом множестве и максимальной клике полиномиально разрешимы [150], то отсюда следует полиномиальная разрешимость соответствующих задач и для графов функций.

В частности, в [195] и в [286] описаны алгоритмы распознавания графа сравнимости временно́й сложности $O(mn)$ и $O(n^{2,5})$, где n — число вершин, а m — число ребер, что дает алгоритмы распознавания графов функций соответственно за $O(\bar{m}n)$ и $O(n^{2,5})$ операций, где $\bar{m}$ — число ребер в дополнении графа.

Отметим еще, что графы функций можно представить как графы пересечений некоторого семейства ломаных. А именно, пусть L_1 $L_2, \ldots, L_k$ есть вертикальные параллельные прямые, и пусть на каждой из них выделено n точек, помеченных сверху вниз числами $1, 2, \ldots, n$ на прямой L_0 и некоторыми перестановками этих чисел на прямых $L_1, \ldots, L_k$. Для каждого i ломаная $\bar{i}$ представляет собой объединение k отрезков, соединяющих точку i на L_{l-1} с точкой i на L_l $(1 \leqslant l \leqslant k)$. При $k=1$ множество ломаных называется диаграммой перестановки, а при $k > 1$ конкатенацией диаграмм перестановок. В [157] показано, что произвольный граф G является графом функций тогда и только тогда, когда он является графом пересечений конкатенации диаграмм перестановок. Если, как отмечено выше, задача распознавания графа функций полиномиально разрешима, то задача определения того, можно ли представить данный граф как граф пересечений конкатенации k перестановок, NP-полна при каждом фиксированном $k \geqslant 2$ [157].

Графы перестановок. Граф называется графом перестановок, если он изоморфен графу пересечений некоторой диаграммы перестановок. Существует и другое, эквивалентное определение. Пусть P есть перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Тогда граф $G(P)$ перестановки P имеет множество вершин $1, 2, \ldots, n$ и любые две его вершины i, j смежны тогда и только тогда, когда $(i-j)(P^{-1}(i)-P^{-1}(j)) < 0$, где $P^{-1}(i)$ есть номер числа i в перестановке P. Граф называется графом перестановок, если он изоморфен графу $G(P)$ для некоторого P [124].

Теорема 1.5 ([244], [124]). Граф G является графом перестановок тогда и только тогда, когда как сам G, так и его дополнение $\overline{G}$ являются графами сравнимости.

Отсюда вытекает полиномиальная разрешимость для графов перестановок всех тех задач, которые полиномиально разрешимы на графах сравнимости. В частности, для них полиномиально разрешимы задачи о независимом множестве, максимальной клике, разбиении на клики, хроматическом числе и хроматическом индексе [150]. Задачи о доминирующем множестве и дереве Штейнера, NP-полные для графов сравнимости, полиномиально разрешимы для графов перестановок [184]. Графы перестановок распознаются за $O(n^2)$ операций, в то время как графы сравнимости распознаются за $O(n^{2,5})$ операций [286].

В [124] показано, что задача распределения памяти в ЭВМ может быть сведена к задаче нахождения максимальной клики в графе перестановок. Последняя задача разрешима за $O(n^2)$ операций [124].

Графы круговых перестановок. Пусть C_1, C_2 есть две концентрические окружности, и пусть на каждой из них выделено n точек, помеченных против движения часовой стрелки числами $1, 2, \ldots, n$ на внутренней окружности C_1 и некоторой перестановкой P этих чисел на внешней окружности C_2. Круговой диаграммой перестановки P называется множество криволинейных хорд $\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n}$, лежащих целиком внутри области, ограниченной этими окружностями, и таких, что а) хорда $\overline{i}$ соединяет точку i на C_1 с точкой i на C_2; б) любые две различные хорды $\overline{i}$, $\overline{j}$ пересекаются не более чем в одной точке. Ясно, что одна и та же перестановка P может иметь несколько неизоморфных круговых диаграмм. Граф называется графом круговых перестановок, если он изоморфен графу пересечений круговой диаграммы некоторой перестановки. Отметим, что любая диаграмма перестановки может быть отображена в круговую диаграмму перестановки так, чтобы графы пересечений этих диаграмм были изоморфны. Поэтому графы перестановок образуют подкласс класса графов круговых перестановок. Примером графа круговых перестановок, не являющегося графом перестановок, может служить четный цикл C_{2n} при $n \geqslant 3$.

Пусть v есть некоторая вершина G, а $\Gamma(v)$ есть множество вершин G, смежных с v. Граф G_v получается переключением вершины v, т. е. удалением из G всех ребер, соединяющих v с вершинами из $\Gamma(v)$, и добавлением всех ребер, соединяющих v со всеми вершинами из $V(G)—\Gamma(v)$. Граф $G_{\Gamma(v)}$ определяется как граф, полученный из G одновременным переключением всех вершин из $\Gamma(v)$.

Теорема 1.6 ([261]). Пусть v есть некоторая вершина G. Граф G является графом круговых перестановок тогда и только тогда, когда:

1) G есть граф сравнимости;

2) $G_{\Gamma(v)}$ есть граф перестановок.

Из этой характеризации следует полиномиальная разрешимость для графов круговых перестановок всех тех задач, которые полиномиально разрешимы для графов сравнимости (см. пункт о графах перестановок).

Графы круговых перестановок распознаются за $O(\Delta m)$ операций, где Δ — максимальная степень, а m — число ребер [261].

Графы круга. Граф называется графом круга, если он изоморфен графу пересечений семейства хорд некоторого круга. Существуют и другие определения графов круга. Например, граф круга можно определить как граф коциклических цепей дерева (см. раздел 1.3) или как граф перекрывающихся интервалов (см. раздел 1.5), но наиболее важным является следующее чисто комбинаторное определение графа круга.

Пусть слово m в некотором алфавите таково, что любая буква слова встречается в слове ровно два раза. Будем называть такие слова словами двойного появления. Чередованием в слове m называется неупорядоченная пара x, y такая, что мы встречаем последовательно $\ldots, x, \ldots, y, \ldots, x, \ldots, y, \ldots$ при просмотре m. Граф чередований $A(m)$ слова m определяется как граф, вершинами которого являются буквы слова, а ребрами — чередования в нем. Граф называется графом чередований, если он изоморфен графу чередований некоторого слова двойного появления. Просматривая концевые точки хорд круга по часовой стрелке и помечая их буквами так, чтобы концевым точкам одной и той же хорды были приписаны одинаковые буквы, а концевым точкам разных хорд — разные, мы получим слово двойного появления. С другой стороны, помечая при обходе окружности по часовой стрелке некоторые ее точки буквами слова двойного появления и соединяя одинаковые буквы хордами, мы получим некоторое семейство хорд, причем в обоих случаях граф пересечений семейства хорд и граф чередований слова будут изоморфны. Поэтому граф круга можно определить как граф чередований, и во многих случаях такое чисто комбинаторное представление оказывается удобнее геометрического. В частности, характеризация 1.9 в оригинале была доказана для графов чередований.

Легко видеть, что любую диаграмму перестановок можно преобразовать в семейство хорд круга так, чтобы соответствующие графы пересечений были изоморфны. Поэтому графы перестановок образуют собственный подкласс графов круга.

Существует и другая связь между графами круга и перестановками. А именно, в [123] доказано следующее утверждение, которое можно рассматривать как неконструктивную характеризацию графов круга.

Теорема 1.7. Произвольный граф G является графом круга тогда и только тогда, когда существует перестановка P такая, что графы $G - V^0(G)$, $H(P) - V^0(H(P))$ изоморфны.

Здесь через $V^0(G)$ обозначается множество изолированных вершин G, а граф $H(P)$ определяется следующим образом. Множество вершин $H(P)$ есть $1, 2, \ldots, n$, и любые две вершины $j, k, j<k$, смежны тогда и только тогда, когда существует i такое, что $i<j<k$ и $P^{-1}(j)<P^{-1}(k)<P^{-1}(i)$.

Известны простые алгоритмы, сопоставляющие заданному семейству хорд круга некоторую перестановку и наоборот [150], но сама характеризация 1.7 неудобна для пользования. Более удобны характеризации, сформулированные в терминах ориентаций графа.

Теорема 1.8 ([133]). Граф G является графом круга, если существуют ациклическая ориентация P графа G и два ее линейных расширения L_1, L_2 такие, что отношение $F = (L_1 \cap L_2) - P$ удовлетворяет следующим условиям:

$$(x, y) \in F,\ (y, z) \in L_1 \Rightarrow (x, z) \in F,$$
$$(x, y) \in L_2,\ (y, z) \in F \Rightarrow (x, z) \in F.$$

Пусть графы G_1, G_2 имеют только одну общую вершину v и содержат не менее трех вершин каждый. Композицией графов G_1, G_2 называется граф с множеством вершин $V(G_1) \cup V(G_2) - v$, ребрами которого являются все ребра графов $G_1 - v$, $G_2 - v$ и все пары (v_1, v_2) такие, что $(v_1, v) \in E(G_1)$, $(v, v_2) \in E(G_2)$. Граф примитивный, если его нельзя представить в виде композиции двух графов. Известно, что композиция двух графов G_1, G_2 является графом круга тогда и только тогда, когда каждый из графов G_1, G_2 является графом круга [83]. Пусть функция s определена на множестве упорядоченных пар вершин графа G и принимает на них значения 0 и 1. Считая, что случай $s(x, y) = 1$ соответствует ориентации ребра (x, y) от x к y, мы можем содержательно истолковать функцию s как задание пары частичных ориентаций ребер полного графа, заданного на множестве вершин G.

Теорема 1.9 ([224], [83]). Примитивный граф G является графом круга тогда и только тогда, когда функцию s можно выбрать таким образом, чтобы были выполнены следующие условия:

1) $(x, y) \in E(G) \Rightarrow s(x, y) + s(y, x) = 1$;

2) $(x, y), (x, z) \notin E(G), (y, z) \in E(G) \Rightarrow s(x, y) + s(x, z) = 0$;

3) $(x, y), (x, z) \in E(G), (y, z) \notin E(G) \Rightarrow$
$\Rightarrow s(x, y) + s(x, z) + s(y, z) + s(z, y) = 1$.

В отличие от предыдущих, эта характеризация уже позволяет построить полиномиальный алгоритм распознавания [83], а так как проверка графа на примитивность и построение соответствующей декомпозиции осуществляется за $O(n^3)$ операций [103], то это означает полиномиальность распознавания графов круга. Первый полиномиальный алгоритм распознавания графов круга имел сложность $O(n^7)$ [84]. В настоящее время известны и другие полиномиальные алгоритмы распознавания [83], [85], [139]. Лучший из них [139] имеет сложность $O(nm)$.

Для графов круга полиномиально разрешимы задачи о независимом множестве [144], [248], максимальной клике [144], [178], гамильтоновом цикле [74] и дереве Штейнера [184]. В то же время задача о хроматическом числе для них NP-полна [142]. Некоторые приложения графов круга описаны в [123].

Графы дуг круга. Граф называется графом дуг круга, если он изоморфен графу пересечений семейства дуг некоторого круга.

Теорема 1.10 ([306]). Граф является графом дуг круга тогда и только тогда, когда его вершины можно занумеровать $0, 1, 2, \ldots, n-1$ таким образом, что если $(i, j) \in E(G)$, то вершина i смежна или со всеми вершинами $i+1, i+2, \ldots, j$, или со всеми вершинами $j+1, j+2, \ldots, i$, где номера вершин берутся по модулю n.

Расширенная матрица смежности графа получается из его матрицы смежности заменой всех нулей на главной диагонали единицами. Будем говорить, что в векторе $(b_1, \ldots, b_n)$ единицы идут в последовательном круговом порядке, если из условия $i<j$ и $b_i=b_j=1$ следует, что либо $b_i=b_{i+1}=\ldots=b_{j-1}=b_j=1$, либо $b_j=b_{j+1}=\ldots=b_n=b_1=\ldots=b_{i-1}=b_i=1$.

Теорема 1.11 ([306]). Граф является графом дуг круга тогда и только тогда, когда строки и столбцы его расширенной матрицы смежности можно переставить так, чтобы единицы в каждом столбце полученной матрицы шли в последовательном круговом порядке.

Графы дуг круга распознаются за $O(n^3)$ операций [309]. Для этого класса графов полиномиально разрешимы задачи о независимом множестве [164], [152], максимальной клике [178], разбиении на клики [164], доминирующем множестве [80] и дереве Штейнера [321], в то время как задача о хроматическом числе для них NP-полна [142].

Графы дуг круга имеют довольно широкий круг приложений. В частности, они возникают в задачах регулирования движения транспорта [291], в генетике [288], в задаче многомерного шкалирования из теории психологических измерений [180] и при проектировании базового математического обеспечения ЭВМ [308].

В литературе еще рассматривалось два подкласса графов дуг круга — графы единичных дуг круга и графы собственных дуг круга. Граф дуг круга *называется графом единичных дуг круга (графом собственных дуг круга)*, если он является графом пересечений семейства дуг единичной длины (семейства дуг, ни одна из которых не вложена в другую). Для обоих подклассов известны характеризации в терминах запрещенных подграфов [307], а для графов собственных дуг круга известна [306] еще и матричная характеризация, аналогичная характеризации графов дуг круга, данной в теореме 1.11. Отметим еще, что каждый граф собственных дуг круга является графом хорд круга [150]. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять представление такого графа семейством невложенных дуг круга и заменить каждую дугу на хорду круга, соединяющую ее концевые точки. Задача о хроматическом числе, NP-полная как для графов дуг круга, так и для графов хорд круга, для графов собственных дуг круга решается за $O(n^2)$ операций [234].

Графы интервалов. Граф называется *графом интервалов*, если он изоморфен графу пересечений некоторого семейства интервалов вещественной прямой. Очевидно, что графы интервалов образуют подкласс графов дуг круга. Графы интервалов являются одним из наиболее широко известных и используемых в приложениях классов графов пересечений, и им посвящена обширная литература. В частности, они подробно рассматриваются в следующих книгах: [31], [130], [150], [38]. Поэтому часть описываемых ниже результатов широко известна и приводится здесь для полноты изложения и удобства читателя.

Известно много характеризаций графов интервалов, которые мы объединим в одну теорему, но прежде нам придется напомнить ряд определений. Граф, не содержащий порожденных подграфов, изоморфных простому циклу C_n, $n \geqslant 4$, называется *хордовым*. Тройка вершин графа *астероидальная*, если для любых двух вершин тройки найдется соединяющая их простая цепь, не проходящая через третью вершину тройки и смежные с ней вершины. Матрица $M(G) = \|m_{ij}\|$ графа G определяется следующим образом. Ее строки соответствуют максимальным по включению кликам G, а столбцы — вершинам, и $m_{ij} = 1$, если вершина i принадлежит клике j; в противном случае $m_{ij} = 0$.

Теорема 1.12. Следующие утверждения эквивалентны:

1. Граф G есть граф интервалов;

2. G не содержит простой цикл C_4 как порожденный подграф, и дополнение $\overline{G}$ графа G есть граф сравнимости [148];

3. Граф G хордовый, а $\overline{G}$ есть граф сравнимости [148];

4. Граф G хордовый и не содержит астероидальных троек [201];

5. Перестановкой строк матрицы $M(G)$ можно добиться, чтобы в каждом столбце все единицы шли подряд [138];

6. Перенумерацией вершин G можно добиться, чтобы в его матрице смежности все единицы, расположенные правее главной диагонали, шли подряд [31].

Отметим еще, что в [201] была получена характеризация графов интервалов в терминах порожденных подграфов.

Графы интервалов распознаются за $O(n)$ операций [82].

С алгоритмической точки зрения графы интервалов характеризуются тем, что подавляющее большинство задач, NP-полных для произвольных графов, в классе графов интервалов имеют полиномиальную или даже линейную сложность. В частности, для графов интервалов полиномиально разрешимы задачи о независимом множестве [164], максимальной клике, разбиении на клики [164], хроматическом числе [164], доминирующем множестве [81] и дереве Штейнера [321]. Более того, в настоящее время неизвестно NP-полных задач, которые оставались бы NP-полными в классе графов интервалов [184].

Графы, изоморфные графам пересечений семейства интервалов, ни один из которых не вложен в другой (семейства замкнутых интервалов единичной длины), называются графами собственных интервалов (единичных интервалов). Несколько неожиданным является тот факт, что эти классы графов совпадают [253] (напомним, что графы единичных дуг круга образуют собственный подкласс класса графов собственных дуг круга). Графы единичных интервалов изучались также под названиями графов безразличия [253] и тайм-графов [208]. Различные характеризации этих графов можно найти в [316], [253], [208]. В частности, произвольный граф есть граф единичных интервалов тогда и только тогда, когда он есть граф интервалов и не содержит полный двудольный граф $K_{1,3}$ как порожденный подграф [253], а в [208] показано, что произвольный граф есть граф единичных интервалов тогда, когда его вершины можно занумеровать так, чтобы вершины каждой его максимальной клики были занумерованы последовательно.

Графы интервалов имеют широкий спектр приложений. Они используются в генетике при изучении структуры гена (см. [31]), в молекулярной биологии при секвенировании РНК и ДНК [186], в задаче последовательной датировки в археологии [38], [189], [284], в организации движения транспорта [291], при автоматизации проектирования ЭВМ [35], в теории расписаний и даже при оценке износа дорожного покрытия [143].

Во многих из указанных приложений возникает задача представления графа интервалов семейством интервалов с заданными свойствами. Такая задача, представляющая и чисто теоретический интерес, рассматривалась в [284], [149], [285].

Графы неограниченных интервалов. Граф называется графом неограниченных интервалов, если он изоморфен графу пересечений семейства полупрямых вещественной прямой. Ясно, что полупрямые такого семейства можно обрезать так, чтобы граф пересечений полученного семейства невложенных друг в друга интервалов совпал с графом пересечений исходного семейства полупрямых. Поэтому каждый граф неограниченных интервалов есть граф интервалов, более того, есть граф собственных интервалов.

Теорема 1.13 ([190]). Произвольный граф G является графом неограниченных интервалов тогда и только тогда, когда он хордовый и его дополнение $\bar{G}$ есть двудольный граф.

Из этой характеризации следует, что графы неограниченных интервалов распознаются не более чем за $O(n^2)$ операций. Отметим еще, что в [190] показано, что графы неограниченных интервалов образуют подкласс класса графов перестановок.

1.3. Графы пересечений подграфов графа. В предыдущем разделе рассматривались классы графов пересечений связных подмножеств евклидова пространства. Многие другие важные классы графов пересечений можно получить, рассматривая пересечения подграфов произвольного графа.

При таком подходе возможны два определения пересечения подграфов. Можно считать, как это обычно и делается, что подграфы пересекаются, когда они имеют хоть одну общую вершину, но можно рассматривать и реберные пересечения, то есть считать, что два подграфа пересекаются тогда и только тогда, когда они имеют хоть одно общее ребро.

Рассмотрим сначала пересечения по вершинам. Так как этот вариант определения пересечений более распространен, всюду далее, где это не будет оговорено особо, слово «пересечение» будет означать пересечение по вершинам.

Легко видеть, что любой граф есть граф пересечений подграфов некоторого графа. Более того, любой граф есть граф пересечений простых цепей некоторого графа, а тем самым есть граф пересечений поддеревьев некоторого графа [195]. Поэтому, чтобы получить графы пересечений, образующих собственные подклассы класса всех графов, необходимо либо рассматривать пересечения подграфов из более узких классов, чем класс всех поддеревьев, либо накладывать ограничения на те графы, пересечения чьих подграфов рассматриваются.

В первом случае мы получим, например, такой известный класс графов, как реберные графы, т. е. графы, изоморфные графам пересечений ребер некоторого графа. Но более интересен и более исследован второй случай, который мы и рассмотрим.

Наиболее напрашивающимся ограничением является планарность. Накладывая его, мы получим графы кривых, рассмотренные в предыдущем разделе.

Теорема 1.14 ([195]). Следующие утверждения эквивалентны:

1) Граф G есть граф кривых;

2) Граф G изоморфен графу пересечений поддеревьев некоторого планарного графа;

3) Граф G изоморфен графу пересечений простых цепей некоторого планарного графа.

Более того, все классы графов, описанные в предыдущем разделе, есть классы графов пересечений простых цепей некоторых семейств планарных графов. Чтобы убедиться в этом, достаточно каждому семейству несамопересекающихся кривых на плоскости сопоставить плоский граф G, определенный следующим образом. Вершинами G являются концевые точки кривых из L и точки их пересечений. Ребро G есть любой участок кривой из L такой, что его концевые точки есть вершины G и ни одна его внутренняя точка вершиной G не является. Тогда граф пересечений семейства L есть граф пересечений цепей G, соответствующих кривым из L. Это обстоятельство позволяет переопределить графы из предыдущего раздела как графы пересечений цепей плоских графов. Например, графы дуг круга (графы интервалов) можно определить как графы пересечений цепей простого цикла (простой цепи).

Чтобы получить нетривиальные классы графов пересечений подграфов, отличные от классов графов пересечений кривых на плоскости, описанных в предыдущем разделе, рассмотрим классы графов пересечений поддеревьев дерева.

Хордовые графы. Граф хордовый, если он не содержит порожденных подграфов, изоморфных простому циклу C_n, $n \geqslant 4$. Пусть C есть множество максимальных клик графа G, а C_v есть множество всех максимальных клик G, содержащих вершину v графа G.

Теорема 1.15 ([91], [145], [313]). Следующие утверждения эквивалентны:

1) Граф G хордовый;

2) Граф G есть граф пересечений поддеревьев некоторого дерева;

3) Существует дерево T с множеством вершин C такое, что любое множество C_v порождает поддерево в T.

Дерево T, указанное в формулировке теоремы, можно построить (или убедиться в его несуществовании) за $O(n^4)$ операций [145].

Эта характеризация является достаточно неожиданной, так как если графы кривых, графы функций, графы дуг круга, графы интервалов и т. д. вводились и изучались именно как графы пересечений, то хордовые графы вводились, изучались и, как правило, изучаются и сейчас без всякой связи с графами пересечений.

Известны и другие характеризации хордовых графов. Множество вершин S графа G называется $(a—b)$-разделителем, если вершины a и b лежат в разных компонентах связности графа $G—S$; $(a—b)$-разделитель S минимальный, если ни одно подмножество S не есть $(a—b)$-разделитель. Вершина v графа симплициальная, если множество смежных с ней вершин $N(v)$ порождает полный подграф. Граф G имеет совершенную схему исключений, если существует такое упорядочивание его вершин

$v_1, v_2, \ldots, v_n$, что для любого i вершина v_i симплициальная в подграфе G, порожденном множеством вершин $\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$. Множество вершин S графа G m-выпуклое, если все вершины всех порожденных простых цепей G, соединяющих вершины из S, лежат в S. Шар $B(x, r)$ графа G определяется как множество всех вершин G, расстояние от которых до x не больше r.

Теорема 1.16. Следующие утверждения эквивалентны:

1) Граф G хордовый;

2) Каждый минимальный разделитель в G порождает полный подграф [112];

3) Граф G имеет совершенную схему исключений [138];

4) Все шары в G m-выпуклые [55].

Условие 3 этой теоремы позволяет строить эффективные алгоритмы распознавания хордовых графов. Лучший из них имеет линейную сложность [299].

Для хордовых графов задачи о независимом множестве, максимальной клике, разбиении на клики, хроматическом числе имеют полиномиальную сложность [150], задачи о гамильтоновом цикле [184], доминирующем множестве [184], [81] и дереве Штейнера [321] NP-полные.

Из приложений хордовых графов следует указать проектирование реляционных баз данных [151] и анализ экологических систем [293]. В [293] на основе анализа реальных экосистем утверждается, что графы пищевых сетей реальных экосистем являются хордовыми и совершенные схемы исключений таких графов имеют биологический смысл и отражают порядок вхождения видов в экосистему.

Расщепленные графы. Граф называется расщепленным [132] или полярным [42], если его вершины можно разбить на два подмножества, порождающие соответственно полный и пустой подграфы. Пусть $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$ есть последовательность степеней вершин графа G, упорядоченная по невозрастанию.

Теорема 1.17. Следующие условия эквивалентны:

1) Граф G расщепленный;

2) Граф G и его дополнение $\bar{G}$ хордовые [132];

3) Граф G не содержит порожденных подграфов, изоморфных графам $2K_2$, C_4, C_5 [132];

4) Существует целое m, $0 \leqslant m \leqslant n$ такое, что условие

$$\sum_{i=1}^{m} d_i = m(m-1) + \sum_{i=m+1}^{n} d_i$$

выполнено [43], [166];

5) Граф G изоморфен графу пересечений поддеревьев полного двудольного графа $K_{1,p}$ для некоторого p [216].

В [312] найдено минимальное p, для которого существует представление данного расщепленного графа G на семействе поддеревьев $K_{1,p}$ и описан алгоритм построения такого представления.

Расщепленные графы распознаются за $O(n \log n + m)$ операций [43], [166]. Этот алгоритм основан на проверке условия 4 теоремы 1.17. Расщепленные графы образуют подкласс хордовых графов. Поэтому для них полиномиально разрешимы все задачи, полиномиально разрешимые для хордовых графов; в частности, для расщепленных графов полиномиально разрешимы задачи о независимом множестве, максимальной клике, разбиении на клики, хроматическом числе. Для них NP-полны задачи о гамильтоновом цикле [184], доминирующем множестве [75], [94] и дереве Штейнера [321]. Более того, в [184] указано, что в настоящее время неизвестны задачи, которые были бы NP-полны для хордовых графов и полиномиально разрешимы для расщепленных графов.

Отметим еще, что в [73], [86] был получен ряд характеризаций расщепленных графов, являющихся одновременно графами перестановок. В частности, в [73] показано, что граф G является расщепленным графом перестановок тогда и только тогда, когда как G, так и его дополнение $\overline{G}$ являются графами интервалов. Такие графы распознаются за $O(n \log n + m)$ операций [86].

3-расщепленные графы. Граф называется 3-расщепленным [216], если его можно получить из двух расщепленных графов G_1, G_2 и полного графа K добавлением всех ребер (x, y), $x \in K$, $y \in K^1 \cup K^2$, и некоторого множества ребер (x, y), $x \in K$, $y \in I^1 \cup I^2$, где $K^i \cup I^i$ есть разбиение вершин графа G_i на два подмножества, порождающие соответственно полный и пустой подграфы. Ясно, что расщепленные графы есть частный случай 3-расщепленных графов.

Обозначим через $T_{m,n}$ дерево на множестве вершин $x_1, x_2, \ldots, x_m, x, y, y_1, y_2, \ldots, y_n$, в котором вершины $x_1, x_2, \ldots, x_m$ смежны с вершиной x, x смежна с y и y смежна с вершинами $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Теорема 1.18 ([216]). *Произвольный граф 3-расщепленный тогда и только тогда, когда он есть граф пересечений поддеревьев $T_{m,n}$ для некоторых m, n.*

Графы неориентированных цепей (графы цепей [147], VPT-графы [295], UV-графы [222]). Граф называется графом неориентированных цепей, если он изоморфен графу пересечений цепей некоторого дерева. Неконструктивная характеризация графов неориентированных цепей описана в [249], а в [147] получена характеризация графов неориентированных цепей, аналогичная характеризации хордовых графов, данной в теореме 1.15.

Теорема 1.19 ([147]). *Граф G является графом неориен-*

тированных цепей тогда и только тогда, когда существует дерево T с множеством вершин C такое, что любое из множеств C_v порождает цепь в T.

В [147] описан алгоритм, строящий дерево T, указанное в формулировке теоремы (если оно существует) за $O(n^4)$ операций.

Для графов неориентированных цепей задачи о независимом множестве, максимальной клике, разбиении на клики и хроматическом числе полиномиально разрешимы [150], а задача о доминирующем множестве NP-полна [81]. Задач, которые были бы NP-полны для хордовых графов и полиномиально разрешимы для графов неориентированных цепей, в настоящее время неизвестно [184].

Графы ориентированных цепей. Ордеревом называется направленный граф, неориентированный граф которого есть дерево. Корневым ордеревом называется ордерево с корнем (вершиной, из которой достижимы все остальные вершины). Граф называется DV-графом, если он изоморфен графу пересечений ориентированных цепей некоторого ордерева, и называется RDV-графом, если он изоморфен графу пересечений ориентированных цепей корневого ордерева. Отметим, что понятие DV-графа было введено в [222] в 1986 г., а во всех более ранних работах (например, в [146], [150], [184]), говоря о графах ориентированных цепей, имеют в виду графы пересечений ориентированных цепей корневого ордерева (RDV-графы).

Теорема 1.20. *Граф G является DV-графом (RDV-графом) тогда и только тогда, когда существует ордерево (корневое ордерево) T с множеством вершин C такое, что любое из множеств C_v порождает ориентированную цепь в T.*

Для RDV-графов эта теорема доказана в [146], а для DV-графов — в [222].

DV-графы и RDV-графы распознаются за полиномиальное время (см. [222] для DV-графов и [146], [111] для RDV-графов). Отметим, что алгоритм распознавания RDV-графов, описанный в [111], имеет линейную сложность.

DV-графы и RDV-графы лежат в классе графов неориентированных цепей. Поэтому для них полиномиально разрешимы все те задачи, которые полиномиально разрешимы для графов неориентированных цепей. Для RDV-графов также полиномиально разрешимы задачи о доминирующем множестве [81] и дереве Штейнера [321] (для графов неориентированных цепей первая задача NP-полна [81], а сложность второй неизвестна [184]).

И, завершая рассмотрение графов вершинных пересечений, отметим, что графы пересечений подцепей ориентированной цепи есть графы интервалов, рассмотренные в предыдущем разделе.

Рассмотрим теперь графы реберных пересечений подграфов.

Любое пересечение подграфов по ребрам есть пересечение по вершинам, но не наоборот. Поэтому, переходя от вершинных пересечений к реберным, мы получаем, вообще говоря, более широкие классы графов. Так, например, класс графов реберных пересечений поддеревьев дерева уже совпадает с классом всех графов [153] (напомним, что класс графов вершинных пересечений поддеревьев дерева совпадает с классом всех хордовых графов). Поэтому далее мы будем рассматривать только классы графов реберных пересечений простых цепей.

UE-графы. Граф называется UE-графом [222] (EPT-графом [153], [154]), если он изоморфен графу реберных пересечений цепей дерева.

Характеризация UE-графов неизвестна, и в [154], [222] показано, что задача их распознавания NP-полна.

Примером UE-графов могут служить реберные графы мультиграфов [154], [222] и простые циклы. Отсюда следует, что в отличие от UV-графов UE-графы не лежат в классе хордовых графов. Связь между UE-графами, UV-графами и хордовыми графами дает следующая теорема:

Теорема 1.21. Следующие утверждения эквивалентны:

1) Граф G есть хордовый UE-граф;

2) Граф G есть одновременно UE- граф и UV-граф;

3) G есть граф пересечений цепей дерева степени не большей трех;

4) G есть граф реберных пересечений цепей дерева степени не большей трех.

Эквивалентность $1 \Leftrightarrow 2$ доказана в [295], [222], а эквивалентность $2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4$ — в [154].

Для UE-графов полиномиально разрешимы задачи о независимом множестве [298] и максимальной клике [153], а задачи о разбиении на клики и хроматическом числе NP-полны [153].

Возможные приложения UE-графов описаны в [153].

UEH-графы. Семейство P цепей дерева обладает свойством Хелли (относительно реберных пересечений), если для любого его подсемейства P' из условия «пересечение любых двух цепей из P' содержит хоть одно ребро» следует, что пересечение всех цепей из P' содержит хоть одно ребро. Граф называется UEH-графом [222], если он изоморфен графу реберных пересечений семейства цепей дерева, обладающего свойством Хелли. Примером UEH-графов могут служить реберные графы мультиграфов, свободных от треугольников, и DV-графы [222]. Более того, DV-графы есть в точности хордовые UEH-графы [222].

Известна характеризация UEH-графов, являющаяся реберным аналогом характеризации UV-графов, данной в теореме 1.19.

Теорема 1.22 ([222]). Граф G является UEH-графом тогда и только тогда, когда существует дерево T с множеством ребер C такое, что любое из множеств C_v образует цепь в T.

UEH-графы распознаются за полиномиальное время. Сложность задач о разбиении на клики и хроматическом числе неизвестна.

DE-графы. Граф называется DE-графом [222], если он изоморфен графу реберных пересечений ориентированных цепей ордерева. Примером DE-графов могут служить реберные графы двудольных мультиграфов и DV-графы [222].

Теорема 1.23 ([222]). Граф G является DE-графом тогда и только тогда, когда существует ордерево T с множеством дуг C такое, что любое из множеств C_v образует ориентированную цепь в T.

Отметим еще, что DE- графы есть в точности совершенные UEH-графы [222] (напомним, что граф совершенный, если для любого его порожденного подграфа хроматическое число равно размеру максимальной клики [150]).

DE-графы распознаются за полиномиальное время [222]. Так как задачи о разбиении на клики и хроматическом числе полиномиально разрешимы для совершенных графов [204], то они полиномиально разрешимы и для DE-графов. В [222] описан полиномиальный алгоритм раскраски DE-графов.

RDE-графы. Граф называется RDE-графом [222], если он изоморфен графу реберных пересечений ориентированных цепей корневого ордерева. В [222] показано, что классы RDE-графов и RDV-графов совпадают.

И, наконец, отметим тот несколько неожиданный факт, что графы круга (графы пересечений хорд круга), описанные в предыдущем разделе, могут быть охарактеризованы как графы реберных пересечений цепей графа. Коциклом множества вершин V_1 графа $G(V, E)$ называется множество всех ребер G, соединяющих вершины из V_1 с вершинами из $V—V_1$. Цепь графа коциклическая, если множество ее ребер образует коцикл. Пусть граф можно покрыть семейством коциклических цепей так, что каждое ребро графа принадлежит ровно двум коциклическим цепям и любые две такие цепи пересекаются не более чем по одному ребру. Тогда граф реберных пересечений цепей такого семейства называется графом пересечений коциклических цепей [136].

Теорема 1.24 ([136]). Произвольный граф есть граф круга тогда и только тогда, когда он есть граф пересечений коциклических цепей.

1.4. Представления произвольных графов графами пересечений.

Как уже отмечалось выше, любой граф можно представить как граф пересечений некоторого семейства множеств S, причем это можно сделать различными способами. Рассмотрим некоторые из таких представлений и оценки их сложности.

Если не накладывать никаких ограничений на те семейства $S=\{S_i\}$, графом пересечений которых граф G является, то мерой сложности представления G графом пересечений может служить мощность $|\bigcup S_i|$ объединения всех множеств семейства S. Соответствующий инвариант, равный минимуму $|\bigcup S_i|$ по всем таким семействам S, что G есть граф пересечений семейства S, называется числом пересечения графа G и обозначается $\omega(G)$. Обозначим через $\theta(G)$ число клик в минимальном по числу клик разбиении множества ребер G на клики.

В [194], [232], [245], [256] показано, что для любого графа G $\omega(G)=\theta(G)$. Соответствующий граф пересечений строится следующим образом. Пусть $K^1, K^2, \ldots, K^t$ есть минимальное покрытие ребер G кликами. Тогда для любой вершины x $f(x)$ есть множество номеров клик из этого покрытия, содержащих вершину x. Отметим, что при этом изолированные вершины отображаются в пустое множество. Следствием формулы $\omega(G)=\theta(G)$ являются известные оценки $\omega(G)\leqslant m$ и $\omega(G)\leqslant[n^2/4]$, где m — число вершин и n — число ребер. Так как задача вычисления $\theta(G)$ NP-полна [194], то из этого результата следует NP-полнота и задачи вычисления $\omega(G)$. В [256] указано, что для хордовых графов существует полиномиальный алгоритм вычисления числа пересечения. А для графов интервалов известна и явная формула для $\omega(G)$, а именно, для графа интервалов $\omega(G)$ равно числу максимальных клик минус число изолированных вершин [232].

Некоторые приложения числа пересечений описаны в [194], [232], [233], [291], [38].

Рассмотрим теперь представления произвольных графов графами пересечений евклидовой прямой. В большинстве случаев такие множества представляют собой обобщения интервалов вещественной прямой.

Пусть, например, функция f в определении графа пересечений сопоставляет каждой вершине декартово произведение m интервалов вещественной прямой. Такое произведение представляет собой m-мерный параллелепипед, ребра которого параллельны осям координат, и называется клеткой пространства E^m (m-клеткой). Клеточность $\operatorname{box}(G)$ графа G равна минимальному m, для которого G является графом пересечений некоторого семейства клеток E^m. Можно дать и другое, эквивалентное определение. Клеточность графа G равна минимальному m, для которого существует функция f, приписывающая каждой вершине v графа G семейство интервалов $f_1(v), f_2(v), \ldots, f_m(v)$ таким образом, что любые две различные вершины x, y графа G смежны тогда и только тогда, когда для всех $i=1, \ldots, m$ $f_i(x)\cap f_i(y)\neq\varnothing$. Ясно, что графы с $\operatorname{box}(G)\leqslant 1$ — это графы интервалов, а графы с $\operatorname{box}(G)=0$ — полные графы. Известно (см. [254], а также [327], где этот результат был переоткрыт), что для любого n-вершинного графа $\operatorname{box}(G)\leqslant\lfloor n/2\rfloor$, а характеризация графов, на которых достигается эта граница, дана в [303]. Для расщепленных графов $\operatorname{box}(G) \leqslant \min\{\ulcorner |K|/2 \urcorner, \ulcorner |S|/2 \urcorner\}$, где $V(G) = K \cup S$ есть разбиение вершин G на клику и независимое множество [101], а для планарных графов $\operatorname{box}(G) \leqslant 3$, причем любой планарный граф можно представить как граф пересечений 3-клеток таким образом, чтобы пересечение любых двух 3-клеток с непустым пересечением было 2-клеткой [302]. Обе эти оценки точны. Для произвольных графов задача нахождения $\operatorname{box}(G)$ NP-полна [101].

Заменяя в определении клеточности m-клетки единичными кубами, получим кубичность $\operatorname{cub}(G)$, равную минимальному m, для которого G есть граф пересечений кубов в E^m. Ясно, что $\operatorname{box}(G) \leqslant \operatorname{cub}(G)$ и что графы с $\operatorname{cub}(G) \leqslant 1$ есть графы единичных интервалов. В [254] показано, что $\operatorname{cub}(G) \leqslant \llcorner 2n/3 \lrcorner$.

Клеточность и кубичность используются в экологии [38], [255] и социологии [137] как меры сложности (размерности) экологических и социальных сетей.

Для пространств больших размерностей понятиям клеточности и кубичности близка фреймовая размерность [290]. Топологическая граница m-клетки называется m-фреймом или фреймом пространства E^m. Фреймовая размерность $\operatorname{fd}(G)$ равна минимальному m, для которого G можно представить как граф пересечений семейства фреймов в E^m. Легко видеть, что если граф G является графом пересечений некоторого семейства попарно невложенных друг в друга m-клеток, где $m \geqslant 2$, то он является графом пересечений их фреймов. В частности, отсюда следует, что любое представление G как графа пересечений m-кубов, $m \geqslant 2$, порождает его представление как графа пересечений их фреймов. Отсюда следует оценка $\operatorname{fd}(G) \leqslant \operatorname{cub}(G) \leqslant \llcorner 2n/3 \lrcorner$. В [290] доказана более сильная оценка $\operatorname{fd}(G) \leqslant \operatorname{box}(G) + 1 \leqslant \llcorner n/2 \lrcorner + 1$, а из [302] еще следует, что для планарных графов $\operatorname{fd}(G) \leqslant 3$. В пространстве E^1 ситуация уже другая. Так как границей интервала являются две его концевые точки, то пересечение 1-кубов (т. е. интервалов) вовсе не влечет пересечения соответствующих 1-фреймов, и графы с $\operatorname{cub}(G) \leqslant 1$ не образуют подкласса графов с $\operatorname{fd}(G) \leqslant 1$. Графы с $\operatorname{fd}(G) \leqslant 1$ есть в точности те графы, которые можно представить как графы пересечений двухэлементных множеств, а класс последних графов совпадает с классом реберных графов мультиграфов [153], [290].

Заменяя в определении клеточности интервалы на дуги круга, мы получим круговую размерность $D(G)$. Более точно, $D(G)$ равна минимальному m, для которого существует функция f, приписывающая каждой вершине v графа G семейство дуг круга $f_1(v), f_2(v), \ldots, f_m(v)$ таким образом, что любые две различные вершины x, y графа G смежны тогда и только тогда, когда $f_i(x) \cap f_i(y) \neq \varnothing$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Это понятие изучалось в [120], [274], [303]. Ясно, что $D(G) \leqslant \mathrm{box}(G)$, но достижимые верхние оценки для $D(G)$ неизвестны. Известно только, что для достаточно больших n существуют графы с $D(G) > n/(4 \log n)$ [303].

В [305] исследовалась также порядковая клеточность, равная минимальному m, для которого существует представление графа G в виде графа пересечений интервалов некоторого m-мерного упорядоченного множества (произведения m цепей). Показано, что верхняя граница порядковой клеточности оценивается как $O(\log \log n)$.

Другим аналогом клеточности является сферичность $\mathrm{sph}(G)$, равная минимальному m, для которого граф G есть граф пересечений некоторого семейства шаров единичного радиуса в E^m. Это понятие изучалось в [137], [173], [209], [129], [213]. Графы с $\mathrm{sph}(G) \leqslant 1$ и есть графы единичных интервалов (известные также под названием тайм-графов) [208]. Известно, что для произвольного графа $\mathrm{sph}(G) \leqslant n - cl(G)$, где $cl(G)$ — число вершин в максимальной клике G, а для расщепленных графов $\mathrm{sph}(G) \leqslant$ $\leqslant n - cl(G) - 1$. Некоторые другие оценки сферичности можно найти в [209]. Соотношения между сферичностью и кубичностью рассматривались в [173], [129], [211]. Приложения сферичности к стереохимии описаны в [173].

В [134] рассматривалась контактная размерность $\mathrm{cd}(G)$, равная минимальному m, для которого существует представление графом пересечений единичных шаров в E^m такое, что любые две пересекающиеся сферы пересекаются (касаются) ровно в одной точке.

И, возвращаясь снова к интервалам, рассмотрим интервальное число графа, введенное независимо в [304], [163]. Функция $f(v)$, приписывающая каждой вершине v графа G некоторое семейство интервалов вещественной прямой, называется t-интервальным представлением графа G или просто t-представлением, если для любой вершины v $f(v)$ содержит не более t интервалов и любые две вершины v и w смежны тогда и только тогда, когда $f(v) \cap f(w) \neq \varnothing$. Наименьшее t, для которого G имеет t-представление, называется интервальным числом графа G и обозначается $i(G)$. Известно, что $i(G) \leqslant \lceil (n+1)/4 \rceil$ [162]. Более того, если $n \leqslant 4p$ и G отличен от полного двудольного графа $K_{2p,2p}$, то $i(G) \leqslant p$, а если $G = K_{2p,2p}$, то $i(G) = p+1$ [58]. В [287] получена оценка $i(G) \leqslant 1 + \lceil \sqrt{m}/2 \rceil$, где m — число ребер, а в [163] оценка $i(G) \leqslant \lceil (d+1)/2 \rceil$, где d — максимальная степень графа. Среди нетривиальных нижних оценок для $i(G)$ отметим оценку [206]:

$$i(G) \geqslant \left\lceil \frac{m + \frac{1}{2} cl(G)(cl(G)-1)}{n(cl(G)-1)} \right\rceil,$$

где $cl(G)$ — число вершин в максимальной клике G. Для планарных графов $i(G) \leqslant 3$ [269]. В [268] этот результат обобщен на графы произвольного рода, а именно, показано, что максимально возможное интервальное число графа рода g не меньше $\ulcorner\sqrt{g}\urcorner$ и не больше $3+\ulcorner\sqrt{3g}\urcorner$. Для хордовых графов получена оценка $i(G) \leqslant \ulcorner cl(G)/2 \urcorner$, причем для $2 \leqslant cl(G) \leqslant 6$ эта оценка неулучшаема [59]. В [206], [207] дана простая формула для определения интервального числа графов без треугольников, но для произвольного графа задача определения $i(G)$ NP-полна [320]. Отметим, что почти для всех графов $i(G) \geqslant n/4 \log n$ [122].

В [304], [207], [267] рассматривались различные вариации интервального числа, полученные наложением на t-представления дополнительных ограничений. Например, неизбыточное интервальное число $i_0(G)$ равно минимальному t, для которого существует такое t-представление, что для всех $v \neq w$ $f(v) \cap f(w)$ есть интервал. В [267] показано, что 1) для любого $t \geqslant 1$ существует граф с $i(G)=2$ и $i_0(G)=t$; 2) для любого G $i_0(G) \leqslant (cl(G)-1)i(G)$.

И наконец, упомянем об обобщениях интервального числа, в которых каждой вершине сопоставляется семейство d-мерных клеток [122], кривых в E^3 [266] и выпуклых множеств в E^2 [266].

1.5. Графы пересечений. Модификации и обобщения. Согласно определению графа пересечений, любые две его вершины x, y смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им множества $f(x)$ и $f(y)$ имеют непустое пересечение, причем на характер пересечения никаких ограничений не накладывается. Но в литературе рассматривались и модификации графов пересечений, в которых вершины x, y смежны тогда и только тогда, когда $f(x) \cap f(y)$ непусто и удовлетворяет некоторому заданному условию. Рассмотрим наиболее известные из таких модификаций.

Граф G называется графом вложимости семейства множеств S [150], если существует функция f, приписывающая каждой вершине x множество $f(x)$ из S таким образом, что любые две вершины x, y смежны тогда и только тогда, когда либо $f(x) \subset f(y)$, либо $f(y) \subset f(x)$. Граф называется графом вложимости, если он изоморфен графу вложимости некоторого множества. Легко видеть (см., например, [150]), что имеют место следующие утверждения.

Теорема 1.25. Граф является графом вложимости тогда и только тогда, когда он является графом сравнимости.

Теорема 1.26. Граф является графом перестановок тогда и только тогда, когда он является графом вложимости интервалов вещественной прямой.

Граф называется графом перекрытий семейства множеств S, если существует функция f, приписывающая каждой вершине x множество $f(x)$ из S таким образом, что любые две вершины x, y смежны тогда и только тогда, когда $f(x) \cap f(y) \neq \varnothing$ и ни одно из включений $f(x) \subset f(y)$, $f(y) \subset f(x)$ не имеет места. Граф есть граф перекрытий, если он изоморфен графу перекрытий некоторого множества. Примерами графов перекрытий могут служить графы пересечений единичных интервалов, графы собственных дуг круга, единичных дуг круга, единичных шаров, единичных кубов и т. д. Менее тривиальный пример дает следующая теорема [150].

Теорема 1.27. Граф является графом перекрытий интервалов вещественной прямой тогда и только тогда, когда он является графом круга.

В [290] изучалась связь между фреймовой размерностью $\mathrm{fd}(G)$ (см. предыдущий раздел) и полной размерностью перекрытий $\mathrm{cod}(G)$, равной минимальному m, для которого граф G есть граф перекрытий некоторого семейства клеток в E^m. В этой работе показано, что для любого G с $\mathrm{fd}(G) > 1$ и $\mathrm{cod}(G) > 1$ $\mathrm{fd}(G) = \mathrm{cod}(G)$.

Граф $G(V, E)$ называется графом толерантности, если существует семейство $S = \{I_x | x \in V\}$ замкнутых интервалов вещественной прямой и множество $T = \{t_x | x \in V\}$ положительных чисел такие, что любые две вершины x, y смежны тогда и только тогда, когда $|I_x \cap I_y| \geqslant \min\{t_x, t_y\}$, где $|I_x|$ — длина интервала I_x. Пара $\langle S, T\rangle$ называется толерантным представлением графа G. Толерантное представление ограниченное, если $t_x \leqslant |I_x|$ для всех $x \in V$. Граф толерантности есть граф ограниченной толерантности, если он позволяет ограниченное толерантное представление.

В [155] было показано, что класс графов толерантности, позволяющих толерантное представление, в котором для всех x $t_x = t$, где t — произвольная положительная константа, совпадает с классом графов интервалов, а класс графов толерантности, позволяющих толерантное представление, в котором для всех x $t_x = |I_x|$, совпадает с классом графов перестановок. Таким образом, графы интервалов и графы перестановок являются графами ограниченной толерантности. В той же работе установлено, что графы ограниченной толерантности образуют подкласс графов функций. В [156] показано, что графы толерантности не могут содержать как порожденный подграф ни простой цикл C_n, $n \geqslant 5$, ни его дополнение. Известно также, что графы толерантности являются совершенными [156].

Граф G называется графом хорд, если его вершинам можно сопоставить равные по мощности семейства хорд круга таким образом, что любые две вершины G смежны тогда и только тогда, когда число пересечений между хордами соответствующих семейств нечетно. Отметим, что требование нечетности числа пересечений означает, что граф хорд, вообще говоря, не совпадает с графом пересечений представляющих его семейств хорд. Последнее гарантированно имеет место, когда каждое из семейств содержит ровно одну хорду, т. е. когда граф хорд является графом круга. Графы хорд изучались в [318], где было показано, что любой граф является графом хорд, и был описан простой алгоритм построения соответствующего представления.

Пусть подсемейства S_1, S_2 семейства множеств S образуют разбиение S, т. е. $S_1 \cup S_2 = S$ и $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Граф двудольных пересечений семейства S относительно данного разбиения S_1, S_2 определяется как граф с множеством вершин S, в котором любые две вершины x, y из S смежны тогда и только тогда, когда $x \cap y \neq \varnothing$ и либо $x \in S_1$, $y \in S_2$, либо $x \in S_2$, $y \in S_1$. Граф называется графом двудольных пересечений, если он изоморфен графу двудольных пересечений некоторого семейства множеств. Ясно, что граф двудольных пересечений является двудольным, но, оказывается, верно и обратное.

Теорема 1.28 ([168]). Произвольный граф является двудольным графом тогда и только тогда, когда он является графом двудольных пересечений некоторого полного двудольного графа $K_{1,m}$.

Граф называется графом биинтервалов, если он изоморфен графу двудольных пересечений некоторого семейства интервалов вещественной прямой. Графы биинтервалов являются двудольным аналогом графов интервалов и допускают характеризацию, представляющую собой двудольный аналог характеризации графов интервалов как хордовых графов, не содержащих астероидальных троек. Бихордовым графом называется двудольный граф, не содержащий порожденных подграфов, изоморфных простому циклу C_n, $n \geqslant 6$, а биастероидальной тройкой называется тройка вершин двудольного графа такая, что для любой пары вершин тройки найдется цепь, их соединяющая и не смежная ни с одной из вершин, смежных третьей вершине тройки.

Теорема 1.29 ([168]). Двудольный граф является графом биинтервалов тогда и только тогда, когда он бихордовый и не содержит биастероидальных троек.

Отметим еще, что известна характеризация графов биинтервалов и в терминах порожденных подграфов [168].

Всюду выше мы рассматривали только неориентированные графы, но, как показано в [210], можно ввести и ориентированный аналог графов пересечений. Будем говорить, что орграф без петель $D(V, E)$ представим семейством множеств S, если каждой вершине $v \in V$ можно приписать множество $S_v \in S$ и элемент b_v множества S_v таким образом, что в D есть дуга (u, v) тогда и только тогда, когда $u \neq v$ и $b_v \in S_u$. В [210] показано, что любой орграф без петель представим некоторым семейством множеств, более того, любой орграф без петель представим семейством выпуклых множеств в R^n, семейством шаров в E^{n-1} и семейством клеток в E^m, где n — число вершин орграфа, а $m \geqslant n/2$.

§ 2. Укладки графов на поверхностях

Топологическая тематика теории графов — одна из старейших, но она до сих пор носит принципиальный характер в силу своей теоретической и прикладной значимости. Стремления определить род графа G развивались в связи с попытками решать задачи комбинаторного представления топологических укладок (часто для краткости называемых картами). В обычно используемом представлении укладок, известном еще Хефтеру в 1891 году, каждой вершине сопоставляется циклическая ориентация инцидентных ей ребер. Грани укладки являются орбитами некоторой группы, действующей естественным образом на множестве ребер E. По формуле Эйлера вычисляется род укладки h $|V|-|E|+|F|=2-2\cdot\gamma_h(G)$. Чтобы найти род графа $\gamma(G)\equiv\min\limits_{\{h\}}\gamma_h(G)$, достаточно рассмотреть все возможные назначения вершинам $v_i \in V$ циклических ориентаций. Такой переборный подход характеризуется сложностью $O(n^{n^2})$. Стремление к более эффективному подходу в общем случае пока не увенчалось успехом, а надежда на то, что можно найти такую последовательность вершин, что изменение их циклических ориентаций даст монотонное улучшение рода укладок, оказалась несостоятельной.

Несмотря на различные попытки NP-полнота задачи о вычислении $\gamma(G)$ не доказана. В работе [128] описан алгоритм вычисления рода $\gamma=\gamma(G)$ n-вершинного графа G, который характеризуется сложностью $O(n^{O(\gamma)})$. Если $\gamma=\gamma(G)=\text{const}$, то этот алгоритм имеет полиномиальную сложность. Для случая плоскости или, то же самое, сферы ($\gamma=0$) имеется теперь несколько алгоритмов установления планарности графа, каждый из которых характеризуется линейной сложностью. Однако добавление ограничений может резко усложнить задачу об укладке графа. Приведем пример такого ограничения. Граф $G(V, E)$ с выделенным множеством вершин $W\subseteq V$ называется k-планарным, если существует укладка G на плоскости, при которой циклы самое большее k граней G содержат все вершины W. В [70] доказано, что для произвольного k задача проверки k-планарности является NP-полной в сильном смысле. Для фиксированной укладки G на плоскости описан алгоритм проверки k-планарности, имеющий сложность $O(c^k n)$, где c — константа, $n=|V|$.

Большая часть работ по нахождению укладок основывается на успешном установлении планарности графа. Для многих из них характерно (например, в одном из первых полиномиальных алгоритмов Демукрона и др.), что сначала произвольным образом выбирается простой цикл C и укладывается на плоскости. В результате образуются две планарные области. На последующих этапах получаем задачу о продолжении: дана планарная укладка h подграфа H графа G; определить, можно ли распространить h на весь граф G. Одно обстоятельство делает решение этой задачи простым. Будем говорить, что две части P_1 и P_2 из $G-H$ препятствуют друг другу относительно грани $f \in F$ укладки h (обозначение $P_1/_f P_2$), если они не могут быть одновременно уложены в f. Это топологическое понятие имеет следующий комбинаторный эквивалент: $P_1/_f P_2$ тогда и только тогда, когда P_1 и P_2 имеют или три общих прикрепления к f, или две непересекающихся цепи. Крайне важным является свойство «безразличия»: если $P_1/_f P_2$ и P_1, P_2 укладываются в некоторую другую грань, то это только одна и та же грань, скажем, f', и $P_{1/f'}P_2$. Для успешного решения задачи о продолжении необходимо выполнение двух условий: 1) каждая часть из $G-H$ должна укладываться по крайней мере в одну грань, 2) каждой части можно выбрать (назначить) инцидентную ей грань так, что никакие две части не были назначены к грани, относительно которой они препятствуют друг другу. Всякий раз, когда имеется вынужденный выбор, в соответствующей части выбирается произвольным образом простая цепь и она укладывается в соответствующей грани. Если ввести вспомогательный граф $\tilde{G}$ допустимых назначений частей граням, то и совместное назначение эквивалентно двуцветной раскраске $\tilde{G}$.

Описанный подход был использован в [45] для построения алгоритма, который находит укладку кубического графа на торе. Сложность этого алгоритма $O(n^6)$, где n — число вершин графа.

Пусть $v_1, w_1, v_2, w_2, \ldots, v_k, w_k$ — вершины графа G, который 2-клеточно вложен в поверхность S. В статье [257] изучаются достаточные условия, когда в G найдутся k цепей, соединяющих пары v_i, $w_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ и не пересекающихся по вершинам. Описан полиномиальный алгоритм нахождения таких цепей для заданных S и k. Полученные результаты о существовании цепей применены в [258] к изучению миноров графов, вложенных в S. Здесь граф H называется минором графа G, если H можно получить из некоторого подграфа графа G стягиванием ребер. Авторы анонсируют, что впоследствии будет опубликовано доказательство утверждения о том, что в бесконечной последовательности графов, вложимых в S, найдутся такие i, j $(1 \leqslant i \leqslant j)$, что G_i есть минор графа G_j. Отсюда как следствие вытекает аналог теоремы Понтрягина—Куратовского для поверхности S: существует конечный список графов $G_1, \ldots, G_k$ таких, что данный граф вложим в S тогда и только тогда, когда он не содержит в качестве минора графа из этого списка, см. также [258].

Вложение в проективную плоскость. Непланарный граф G, который может быть вложен в проективную плоскость, содержит цикл, называемый существенным, при стягивании которого в вершину получается планарный граф. В [240] описан алгоритм вложения G в проективную плоскость П. В его основной части строится определенное множество циклов, каждый из которых проверяется на то, является ли он существенным. Сложность алгоритма имеет порядок $O(d^*n^2)$, где d^* — максимальная степень вершин графа G.

В [227] исследуется класс графов $\mathcal{G}$, 2-клеточно вложимых в проективную плоскость П. Граф G однозначно вложим в П, если для любых двух вложений h_1, $h_2: G \to \Pi$ существуют гомеоморфизм $\varphi: \Pi \to \Pi$ и автоморфизм $\sigma: G \to G$ такие, что $\varphi \cdot h_1 = h_2 \cdot \sigma$. Граф G прямо вложим в П, если для любого его автоморфизма σ и для некоторого вложения $h_2: h_1(G) \to \Pi$ существует гомеоморфизм $\varphi: \Pi \to \Pi$, для которого $\varphi \cdot h' = h' \cdot \sigma$. Для $h_1: G \to \Pi$ вложение $h_2: h_1(G) \to \Pi$ называется повторным, если h_2 нельзя расширить на гомеоморфизм $\Pi \to \Pi$. В [229] дано описание 3-связных графов из $\mathcal{G}$, которые допускают повторные вложения. Из последнего получены условия, при выполнении которых 5-связные графы из $\mathcal{G}$ однозначно или прямо вложимы в П. В то же время описана бесконечная последовательность 5-связных графов из $\mathcal{G}$, которые не допускают однозначное и прямое вложение в П.

Граф $\hat{G}$ назовем 2-накрытием графа G, если существует соответствие $\alpha: \hat{V} \to V$, которое биективно переводит соседей каждой вершины $v \in V(\hat{G}) = \hat{V}$ в соседей вершины $\alpha(v) \in V(G) = V$. Два вложения h_1, $h_2: G \to \Pi$ графа G в проективную плоскость П эквивалентны, если найдутся автоморфизм $\sigma: G \to G$ и гомеоморфизм $\varphi: \Pi \to \Pi$, для которых $\varphi h_1 = h_2 \sigma$. В [170] доказано, что существует биекция из множества классов эквивалентности вложений 3-связного непланарного графа G в проективную плоскость П в множество классов изоморфизма планарных 2-накрытий этого графа. Доказано, что связный непланарный граф G вложим в П в том и только том случае, когда G имеет планарное 2-накрытие.

Число расщепления $r(G, \Pi)$ графа G для проективной плоскости П равно наименьшему числу k такому, что G можно получить с помощью k отождествлений вершин некоторого графа G^*, вложимого в проективную плоскость П. Для полного графа K_n показано, что $r(K_n, \Pi) = 0$ при $n < 7$; $r(K_n, \Pi) = 2$ при $n = 7$ и $r(K_n, \Pi) = \frac{(n-3)(n-4)}{6}$ при $n > 7$ [170].

Перечислению различных укладок графа на проективной плоскости посвящена работа [228].

Вложения графов в четыре разновидности двумерного многообразия — в цилиндр, тор, лист Мёбиуса и в бутылку Клейна, особенности вложений и их сравнения между собой можно найти в [271]. Приведем характерные результаты по исследованиям укладок (вложений) графов в тор.

Укладки на торе. Пусть $T_1(G)$ и $T_2(G)$ — триангуляции тора T, которым соответствует граф G с множеством вершин $V=\{1, 2, \ldots, n\}$. $T_1(G)$ и $T_2(G)$ называются существенно различными, если найдутся три вершины i, j, k графа G, принадлежащие одной (некоторой) грани в $T_1(G)$ и не принадлежащие ни одной общей грани в $T_2(G)$. Триангуляции $T_1(G)$ и $T_2(G)$ изоморфны, если существует биекция $\varphi: V(T_1(G)) \to \to V(T_2(G))$ такая, что $(\varphi(i), \varphi(j))$ является ребром в $T_2(G)$, $(\varphi(i), \varphi(j), \varphi(k))$ является гранью в $T_2(G)$ тогда и только тогда, когда (i, j) — ребро $T_1(G)$, (i, j, k) — грань в $T_1(G)$. Граф G, соответствующий $T_1(G)$, однозначно вложим в тор, если любая другая триангуляция $T_2(G)$ тора, существенно отличная от $T_1(G)$, изоморфна $T_1(G)$. В работе [196] описано построение бесконечного множества триангуляций тора связности 5, которым соответствуют графы, не единственно вложимые в тор.

Тороидальное число расщепления $r(G, T)$ графа G равно наименьшему числу k такому, что G может быть получен из графа T, вложимого в тор, в результате k отождествлений пар вершин. С помощью применения аппарата графов токов в [170], [172] показано, что $r(K_n, T)=0$ для $n<8$ и $r(K_n, T)= =\left[\frac{(n-3)(n-4)}{6}\right]-2$ для $n \geqslant 8$.

Тороидальной толщиной $t_1(G)$ графа G [57] называется минимальное число k такое, что G можно представить в виде объединения k его подграфов, каждый из которых вкладывается в тор. Эта характеристика вычислена для ряда классов графов, например, для полных r-дольных графов $(1 \leqslant r \leqslant 4)$. Для $r=4$ $t_1(K_{n,n,n,n})=\left\{\frac{n+1}{2}\right\}$, для графов G_n', получаемых из K_n удалением гамильтонова цикла ($n=4, 5, \ldots$), $t_1(G_n')=\left[\frac{n+2}{6}\right]$ (см. также [64]).

Для укладки $h: G \to T$ в тор T графа G автогомеоморфизм $\varphi': T \to T$ порождает автоморфизм $\sigma: G \to G$, если $\varphi' \circ h = h \circ \sigma$. Укладка h называется истинной, если любой автоморфизм графа G порождается автогомеоморфизмом φ'. В [227] приведены примеры, показывающие, что наличие у графа единственной укладки не предполагает ее истинности и наоборот. Особо изучались 6-регулярные графы, на множестве которых специальным образом вводится отношение эквивалентности. Описаны два критерия эквивалентности, для которых доказано, что: 1) если 6-регулярный тороидальный граф не содержит подграфов, изоморфных двум приведенным в этой работе графам, то G имеет единственную и истинную укладку на торе; 2) за исключением трех специальных случаев все тороидальные 6-регулярные графы имеют единственную укладку на торе; 3) все 6-связные тороидальные графы имеют единственную укладку на торе; 4) не все тороидальные графы-триангуляции, имеющие связность 3, 4 или 5, укладываются на торе единственным образом.

Описанный в [67] алгоритм нахождения всех автоморфизмов данной триангуляции 2-многообразия позволил в явном виде получить группы автоморфизмов всех двадцати одной неприводимой триангуляции тора (в каждой триангуляции — не более 10 вершин). Для каждой из этих триангуляций, а также ряда других особых триангуляций тора получен список всех попарно различных укладок.

Пусть $\mathcal{G}_1$ — множество всех графов, не вложимых в тор, $>_4$ — отношение, определенное на множестве всех простых графов $\mathcal{G}$ (см. [78]). В статье [79] изучается строение минимального базиса M $(\mathcal{G}_1, >_4)$ множества $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}$ относительно $>_4$. Показано, что графы $K_{3,7}$; $K_3+K_{3,3}$; $\overline{K}_2+\overline{K}_3+\overline{K}_4$; $\overline{K}_3+$ $+\overline{K}_5$; $K_3+(K_2 \cup K_3)$; $\overline{K}_2+K_{2,2}+K_2$ принадлежат к $M(\mathcal{G}_1, >_4)$, причем последние три графа исчерпывают все графы из $M(\mathcal{G}_1, >_4)$, имеющие 8 вершин. Справедлива оценка $|M(\mathcal{G}_1, >_4)| < 30$, причем 22 графа из $M(\mathcal{G}_1, >_4)$ уже найдены.

Вложения в ориентируемые и неориентируемые поверхности. Пусть $G(V, E)$ — связный граф, вложенный в поверхность S, G^* — граф, геометрически двойственный к G на поверхности S, τ — отображение множества ребер $E=E(G)$ на множество $E^*=E(G^*)$. Если S — сфера, то справедливы следующие предложения: 1) z является циклом в G тогда и только тогда, когда $\tau(z)$ есть коцикл в G^*; 2) если T — произвольное остовное дерево в G, то $\tau(E \setminus T)$ — остовное дерево в G^*; 3) множество границ граней без одной из них образует базис пространства циклов графа. Эти свойства не переносятся на более сложные поверхности. В [281]—[284] получены следующие их обобщения (первое из них было доказано Эдмондсоном): A) подмножество ребер $b \subset E$ образует граничный цикл, если и только если $\tau(b)$ является коциклом в G^*; B) если T — произвольное остовное дерево в G, то $\tau(E \setminus T)$ содержит остовное дерево в G^*; C) если T — произвольное остовное дерево в G, $C(e)$ — фундаментальный цикл, содержащий ребро $e \in E \setminus T$ в G, $E' \subset$ $\subset E \setminus T$, то $\tau(E')$ — остовное дерево в G^* тогда и только тогда, когда множество границ граней без одной из них вместе с множеством $\{C(e) \mid e \in E \setminus (T \cup E')\}$ является базисом пространства циклов графа G.

Пусть W — набор замкнутых маршрутов в графе G. Будем говорить, что пара (G, W) допускает соответствующее вложение в поверхность S (не обязательно ориентируемую), если G имеет такое 2-клеточное вложение в S, что каждый маршрут из W соответствует границе грани этого вложения. В [281] получены необходимые и достаточные условия того, что: 1) (G, W) допускает соответствующее вложение; 2) пара

(G, W), допускающая соответствующее вложение, имеет соответствующее ориентируемое вложение; 3) пара (G, W), допускающая соответствующее ориентируемое вложение, имеет соответствующее неориентируемое вложение. Обозначим через $B(W)$ множество ребер G, каждое из которых встречается дважды в W, $b(G, W)$ — число нетривиальных компонент связности графа $G \setminus B(W)$. Грани соответствующего вложения (G, W) называются внешними, если их границы не входят в W; пусть $r(G, W)$ — максимальное число внешних граней в соответствующих вложениях. Доказано, что если (G, W) допускает соответствующее вложение, то для (G, W) имеется соответствующее неориентируемое вложение с r внешними гранями для любого r, удовлетворяющего неравенствам $b(G, W) \leqslant r < r(G, W)$.

Вложения декартовых произведений регулярных графов в неориентируемые поверхности рассматривались в [242]. Пусть G_i — связные d_i-регулярные графы ($1 \leqslant i \leqslant p$), где $p \geqslant 2$, для которых хроматический класс (индекс) равен степени d_i, а H_j ($1 \leqslant j \leqslant q$) — связные графы с хроматическими классами h_j. Если выполняются условия: 1) $2 \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} d_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{p} d_i$; 2) $h_j \leqslant \leqslant \sum\limits_{i=1}^{p} d_i$ $(1 \leqslant j \leqslant q)$, то декартово произведение этих графов $G_1 \times \ldots \times G_p \times H_1 \times \ldots \times H_q$ допускает четырехугольное вложение в поверхность S, причем поверхность ориентируемая, если все графы являются двудольными, и неориентируемая в противном случае. Как следствие получаем, что для декартова произведения $\mathscr{C}$ простых циклов C_{n_i} $(1 \leqslant i \leqslant k)$, где $k \geqslant 3$, для которых n_1 и n_2 четны, n_3 нечетно и $n_i \geqslant 4$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, неориентируемый род равен $\tilde{\gamma}(\mathscr{C}) = 2 + \frac{1}{2}(k-2) n_1 \ldots n_k$.

Связный двудольный граф G допускает диагонализируемое четырехугольное вложение (ДЧ-вложение) в поверхность S, если G допускает четырехугольное вложение в S и в некоторых гранях этого вложения можно провести по одной диагонали (ребру) так, что множество выбранных диагоналей будет 1-фактором полученного графа. В статье [332] показано, что если граф G допускает ДЧ-вложение (ориентируемое или неориентируемое), то конъюнкция $G \wedge H$ с любым другим графом H допускает такое же вложение. Найдены ориентируемый и неориентируемый род конъюнкции k графов, один из которых есть связный двудольный граф, допускающий четырехугольное вложение. Отсюда вытекает, что граф $K_{2n,2m}$ допускает ДЧ-вложение, ориентируемое для $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ и неориентируемое для $n \geqslant 1$, $m \geqslant 2$; граф $C_{2n} \wedge C_m$ допускает ориентируемое ДЧ-вложение, а граф $C_4 \wedge C_m$ допускает неориентируемое ДЧ-вложение.

Разработаны конструкции графов тока индекса 2 и 3, позволяющие значительно расширить множество графов вида $K_n - K_m$, для которых построены треугольное ориентируемое и неориентируемое вложения. Так, в [26] получены результаты такого типа: треугольное неориентируемое вложение имеет граф $K_{12p+6+2t} - K_{2t}$ для $p \geqslant 2$, $t = 1, 2, \ldots, 3p-3$.

Для графа $G_{n,m,k}$, полученного из полного двудольного графа $K_{n,m}$ с помощью удаления произвольного множества k попарно несмежных ребер (k-паросочетания), в [220] вычислен неориентируемый род. Граф G называется k-расширяемым, если любое его k-паросочетание есть подмножество n-паросочетания ($k \leqslant (n-2)/2$). В [243] доказано, что граф G, имеющий ориентируемый род $\gamma = \gamma(G) > 0$, не является $\left[\frac{9}{2} + 18(\gamma - 1)/(7 + \sqrt{48\gamma - 47})\right]$-расширяемым.

В работе [262] доказывается теорема о максимальном роде графа G в терминах запрещенных подграфов (аналог теоремы Понтрягина—Куратовского), и на ее основе описывается алгоритм нахождения максимального рода $\gamma_M(G)$. С помощью этого алгоритма найдены значения γ_M для двух стандартных графов $\gamma_M(K_n)$ и $\gamma_M(K_{n,m})$.

Для графа $G_{n,m,k}$, получаемого из полного двудольного графа $K_{n,m}$ с помощью удаления произвольного множества k попарно несмежных ребер, в работе [200] вычислен неориентируемый род.

Обобщенный род графа G есть число $\hat{\gamma}(G) = \min\{2\gamma(G), \tilde{\gamma}(G)\}$, где $\gamma(G)$ — ориентируемый род G, а $\tilde{\gamma}(G)$ — неориентируемый род G. Граф G называется ($\tilde{\gamma} \geqslant k$)-критическим (несводимым для S_{k-1}), если G не вкладывается в неориентируемую поверхность S_{k-1} рода $k-1$, но любой его собственный подграф вложим в S_{k-1}. В [63] доказано существование такой функции $f: N \to N$, что для любого кубического графа G и любого натурального $k \in N$, если G является ($\tilde{\gamma} \geqslant k$)-критическим, то $|V(G)| \leqslant f(k)$. Доказано также, что при любом m множество кубических графов, не сводимых для S_m, конечно. Техника доказательства здесь основана на топологии отождествления границ 2-клеток вложения. Для кубического 2-связного графа H, у которого каждая область любого вложения H в поверхность S является открытой 2-клеткой, получена оценка для числа $\Phi_H^{(s)}$ попарно неэквивалентных вложений H в S, именно, $\Phi_H^{(s)} \leqslant \left(\frac{3}{2} n \cdot 3^{3n}\right)^{(n+2)/2}$.

Пусть S — поверхность, которая получается из сферы добавлением k листов Мёбиуса и h ручек. Величина $k+2h$ называется эйлеровым родом поверхности S, а эйлеровым родом

$\varepsilon(G)$ графа G называется наименьшее значение эйлерова рода поверхности, в которую вкладывается G. Если два графа G и H обладают тем свойством, что $G \cap H$ состоит из двух изолированных вершин v и w, то, как показано в [251], $\varepsilon(G \cup H) = \min\{\varepsilon(G+vw)+\varepsilon(H+vw),\ \varepsilon(G)+\varepsilon(H)+2\}$.

В работе [219] изучаются вложения локально конечных связных графов в некомпактные поверхности. Вводятся понятия рода поверхности, 2-клеточного вложения графа. Показывается, что вращение локально конечного графа G индуцирует 2-клеточное вложение G с гранями конечного размера и что каждое 2-клеточное вложение графа G с гранями конечного размера можно получить только так. Получена характеризация таких графов. Доказано, что локально конечный непланарный граф конечного рода имеет конечную группу автоморфизмов.

Понятие различных 2-клеточных ориентируемых вложений связного графа G в работе [223] определяется таким образом, что задача их перечисления сводится к задаче перечисления эквивалентных классов отношения эквивалентности, заданного на множестве всех вращений графа G. Вращение ρ_v вершины v графа G — это циклическая перестановка вершин, смежных v. Вращение графа определяется как набор вращений всех его вершин. Вращения ρ и σ графа G называются эквивалентными, если существует такая перестановка $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, что $\alpha\rho_v\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(v)}$ для каждой вершины $v \in V(G)$. В работе [181] предложен метод нахождения числа эквивалентных классов $|C(G)|$ на множестве всех вращений графа G. В качестве примеров найдены значения $|C(G)|$ для полного графа K_n и для колеса W_{n+1} с $n+1$ вершинами. Показано, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|C(K_n)|}{(n-2)!\, n/n!} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|C(W_{n+1})|}{2^n (n-1)!/2n} = 1$.

§ 3. Нетрадиционные топологические представления графов

Топологические представления графов имеют не только большой теоретический интерес, но и играют значительную роль в приложениях. Поэтому поток работ по этой тематике не иссякает. По-прежнему продолжается исследование традиционных топологических представлений графов. В частности, за последнее время получен ряд новых критериев планарности графов [19], [49], [106], предложен ряд обобщений внешнепланарных графов [32], [236], [272] и, в частности, найдена характеризация планарных графов, могущих быть уложенными на плоскость так, чтобы заданное подмножество вершин принадлежало внешней грани [32], [236], продолжалось изучение различных мер непланарности графов [141], [172], [215], [319] и т. д.

Например, в [49] доказан следующий критерий планарности графов, сформулированный как гипотеза в [203]: граф непланарен тогда и только тогда, когда он содержит максимальное нечетное точное кольцо связей.

Не останавливаясь более подробно на такой традиционной тематике, хорошо освещенной в литературе (см., например, книгу [15]), рассмотрим топологические представления графов, возникшие в последние годы и находящие широкое применение в приложениях.

Как известно, любой планарный граф можно уложить на плоскость так, чтобы его ребра представлялись прямолинейными отрезками (см. [15], с. 247). Известны два обобщения этого результата: выпуклое и решетчатое изображения планарного графа.

Выпуклым изображением планарного графа G называется плоская укладка G, в которой граница каждой грани является выпуклым многоугольником. Характеризация планарных графов, допускающих выпуклое изображение, дана в [301]. В частности, каждый 3-связный планарный граф допускает выпуклое изображение [310]. Выпуклое изображение, если оно существует, строится за $O(n)$ операций, где n — число вершин [97], [96].

Решетчатым изображением планарного графа G называется плоская укладка G такая, что все вершины G размещены в узлах целочисленной решетки, а ребра G представляются ломаными, все точки изгиба которых тоже размещены в узлах решетки. Каждый планарный граф допускает решетчатое изображение. Важными количественными характеристиками решетчатого изображения, играющими большую роль в задачах проектирования электрических схем и визуализации графов (представления графа на экране дисплея в удобном для человеческого восприятия виде), являются его площадь и общее число точек перегиба в ломаных, представляющих ребра [69], [292], [294], [296]. В [330] показано, что каждый планарный n-вершинный граф допускает решетчатое представление площади $O(n^2)$ с числом точек перегиба $O(n^2)$.

Примерами менее тривиальных представлений планарного графа являются представления, в которых не только ребра, но и вершины графа представляются прямолинейными отрезками [235], [300], [115], [297], [205], [260]. Следуя [297], [108], будем называть такие представления *представлениями видимости*. В литературе также встречается термин «графы видимости» [205], но мы не будем употреблять его во избежание путаницы, так как часто под графом видимости семейства отрезков S понимают граф, вершинами которого являются концевые точки отрезков и в котором любые две вершины смежны тогда и только тогда, когда соединяющий их отрезок не пересекает ни одного отрезка из S (см., например, [275], [317]).

Пусть $S=\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ есть семейство непересекающихся горизонтальных прямолинейных отрезков на плоскости. Два отрезка s_i, s_j видимы, если их можно соединить вертикальным отрезком, не имеющим общих точек с другими отрезками из S. Отрезки s_i, s_j ε-видимы, если их можно соединить вертикальной полосой ненулевой ширины так, чтобы она не имела общих точек с другими отрезками из S. Ясно, что это определение эквивалентно следующему: отрезки s_i, s_j ε-видимы, если их можно соединить двумя различными вертикальными сегментами так, чтобы ни один из них не имел общих точек с другими сегментами из S.

Представлением w-видимости графа G называется отображение вершин G в множество неперекрывающихся горизонтальных отрезков (называемых вершинами-отрезками) и ребер G в множество вертикальных отрезков такое, что для каждого ребра $(u, v)\in E$ ассоциированное с ним ребро-отрезок имеет концевые точки на вершинах-отрезках, соответствующих u и v, и не пересекает никаких других ребер-отрезков.

Представлением ε-видимости (s-видимости) графа G называется его представление w-видимости, в котором любые две вершины-отрезка ε-видимы (видимы) тогда и только тогда, когда соответствующие вершины G смежны. Отметим, что существует эквивалентное определение представлений ε-видимости, принадлежащее Л. С. Мельникову и рассматривавшееся в [300]: представлением ε-видимости графа G называется отображение вершин G на множество S неперекрывающихся горизонтальных интервалов такое, что любые два интервала видимы тогда и только тогда, когда соответствующие вершины смежны.

Ясно, что граф G, допускающий любое из трех вышеопределенных представлений видимости, является планарным. Соответствующая плоская укладка G может быть получена стягиванием каждой вершины-отрезка в точку. Также ясно, что любой граф, допускающий представление ε-видимости, допускает представление s-видимости, но не наоборот. Примером планарного графа, допускающего представление ε-видимости, но не s-видимости, может служить полный двудольный граф $K_{2,4}$ [297].

В [235] был описан алгоритм построения представления w-видимости произвольного 2-связного графа, имеющий линейную сложность [297], а в [115] показано, что любой планарный граф имеет такое представление. Линейный алгоритм для построения представления w-видимости произвольного планарного графа описан в [297].

Характеризация графов, допускающих представление ε-видимости, получена в [297], а именно, там показано, что граф G допускает представление ε-видимости тогда и только тогда, когда существует укладка G на плоскость такая, что все точки сочленения G (если они есть) лежат на границе одной и той же грани. Там же описан линейный алгоритм построения ε-видимости.

Представления s-видимости рассматривались в [297], [205]. В [297] получена характеризация графов, допускающих представление s-видимости. В частности, там показано, что для максимальных планарных графов и 4-связных графов такое представление можно построить за $O(n)$ и $O(n^3)$ операций соответственно. Известна также характеризация графов, допускающих представление s-видимости, в котором концевые вершины всех горизонтальных отрезков имеют различные абсциссы [205].

Понятия видимости отрезков и графов видимости возникают и используются в задачах проектирования сверхбольших интегральных схем [270], [297], [292].

В литературе [188], [108] также рассматривались аналоги этих представлений для случая орграфов. Ациклические орграфы широко используются в приложениях для представления иерархических структур. Примерами таких структур могут служить сетевые графики (PERT-диаграммы), графы связи подпрограмм по вызову, диаграммы Хассе и т. д. Поэтому задача визуализации иерархических структур и ациклических орграфов представляет большой интерес и интенсивно исследуется в настоящее время (см., например, [188], [108], [92], [107], [118], [294], [315]).

Плоскую укладку орграфа G будем называть изображением вверх (upward drawing), если каждая дуга G представляется прямолинейным отрезком и вершина v лежит выше вершины u всякий раз, когда в G есть дуга (u, v). Ясно, что орграф G допускает изображение вверх только в том случае, когда он ациклический.

Монотонное решетчатое изображение орграфа G определяется как плоская укладка G такая, что вершины G лежат в узлах решетки и дуги G представляются ломаными, соединяющими узлы решетки с неубывающими ординатами.

Ориентированное представление видимости орграфа G отображает каждую вершину v в горизонтальный отрезок $\sigma(v)$ и каждую дугу (u, v) в вертикальный отрезок $\sigma(u, v)$ так, что ребро-отрезок $\sigma(u, v)$ имеет нижний конец в $\sigma(u)$, верхний — в $\sigma(v)$ и не пересекается ни с какой другой вершиной-отрезком $\sigma(w)$, где $w \neq u, v$.

В [108] показано, что монотонное решетчатое изображение и ориентированное представление видимости строятся за $O(n)$ операций, а изображение вверх за $O(n \log n)$ операций. Характеризации орграфов, допускающих такие представления, получены в [188], [108]. А именно, орграф G называется st-орграфом, если он является ациклическим, содержит ровно один источник s, один сток t и содержит дугу (s, t). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) Граф G есть планарный подграф st-орграфа;
2) G допускает изображение вверх;
3) G допускает монотонное решетчатое изображение;
4) G допускает ориентированное представление видимости.

Эквивалентность $1 \Leftrightarrow 2$ была доказана в [188], а позднее в [108] была доказана эквивалентность всех 4-х утверждений.

Близка к рассмотренной задача о визуализации иерархических структур [92], [294], [315]. Иерархическая структура обычно представляется орграфом, множество вершин которого разбито на непересекающиеся подмножества — уровни иерархии. Уровни иерархии можно задавать по-разному [92], но чаще всего их определяют следующим образом. Уровень $l(x)$ вершины x ациклического орграфа G равен $r(x)+1$, где $r(x)$ — длина максимального пути, выходящего из x. Если G не является ациклическим, то каждая сильно связная компонента G стягивается в вершину, в полученном орграфе вычисляются уровни иерархии, и каждой вершине G приписывается уровень иерархии той вершины, в которую она стягивается.

При визуализации орграфа он укладывается на плоскость так, чтобы вершины одного уровня лежали на одной и той же горизонтальной прямой, уровни размещались последовательно сверху вниз, дуги, соединяющие вершины разных уровней, представлялись прямолинейными отрезками и число пересечений дуг было минимально. Если орграф имеет только один источник (вершину, в которую не заходит ни одна дуга), то за $O(n)$ операций можно проверить, допускает ли он планарную визуализацию, т. е. визуализацию без пересечений дуг [107]. В общем же случае задача минимизации числа пересечений NP-трудна и остается таковой даже для орграфов только с двумя уровнями иерархии [119]. Различные приближенные алгоритмы минимизации числа пересечений дуг в визуализации можно найти в [92], [118], [294], [315].

И наконец, завершая параграф, опишем нетривиальный пространственный аналог понятий планарности и непланарности графа, предложенный в [263].

Известно, что любой граф G можно вложить в евклидово пространство E^3 так, чтобы его вершины представлялись точками, а ребра — кривыми, пересекающимися только по инцидентным им вершинам. Назовем такую укладку топологическим представлением графа G. Ясно, что любому циклу G соответствует в его топологическом представлении замкнутая кривая, гомеоморфная окружности. Два непересекающихся по вершинам цикла графа G зацеплены в его топологическом представлении, если они не могут быть вложены в два непересекающихся замкнутых топологических шара, т. е. в два непересекающихся гомеморфных образа шара в E^3. Граф называется расцепляемым, если он допускает топологическое представление, не содержащее ни одной пары зацепленных циклов, в противном случае он называется нерасцепляемым.

Ясно, что любой планарный граф расцепляем, но обратное уже неверно. Тривиальными контрпримерами могут служить полный граф K_5 и полный двудольный граф $K_{3,3}$.

Расщепляемость можно рассматривать как пространственный аналог планарности. Поэтому в [263], где было введено это понятие, было предложено искать для нее какие-то аналоги теорем о планарности. На настоящий момент найдено два таких аналога. В [231] для расщепленных графов получен аналог критерия планарности Понтрягина—Куратовского, а именно, доказано, что произвольный граф является расщепляемым тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных графам из некоторого конечного семейства. Данное в [231] доказательство неконструктивно и не содержит явного описания такого семейства, но некоторые входящие туда графы известны. Например, в него входит полный граф K_6, полный двудольный граф $K_{4,4}$ и граф Петерсена [263]. В [231] для расщепляемых графов найден также аналог теоремы 4-х красок, а именно, показано, что хроматическое число $\chi(G)$ расщепляемого графа G не превышает 6. Более того, если гипотеза Хадвигера справедлива для $k=6$ (т. е. если каждый граф G с $\chi(G)\geqslant 6$ содержит подграф, стягиваемый к K_6), то для каждого расщепленного графа G $\chi(G)\leqslant 5$ [231].

§ 4. Метрические и алгебраические представления графов в арифметических пространствах

В предыдущем параграфе рассматривались представления графов как графов пересечений клеток, единичных кубов и единичных сфер евклидова пространства E^m. Легко видеть, что такие представления можно определить не в терминах пересечений, а в терминах вложений в m-мерное арифметическое пространство R^m с метрикой Минковского, в котором расстояние между векторами $a=(a_1, \ldots, a_m)$, $b=(b_1, \ldots, b_m)$ вычисляется по следующей формуле:

$$d_p(a, b)=\| a-b \|_p=\left(\sum_{i=1}^{m} | a_i-b_i |^p\right)^{1/p}.$$

Например, граф G есть граф пересечений единичных шаров евклидова пространства E^m тогда и только тогда, когда существует отображение f вершин G в точки R^m такое, что любые две вершины x, y смежны тогда и только тогда, когда $d_2(f(x), f(y))\leqslant 1$. Ясно, что точки $f(x)$ есть центры соответствующих сфер в определении графа пересечений. Заменяя здесь евклидову метрику $d_2(a, b)$ на метрику $d_\infty(a, b)=\max_i |a_i-b_i|$, мы получим графы пересечений единичных кубов. А сопоставляя дополнительно каждой вершине x некоторую положительную константу $\alpha(x)$ и заменяя в неравенстве $d_p(f(x), f(y))\leqslant 1$, где $p=2$ или $p=\infty$, константу 1 на $\alpha(x)+$ $+\alpha(y)$, получим, в зависимости от выбора p, или граф пересечения произвольных шаров, или граф пересечения произвольных кубов в E^m.

Точно так же, усиливая или ослабляя требование «вершины x, y смежны тогда и только тогда, когда $d_p(f(x), f(y))\leqslant 1$», мы можем получить другие типы представления графов, отличные, вообще говоря, от графов пересечений.

В [168], [212] рассматривалась евклидова размерность $e(G)$, равная минимальному m, для которого существует отображение f вершин G в точки евклидова пространства E^m такое, что вершины x, y смежны тогда и только тогда, когда $d_2(f(x), f(y))=1$. Известны точные значения евклидовой размерности для некоторых простых графов, и в [168] получена оценка $e(G)\leqslant 2\chi(G)$, где $\chi(G)$ — хроматическое число, для произвольного графа. Отметим еще, что в [213] показано, что дерево можно вложить в R^3 так, что для смежных вершин x, y $d_2(f(x), f(y))=1$, а для несмежных — $d_2(f(x), f(y))<1$, откуда следует оценка $e(T)\leqslant 3$ для произвольного дерева T.

Как уже отмечалось выше, при представлении графа графом пересечений единичных шаров или кубов расстояние в соответствующей метрике между образами $f(x)$, $f(y)$ вершин x, y не больше единицы, если эти вершины смежны, и больше единицы, если они не смежны. Обобщением такого представления является изометрическое вложение графа в метрическое пространство. Граф $G(V, E)$ изометрически вкладывается в метрическое пространство (M, d_M), где M — множество точек пространства, d_M — его метрика, если существует отображение $f: V\to M$ такое, что для всех пар вершин x, y $d_M(f(x), f(y))=$ $=d_G(x, y)$, где $d_G(x, y)$ — расстояние между вершинами x, y в графе G.

Рассмотрим изометрические вложения графов в пространства R^m с метрикой Минковского d_p (будем обозначать такие пространства R_p^m). Известно, что для любого p, $1\leqslant p<\infty$, существуют графы, невложимые в R_p^m ни для какого m [176], а при $p=\infty$, как мы увидим ниже, любой граф изометрически вложим в R_∞^m для некоторого m. Представляют наибольший интерес и наиболее исследованы случаи $p=1$ и $p=\infty$.

В [176] получена неконструктивная характеризация графов, изометрически вложимых в пространство $R_1{}^m$, а именно, показано, что граф изометрически вложим в $R_1{}^m$ для некоторого m тогда и только тогда, когда его матрицу расстояний можно представить в виде некоторой линейной комбинации элементарных матриц, являющихся экстремальными элементами множества полуметрик пространства вещественных матриц. Более известно об изометрических вложениях в единичный куб пространства $R_1{}^m$, т. е. в булев куб B^m. Вершинами B^m являются наборы из нулей и единиц длины m, и расстояние $d_1(a, b) = \Sigma|a_i - b_i|$ совпадает в этом случае с расстоянием Хемминга $d_H(a, b) = \Sigma \operatorname{sign}|a_i - b_i|$, равным числу позиций, в которых наборы a и b не совпадают. Задача характеризации графов, изометрически вложимых в B^m, была поставлена в [46] и решена в [113], [48].

Множество вершин A графа G выпуклое, если все вершины всех кратчайших простых цепей G, соединяющих вершины из A, лежат в A. Для любого ребра $e = (x, y)$ графа G положим $W_x(e) = \{z | d_G(x, z) < d_G(y, z)\}$, $W_y(e) = \{z | d_G(y, z) < d_G(x, z)\}$, $W(e) = \{z | d_G(x, z) = d_G(y, z)\}$. В [113] было показано, что граф G изометрически вложим в B^m для некоторого m тогда и только тогда, когда G двудолен и для любого его ребра $e = (x, y)$ множества $W_x(e)$ и $W_y(e)$ выпуклы. Отметим еще, что G изометрически вложим в B^m тогда и только тогда, когда любое его 5-вершинное множество изометрически вложимо в B^m [48]. Там же получена конструктивная характеризация графов, изометрически вложимых в B^m для некоторого m. Описанные характеризации позволяют определить, существует ли изометрическое вложение графа G в B^m для некоторого m, но не дают ответа на вопрос, для каких именно m оно существует. Ответ на этот вопрос дан в [161], где было показано, что если граф G изометрически вкладывается в булев куб B^m, то наименьшее m, для которого такое вложение существует, равно числу отрицательных собственных значений матрицы расстояний G.

Известны два обобщения изометрических вложений в булев куб: изометрические вложения в декартовы произведения графов [324], [48], [160], [161] и задача об адресации вершин графа [158], [159], [323].

Пусть графы $G_1, G_2, \ldots, G_m$ имеют множества вершин $V_1 = \{0, 1, \ldots, n_1 - 1\}, \ldots, V_m = \{0, 1, \ldots, n_m - 1\}$ соответственно. Декартовых произведением $G = G_1 \times G_2 \times \ldots G_m$ графов $G_1, G_2, \ldots, G_m$ называется граф, вершинами которого являются упорядоченные наборы $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, где $x_i \in V_i$ для всех i, и в котором любые две вершины $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ смежны тогда и только тогда, когда для некоторого i (x_i, y_i) есть ребро в G_i, а для всех $i \neq j$ $x_i = x_j$. Декартово произведение полных графов называется графом Хемминга. Ясно, что в графе Хемминга G расстояние $d_G(x, y)$ между вершинами графа равно расстоянию Хемминга $d_H(x, y)$ между соответствующими наборами, т. е. равно числу позиций, в которых эти наборы не совпадают. Ясно также, что булев куб B^m есть декартово произведение m полных графов K_2.

Изометрические вложения графов в графы Хемминга изучались в [324], [48]. Зададим на множестве ребер G отношение θ следующим образом: для любых двух ребер $e = (x, y)$, $f =$

$=(u, v)$ графа G $e\theta f$ тогда и только тогда, когда $d_G(x, u) + d_G(y, v) \neq d_G(x, v) + d_G(y, u)$. В [324] показано, что граф изометрически вложим в декартово произведение полных графов K_3 тогда и только тогда, когда отношение θ транзитивно. В этой же работе описан алгоритм, который за $O(n^5)$ операций распознает, существует ли изометрическое вложение n-вершинного графа в граф Хемминга, и строит его, если такое вложение существует. Явные характеризации графов, изометрически вложимых в графы Хемминга, получены в [48]. В частности, там показано, что каждое из двух нижеприведенных условий является необходимым и достаточным условием изометрической вложимости графа G в граф Хемминга: 1) для любого ребра $e=(x, y)$ графа G как сами множества $W_x(e)$, $W_y(e)$, $W(e)$, так и их дополнения выпуклы; 2) любое 5-вершинное подмножество G изометрически вложимо в граф Хемминга. И, наконец, в [48] получена конструктивная характеризация изометрических вложений в граф Хемминга в терминах так называемых изометрических расширений: граф изометрически вложим в граф Хемминга тогда и только тогда, когда он может быть получен из одновершинного графа последовательностью изометрических расширений.

Изометрические вложения графов в декартовы произведения произвольных графов и конечных метрических пространств изучались в [160], [161] (см. также обзор [326]), где, в частности, для каждого графа G было построено так называемое каноническое изометрическое вложение G в декартово произведение его факторов, удовлетворяющее требованиям неизбыточности и нередуцируемости. В [99] показано, что не существует конечного метрического пространства X, обладающего тем свойством, что любой граф изометрически вложим в некоторую декартову степень X. Отметим еще, что произвольный граф изометрически вложим в декартово произведение деревьев (в декартово произведение графов, все блоки которых являются полными графами) тогда и только тогда, когда он изометрически вложим в булев куб (в граф Хемминга) [48].

Другим обобщением задачи вложения графа в булев куб B^m является задача адресации вершин графа [158], [159], возникшая в теории сетей ЭВМ и состоящая в следующем. Необходимо приписать каждой вершине графа G адрес — слово длины m в алфавите $\{0, 1, *\}$ таким образом, чтобы расстояние между любыми двумя вершинами графа было равно расстоянию между их адресами. Расстояние между адресами $x = x_1x_2\ldots x_m$, $y = y_1y_2\ldots y_m$ по определению равно числу позиций i, для которых $x_i \neq *$, $y_i \neq *$ и $x_i \neq y_i$. Иными словами, расстояние между адресами равно числу позиций, в которых они не совпадают, в предположении, что позиции, содержащие символ «*», не учитываются. В [158], [159] показано, что при достаточно большом m может быть адресован любой граф.

Там же описан алгоритм построения адресации произвольного графа. Обозначим через $N(G)$ минимальное m, для которого существует адресация графа G. Известно, что $N(G) \geqslant \max(n^+, n^-)$, где n^+ (соответственно n^-) есть число положительных (соответственно отрицательных) собственных значений матрицы расстояний графа [158], [159], [239]. В [323] показано, что $N(G) \leqslant n-1$, где n — число вершин G. Эта оценка достигается на полном графе [158], [159] и на деревьях [158], [159].

Задача адресации вершин сильно связного орграфа рассматривалась в [99]. Если для неориентированного графа расстояние между адресами x, y равно числу позиций i, для которых $\{x_i, y_i\} = \{0, 1\}$, то в ориентированном случае расстояние от x до y равно числу позиций i, для которых $x_i = 0$ и $y_i = 1$, а расстояние от y до x равно числу позиций i, для которых $x_i = 1$, $y_i = 0$. В [99] показано, что для любого сильно связного орграфа $N(G) \leqslant (3n^2/4) + O(n)$; с другой стороны, для любого n найдется G с $N(G) \geqslant (n^2/8) + O(n)$. Таким образом, с переходом к ориентированому случаю сложность задачи адресации значительно возрастает.

Возвращаясь к изометрическим вложениям в R_p^m, рассмотрим случай $p = \infty$, для которого $d_\infty(x, y) = \max\limits_i |x_i - y_i|$. В [329], [328] показано, что любой n-вершинный граф изометрически вкладывается в R_∞^{n-2}, а из результатов [51] следует, что любой n-вершинный граф изометрически вкладывается в R_∞^{n-d}, где d — диаметр графа.

Более того, как показано в [51], любой граф G можно вложить в R_∞^m таким образом, что точки R_∞^m, где $m \leqslant n-d$, соответствующие вершинам G, образуют подматрицу матрицы расстояний G. А именно, пусть $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ есть некоторое подмножество вершин G. Будем говорить, что множество A задает G, если для любых двух вершин x, y графа G

$$d_G(x, y) = \max_i |d_G(x, a_i) - d_G(y, a_i)|.$$

Нетрудно убедиться, что любой граф имеет хоть одно задающее его множество. В частности, любое множество A с $m \geqslant n-1$ задает G. Мощность минимального задающего G множества называется сложностью задания G и обозначается $l(G)$. В [51] получена характеризация задающих G множеств, дающая алгоритм их построения, и получены точные верхние и нижние оценки $l(G)$ через число вершин n и диаметр d графа G. В частности, там показано, что $l(G) \leqslant n-d$.

Из определения задающего граф G множества A следует, что, сопоставляя каждой вершине x графа G точку $(d_G(x, a_1), d_G(x, a_2), \ldots, d_G(x, a_m))$ пространства R_∞^m, мы получим изометрическое вложение G в R^m_∞. Это означает изометрическую вложимость G в R^m_∞ для всех $m \geqslant l(G)$ и, в частности, вложимость в R^{n-d}_∞. Так как любое изометрическое вложение G в R^m_∞ порождает представление G как графа пересечений единичных кубов в E^m, то отсюда также вытекает оценка кубичности $\mathrm{cub}(G) \leqslant \leqslant l(G) \leqslant n-d$. В силу специального характера описанного вложения, отсюда еще не следует отсутствие изометрической вложимости G в R^m_∞ при $m < l(G)$, но более точных оценок на настоящий момент неизвестно. Отметим также, что в [169] изучалась задача изометрического вложения в R^2_∞.

Эти же результаты можно рассматривать и с другой точки зрения. А именно, из определения задающего граф G множества A следует, что подматрица матрицы расстояний, образованная столбцами, соответствующими вершинам из A, однозначно задает G. Поэтому представляет интерес задача о нахождении частей матрицы расстояний графа, достаточных для его задания.

Известно [39], что дерево однозначно задается матрицей расстояний между его висячими вершинами (вершинами степени 1). Если же дерево взвешенное, то матрица расстояний между его висячими вершинами определяет дерево с точностью до вершин степени 2 [89]. Более того, произвольная матрица расстояний $D = \|d_{ij}\|$ является матрицей расстояний между висячими вершинами некоторого дерева тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию четырех вершин [14], [277], [90]: для любых i, j, k, l из трех сумм $d_{ij}+d_{kl}$, $d_{ik}+d_{jl}$, $d_{il}+d_{jk}$ две равны и не меньше третьей. Эти результаты имеют очень широкую область применения. Так, взвешенные деревья с введенной на них метрикой являются удобным способом представления разного рода объектов и структур, возникающих в самых различных областях знаний от теории групп [182], [114] до биологии [31], [127], [53], психологии [102], [264] и классической филологии [89], и во всех них возникает задача представления матриц расстояний деревьями.

В [7] показано, что для задания дерева достаточно знать расстояния от его висячих вершин до вершин, смежных с ними, а в [52], [93] установлено, что дерево с p висячими вершинами задается $2p-3$ специальным образом выбранными элементами его матрицы расстояний.

Вопрос о представимости произвольного графа матрицей расстояний между вершинами некоторого собственного подмножества его вершин рассматривался в [50], [55]. В [55], например, показано, что птолемеев граф однозначно задается матрицей расстояний между его экстремальными вершинами. Вершина графа экстремальная, если она является концевой вершиной некоторой максимальной по вложению кратчайшей простой цепи графа [50], а граф птолемеев, если он хордовый и любая его порожденная простая цепь является кратчайшей (другие характеризации птолемеевых графов см. в [177], [40], [66], [47]).

И, наконец, метрическая характеризация деревьев, основанная на условии 4-х вершин, допускает неметрическое обобщение, имеющее приложения в математической психологии [100] и молекулярной биологии [54], [65].

Пусть $S=\{1, \ldots, p\}$ есть множество висячих вершин некоторого взвешенного дерева T. Определим на S^4 функцию древовидности f_T следующим образом: $f_T(i, j, k, l)=1$, если все вершины i, j, k, l различны и $d_{ij}+d_{kl}<\min\{d_{ik}+d_{jl}, d_{il}+d_{jk}\}$; $f_T(i, j, k, l)=0$, если все вершины i, j, k, l различны и $d_{ij}+d_{kl}=d_{ik}+d_{jl}=d_{il}+d_{jk}$; во всех остальных случаях f_T не определена. В [100] показано, что функция f_T определяет дерево T с точностью до вершин степени 2 и конкретных значений длин ребер, а характеризации функций древовидности получены в [100], [65], [54].

Рассмотрим теперь представления графов, использующие вложения в R^m, не являющиеся изометрическими, и, в первую очередь, представления, использующие скалярное произведение для задания смежности вершин.

Система векторов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из R^m образует m-мерное представление n-вершинного графа G, если для любых двух различных вершин v_i, v_j скалярное произведение соответствующих векторов x_i, x_j отрицательно, если v_i и v_j смежны, и равно 0 в противном случае. Как указано в [238], любой n-вершинный граф имеет m-мерное представление, причем это представление можно выбрать так, чтобы входящие в него вектора были линейно независимы. Другим возможным ограничением на такие представления может быть требование, чтобы их вектора лежали в некотором подмножестве R^m. В [238] рассматривались m-мерные представления, в которых все вектора лежат в $\{-1, 1\}^m$, т. е. имеют компоненты из $\{0, 1\}$. Пусть $\dim(G)$ равно минимальному m, для которого граф G имеет такое представление. Известно, что $n/2\leqslant\dim(G)<2(\Delta+1)n\leqslant 2n^2$, где Δ — максимальная степень G. Нижняя оценка точна, а что касается верхней, то в [238] указывается, что авторам неизвестны графы, для которых $\dim(G)$ была бы нелинейна.

Другой вариант представления графов, использующего скалярное произведение для задания смежности вершин, рассматривался в [28]. Система $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ m-мерных векторов булева куба B^m образует m-представление n-вершинного графа G, если любые две его вершины v_i, v_j смежны тогда и только тогда, когда скалярное произведение векторов x_i, x_j равно 1. В [28] показано, что любой граф имеет m-представление при $m\leqslant n-1$, причем эта оценка неулучшаема и достигается на простой цепи P_n.

Еще один пример не использующего метрики представления графа векторами булева куба B^m дает граф запросов [200], [325].

Графы запросов возникают в теории статистических баз данных в задачах, связанных с обеспечением секретности индивидуальных записей в базу данных [98], [200]. Пусть V есть некоторое множество векторов из B^m, называемых ключами. Строка длины m в алфавите $\{0, 1, *\}$ называется запросом. Ключ $v = (v_1, \ldots, v_m)$ и запрос $q = (q_1, \ldots, q_m)$ соответствуют друг другу, если для всех i либо $v_i = q_i$, либо $q_i = *$. Граф запросов $Q(V)$ имеет множество вершин V, и любые две вершины u, v смежны тогда и только тогда, когда существует запрос q такой, что u и v являются единственными ключами, соответствующими запросу q. В [200] было показано, что граф запросов всегда связен, и был поставлен вопрос, каждый ли связный граф может быть представлен как граф запросов. Положительный ответ на него дан в [325].

И, наконец, в [11] рассматривалось так называемое аналитическое представление графов (не обязательно неориентированных), состоящее в следующем. Пусть $\mathcal{F}(x, y)$ есть некоторая вещественная функция от двух аргументов. Граф G с множеством вершин $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ имеет $\mathcal{F}$-представление, если можно указать числовые множества $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и U, называемые соответственно множеством вершин и множеством образующих, если любые две вершины v_i, v_j смежны тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}(x_i, x_j) \in U$. $\mathcal{F}$-представление, для которого $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, называется примитивным, а $\mathcal{F}$-представление с минимальным по мощности множеством U называется минимальным. В [11] рассматривались квадратичная и линейная функции $\mathcal{F}$, а в [10], [4], [5] получены примитивные и минимальные представления некоторых простых классов графов для функции $\mathcal{F}(x, y) = x + y$.

§ 5. Представление графов с помощью операций

Если граф G состоит из нескольких малосвязанных подграфов G_i то естественно, что отдельное задание графов $\{G_i\}$ и множества ребер, соединяющих их, экономнее, чем задание графа G целиком. Большинство графов так не устроены. Именно, из работы [23] следует, что для любого r $(1 \leqslant r \leqslant n-1)$ число ребер, соединяющих произвольные r вершин с остальными $n-r$ вершинами, почти у всех графов с n вершинами асимптотически равно $r(n-r)/2$, причем $r(n-r)$ — максимально возможное число ребер между двумя множествами, имеющими r и $n-r$ вершин. Для двух задач разбиения: 1) на два равномощных подмножества, соединенных минимальным числом ребер $\left(r = \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ и 2) на два подмножества, соединенных максимальным (по мощности) множеством ребер, в [62] доказана их NP-полнота. В этой работе доказано, что для класса реберных графов обе задачи имеют полиномиальное решение.

Задача о разбиении $V=V_1 \cup V_2$ таком, что число ребер вида $(u, v) \in E$, $u \in V_1$, $v \in V_2$ не превышает фиксированного произвольного числа k, NP-полна даже для планарных графов с максимальной степенью 3, а если ребрам графа G приписаны веса, зависящие полиномиально от длины записи G, то эта задача NP-полна для деревьев. Для взвешенных деревьев с максимальной степенью d известен алгоритм, имеющий сложность $O(n \log^{d-2} n)$; для невзвешенных деревьев независимо от максимальной степени существует алгоритм, имеющий сложность $O(n \log n)$. Эти результаты содержатся в [221].

Алгоритмически сложными являются задачи о разбиении на одинаковые части, обладающие заданными свойствами, для отдельных классов графов. В [116], [110] доказывается NP-полнота задач о разбиении V (или E) на равномощные подмножества: 1) для свойства «быть связным» и любого $k \geqslant 2$ на подмножества мощности $|V|/k$ (или $|E|/k$) — для класса двудольных графов; 2) для свойства «быть звездой» разбиения E, $k=3$ — для класса планарных графов; 3) для свойств «быть связным» и «быть простой цепью» и любого $k \geqslant 3$ разбиения E на подмножества мощности k — для класса планарных двудольных графов и для этого же класса графов для свойства «быть деревом», любого $k \geqslant 3$ разбиения V на подмножества мощности k.

В [109] показано, что любой граф с n вершинами можно разбить на полные двудольные подграфы, в каждом из которых $O\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$ вершин. Число реберно непересекающихся клик, содержащих все ребра графа G, как доказано в [314], не меньше числа вершин максимальной клики G.

В графе эквивалентности каждая компонента связности является полным графом. Число эквивалентного покрытия эк(G) графа G равно минимальному числу графов эквивалентности, содержащих все ребра G. Пусть граф G есть дополнение n-вершинного графа, у которого максимальная степень не больше d, а минимальная степень не меньше 1. В [56] показано, что для такого графа выполняется $\log_2 n - \log_2 d \leqslant \text{эк}(G) \leqslant 2e^2(d+1)^2 \log_e n$.

Задача аппроксимации графов заключается в том, что для графа G требуется найти такой граф H, принадлежащий определенному классу $\mathcal{G}$, что $\rho(G, H) = \min\limits_{G' \in \mathcal{G}} \rho(G, G')$, где $\rho(G_1, G_2) = |E_1 \setminus E_2| + |E_2 \setminus E_1|$. В статье [6] компоненты связности каждого графа $H \in \mathcal{G}$ являются полными графами. Справедлива оценка $\rho(G, H) \leqslant \left]\frac{n^2-2n}{4}\right[$, где $|V(G)| = |V(H)| = n$. Изучаются мощности компонент связности и их число в H; исследовано строение почти всех n-вершинных графов. В качестве класса $\mathcal{G}$ в работе [6] рассматриваются классы бесконтурных графов, графов линейных порядков, графов в виде звезд, древесных и решетчатых структур и др. Показано, что искомая аппроксимация может быть построена с помощью цепочки последовательно выполняемых стандартных структурных преобразований, см. также [103].

Симплициальное разбиение графа G рекурсивно определяется как представление G в виде объединения двух его собственных подграфов, пересекающихся по полному подграфу («симплексу»). Первичный граф — это граф, который не допускает симплициального разбиения. Важно отметить, что изучение многих графовых свойств не зависит от порядка разбиения. В [109] доказывается независимость первичных, а также других специальных подграфов от симплициального разбиения бесконечных графов.

Сепаратором C графа $G(V, E)$ называется множество в разбиении $V=A\cup B\cup C$, в котором вершины из A не смежны с вершинами из B, $|A|\leqslant\alpha n$, $|B|\leqslant\alpha n$, $|C|\leqslant\beta n^{\omega}$, $0\leqslant\omega<1$, $0<\alpha<1$, $\beta>0$. Граф G допускает разбиение $\mathcal{P}$ множества V в соответствии с деревом сепараторов $T_{\mathcal{P}}$, если корень дерева $T_{\mathcal{P}}$ соответствует сепаратору C, а два его поддерева — разбиениям множеств A и B. В статье [94] изучаются свойства фактор-графа относительно разбиения $\mathcal{P}$, которые затем используются для построения распределенного алгоритма с N вычислительными процессами для решения больших систем уравнений с разреженной матрицей коэффициентов. Сложность нахождения решения зависит от числа N линейно.

По системе уравнений $f_1, f_2, \ldots, f_m$, содержащих переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, граф, соответствующий этой системе, можно построить разными способами. Приведем два из них. 1) В двудольном графе $H(F, X, E)$, $F=\{f_1, \ldots, f_m\}$, $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$ ребро $(f_i, x_j)\in E$ проводится тогда и только тогда, когда уравнение f_i содержит переменную x_j. 2) В графе $G(X, W)$ ребро $(x_i, x_j)\in W$ с номером r проводится тогда и только тогда, когда уравнение f_r содержит обе переменные x_i, x_j (см. также [13]).

В различных изданиях можно найти большое число алгоритмов, которые находят приближенное решение задачи об оптимальном разбиении графов. Укажем на один из таких алгоритмов. В [289] описан эвристический алгоритм разбиения графа G на минимально связанные подграфы $\{G_i\}$, удовлетворяющие разным системам дополнительных условий. Алгоритм основан на анализе взаимозависимости исходной задачи и задачи о нахождении минимального разреза; сложность его $O(n^5)$, где n — число вершин G.

Сабидусси в 1960 году показал, что любой конечный граф G однозначно представим в виде декартова произведения простых графов. В статье [125] подробно описан алгоритм нахождения такого представления. Для его обоснования и оценивания сложности рассмотрена башня эквивалентностей в множестве ребер

G и оценено число классов основной из этих эквивалентностей.

Прямое произведение $D=\prod_{i=1}^{k} D_i$ орграфов $D_i(V_i, E_i)$ есть орграф D, у которого множеством вершин является декартово произведение $\prod_{i=1}^{k} V_i$ и две вершины $x=(x_1, \ldots, x_k)$, $y=(y_1, \ldots, y_k)$ соединены дугой $(x, y)\in E$ тогда и только тогда, когда найдется такое $r\,(1\leqslant r\leqslant k)$, что в D_r имеется дуга (x_r, y_r), а для $s\neq r$ $(1\leqslant s\leqslant k)$ выполняется $x_s=y_s$. Для неориентированных графов G_i $(1\leqslant i\leqslant k)$ граф $G=\prod_{i=1}^{k} G_i$ определяется аналогично. Графы $\{G_i\}$ и $\{D_i\}$ являются декомпозициями G и D (по произведению). Покрывающий граф $C(D)$ получается из орграфа D заменой каждой дуги ребром, а при появлении кратных ребер оставляется один представитель. Говорят, что декомпозиция $\prod_{i=1}^{k} G_i$ графа $C(D)$ порождает декомпозицию орграфа D, если существуют такие орграфы D_i, что $C(D_i)=G_i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ и $\prod_{i=1}^{k} D_i$ есть декомпозиция орграфа D. В работе [324] исследуются условия, при выполнении которых декомпозиция графа $C(D)$ порождает декомпозицию орграфа D.

П-покрытие графа G полными подграфами — это множество полных подграфов G такое, что каждое ребро G принадлежит по крайней мере одному полному подграфу; если же каждое ребро принадлежит в точности одному полному подграфу, то получаем понятие П-разбиения. Их минимальные мощности называются, соответственно, числом П-покрытия $cc(G)$ и числом П-разбиения $cp(G)$. В работе [56] доказано, что для графа H с n вершинами, m ребрами и хроматическим индексом q имеет место равенство $cp(G+K_q)=nq-m$, причем любое П-покрытие состоит только из ребер и треугольников. Получены оценки для двух частных графов. Для $n\geqslant m\geqslant 1$ $(n\geqslant 1)$ $cp(K_n-K_m)\geqslant \frac{(n-m)\,m^2}{(n-1)}$, а для достаточно больших значений n и $\sqrt{n}<m<n$ $cp(K_n-K_m)<m^2+o(m^2)$. Для графа T_n с n вершинами $cp(G)/cc(G)\leqslant \frac{n^2}{12}$ для достаточно больших n.

Для графа T_n, полученного из K_n удалением паросочетания, $\log n-1\leqslant cc(T_n)\leqslant 2\log n$, см. также [56].

Эффективное использование операций стягивания ребра, поддерева, полного подграфа, частичного подграфа демонстрируется в [22] для порождения и перечисления остовных деревьев, оптимальных по двум критериям, когда дерево кодируется специальным двоичным вектором, в [21] — для записи всех транзитивных ориентаций графа и в [24] — кодирования, перечисления и порождения плоских корневых деревьев с тремя заданными параметрами, когда каждое дерево кодируется специальным двоичным вектором с переменным числом координат.

§ 6. Размещение БИС и некоторые приложения в программировании

Для решения задач синтеза больших интегральных схем (БИС) рассматривается следующая математическая модель. Под решеткой понимается координатная сетка, состоящая из параллельных вертикальных и горизонтальных линий, отстоящих друг от друга на единицу длины. Под укладкой h графа G понимается размещение его вершин в узлах решетки и проведение ребер вдоль линий решетки. Площадь укладки $S_h(G)$ равна произведению чисел вертикальных и горизонтальных линий, которые содержат все вершины и ребра графа G. В работе [198] получены асимптотические нижние оценки для площади $S_h(G)$ и максимальной длины пути $l_h(G)$ в укладках h. Число пересечений $c_h(G)$ графа G определяется как минимальное число пересекающихся ребер по всем укладкам h графа G на решетке. Проводная площадь $w(G)$ — это минимальное (по всем укладкам h) число непересекающихся по вершинам путей, не имеющих общих отрезков решетки. Напомним, что граф G имеет $f(n)$-сепаратор, если G можно разбить на подграфы G_1, G_2, имеющие почти одинаковое число вершин (с максимальной разницей в одну вершину) так, что G_1 и G_2 соединяются не менее чем $f(n)$ ребрами и оба графа G_1 и G_2 также имеют $f(n)$-сепаратор. Показано, что для графа G с n вершинами справедливы неравенства $c(G)+n\leqslant w(G)\leqslant O(S(G))$. На основе нижних оценок для $c(G)$ и $w(G)$ получены нижние асимптотические оценки для $S_h(G)$ и $l_h(G)$, где h — любая укладка на решетке. Например, для графа G, имеющего такой сепаратор, что $f(n)=n^\alpha$, $\alpha>1/2$, получено $S_h(G)\geqslant n^{2\alpha}$, а вместо $l_h(G)\geqslant \frac{n^\alpha}{\log n}$ получено $l_h(G)\geqslant n^\alpha$ (см. [105]). Для этих величин известны верхние оценки $l_h(G)\leqslant n^\alpha$ и $S_h(G)\leqslant n\log^2 n$.

В статье [76] рассматриваются те задачи размещения графов в целочисленную решетку, которые возникают при проектировании сверхбольших интегральных схем (СБИС). Здесь также получены асимптотически оптимальные оценки для ряда функций качества размещения, в том числе площади размещения и суммарной длины ребер.

Топологические свойства планарных интегральных схем определяются разделением их на слои (обычно по числу фотолитографий) совокупностью геометрических областей, определенным образом расположенных на решетке поля кристалла интегральной схемы. Характеристики таких схем определяются взаимным расположением и размерами геометрических областей.

В [8], [9] рассматривается задача о размещении схемы на однослойной печатной плате или на кристалле интегральной схемы так, чтобы контакты выделенных элементов схемы были расположены в заданной последовательности. С помощью графовой модели, в которой каждому выделенному элементу сопоставляется звезда, эта задача сводится к задаче проверки планарности графа G с выделенными вершинами при условии, что инцидентные им ребра должны быть размещены в определенном порядке. Предложенный алгоритм решения последней задачи имеет линейную сложность.

Конструктивный алгоритм получения информации о взаимном расположении функциональных элементов МаБИС описан в [3]. В ходе формирования этого расположения решается задача покрытия гиперребер схемы кратчайшими связывающими деревьями, что позволяет представить общий план топологии схемы в виде решетчатого p-графа [18].

При проектировании двухуровневой печатной платы, на которой должна располагаться заданная схема, требуется минимизировать число соединений между двумя уровнями этой платы. В [197] показано, что данная задача сводится к следующей задаче. Для заданного числа k и данного графа $G(V, E)$, ребрам которого приписаны веса, нужно найти разбиение $V = V_1 \cup V_2$ такое, что сумма весов ребер, соединяющих V_1 и V_2, не меньше k. Исследуется сложность решения этой задачи.

В [29] описывается алгоритм трассировки односторонних печатных плат, в котором плата покрывается выпуклыми многоугольниками. На сторонах многоугольников расположены центры контактных площадок или границы запретных зон. Поиск путей для трасс выполняется перебором отрезков путей внутри многоугольников.

Изучаются трехмерные БИС, при реализации которых имеется один слой (в третьем измерении), содержащий активные элементы, и несколько слоев, предназначенных для межсоединений, а также БИС, которые содержат несколько активных слоев. В [199] показано, что при малом числе слоев схемы второго типа не имеют преимуществ в определенном смысле перед схемами первого типа. Для задачи размещения графа G с n вершинами в узлах трехмерной решетки показано, что объем, достаточный для размещения G, равен $O(\sqrt{nS})$, где S — площадь минимального двумерного размещения. Описан полиномиальный алгоритм, который по двумерной БИС, размещенной на площади S и имеющей максимальную длину соединения l, позволяет построить размещение трехмерной БИС с параметрами:

объемом $W = S/m$ и максимальной длиной $l' = l/m$, где m — число слоев в третьем измерении.

Под трассой понимается отрезок изолированного провода, связывающий последовательно несколько точек-контактов $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, $k \geqslant 2$, в виде соответствующей ломаной $[v_1, v_2] \cup \ldots \cup [v_{k-1}, v_k]$. Для множества трасс $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ определяется орграф их зависимостей $D(W, E)$, где $(w_i, w_j) \in E$, если и только если от некоторого контакта v_s трассы w_i до трассы w_j расстояние меньше заданной величины R. В статье [70] доказывается, что множество трасс W может быть размещено на плате автоматом монтажа тогда и только тогда, когда граф зависимостей трасс $D(W, E)$ не содержит контуров. Предложенный в [71] алгоритм трассировки проводного монтажа в произвольном случае основан на разрезании контуров графа D.

В [246] рассматривается задача о трассировке при условии, что каждая трасса может идти вдоль ребер решетки и иметь не более одного изгиба. Описан алгоритм, который в одном слое строит такие трассы для n узлов решетки за $O(n^2)$ шагов или дает ответ, что такой трассировки не существует. Показано также, что задачи нахождения максимального числа точек из заданных n узлов (точек) и нахождения минимального числа слоев для всех узлов являются NP-трудными.

Для построения и анализа работы матричных процессоров, состоящих из большого числа простых идентичных процессорных элементов, работающих синхронно, разрабатываются формальные модели линейного, прямоугольного и гексагонального расположения процессорных элементов, которые легко реализуются в БИС'ах. В [247] под кубическими графами понимаются графы, которые специальным определенным способом реализуются в трехмерном пространстве. В этой работе описан метод, позволяющий по кубическому графу, соответствующему процессу вычислений, построить алгоритм, производящий те же вычисления на матричном процессоре.

В решетчатой модели Томпсона представление СБИС [165] реализуется на двумерной решетке, в узлах которой размещаются процессоры. Хотя проводник, лежащий на вертикальной линии, может пересекаться без электрического контакта с проводником, лежащим на горизонтальной линии (что соответствует размещению проводников на разных сторонах платы), разные проводники не могут лежать на одной и той же линии и не могут пересекаться в узловых точках. Проводник не может проходить через узел решетки, в котором размещен процессор, не связанный с ним. При выборе оптимального размещения процессоров на плате СБИС возникает задача исследования графа перераспределения и обмена $Q(V, E)$, представляющего удобную структуру организации процесса параллельных вычислений. Вершинами $v \in V$ являются k-мерные двоичные вектора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, где $|V| = 2^k$. Две вершины v и v' соединены ребром перераспределения, если вектор v' является левым или правым циклическим сдвигом v на один разряд (соответственно $(\alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_1)$ или $(\alpha_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$). И вершины v и v' соединены ребром обмена, если вектора v, v' различаются только в последнем разряде α_k. Томпсон показал, что асимптотическая нижняя граница площади размещения этого графа равна $\Omega\left(\frac{n^2}{\log^2 n}\right)$, где $|V|=n$. В статье [191] описано размещение графа перераспределения и обмена, имеющее площадь $O(n^2/\log^2 n)$ и являющееся таким образом асимптотически оптимальным. Близкие по идеологии рассуждения позволили получить оценки числа графов без 4-циклов [192].

§ 7. Задачи представления графов в химии

В органической химии строение молекулы обычно описывается с помощью молекулярного графа, вершины которого соответствуют атомам, а ребра — химическим связям. При решении многих задач такого описания недостаточно, нужно еще знать укладку (представление) графа в трехмерном пространстве. Один из типовых примеров — синтезированное в 1961 году Э. Вассерманом вещество, молекула которого представима в виде двух зацепленных колец, другой — недавно найденная химическая реализация ленты Мёбиуса. Подобные особые структуры систематически изучаются в новом разделе химии — топологической стереохимии, одним из основных понятий которого является «топологическая хиральность». Укладка графа в трехмерном пространстве называется топологически ахиральной (хиральной), если она топологически эквивалентна (не эквивалентна) своему зеркальному отражению. Если ахиральный (молекулярный) граф H может быть переведен в свое зеркальное отражение с помощью одного вращения, то его называют жестко ахиральным, а соответствующую укладку h графа H — симметричным представлением. Если жестко ахиральная укладка h представляет собой узел, то h называют жестко положительной, и если ось вращения, относительно которой выполняется совмещение h с ее зеркальным образом, лежит вне h, то h называют отрицательно ахиральной. Для первого из двух последних понятий ось вращения пересекает h. До сих пор химикам не удалось синтезировать молекулярные графы, имеющие вид узла, хотя расчеты на ЭВМ показывают, что такие молекулы, содержащие сотни атомов, могут существовать. В статье [131] на основе аппарата теории узлов выводится критерий жесткой отрицательной ахиральности узла в трехмерном пространстве. Этот критерий позволил привести примеры топологически ахиральных узлов, не имеющих симметричного представления.

Один из них — узел 8_{17} по каталогу Рольфзена* (в его плоском изображении имеется по крайней мере 8 пересечений). Обсуждаются возможности химического синтеза узла 8_{17} и аналогичных ему.

Для представления изомеров и изучения их свойств удобно в качестве моделей молекул применять орграфы с кратными дугами и петлями, когда петли соответствуют свободным электронам, а дуги — валентным связям (p-графы). Для порождения всех молекул изомеров множеству p-графов сопоставляется K-алгебра. В [61] доказывается, что молекулам соответствуют те p-графы, которые образуют ассоциативную алгебру. Здесь получены условия, при выполнении которых K-алгебра ассоциативна.

Пусть X_n есть пространство конфигурационных взаимодействий, порождаемое n электронами, движущимися по $2n$ орбитам. В теории связного орбитального резонанса считается, что X_n покрывается регулярными резонансными структурами, которые представляются графами, имеющими дуги и ребра. В этих графах [36] выделяются входные и выходные вершины по определенным правилам, и для графов отыскиваются представления минимальными семействами регулярных резонансных структур, покрывающих X_n, на основе выделения линейно независимых таких семейств.

В [68] приводится комбинаторная характеризация восьми классов графов, представляющих молекулярную структуру ароматических бензольных углеводородов. Описание молекулярной структуры и соответствующего ей графа получается в виде циклического двоичного кода, который однозначно определяет этот граф G. Длина кода не превышает числа вершин G. Рассмотрены эффективные алгоритмы кодирования графов из указанных классов и указывается применение их к решению задач порождения, перечисления и распознавания изоморфизма таких графов.

Графы, соответствующие полициклическим бензоидным углеводородам [30], являются в своем представлении плоскими топологическими графами, в которых все грани, за исключением бесконечной, ограничены циклами C_6, две грани могут иметь самое большее одно общее ребро и степени вершин равны 2 или 3 (такие структуры можно назвать «шестиугольными животными»). В [185] исследуется представление ката-конденсированных и пери-конденсированных молекулярных графов в виде граничной степенной последовательности, позволяющей решать задачи канонизации графов и распознавания их изоморфизма с линейной сложностью.

В работе [68] рассматривается база данных химических структур, в которой для определения сходства веществ исполь-

* D. Rolfsen. Knots and lines.— Berkley, 1976.

зуются 90 топологических инвариантов. Так как многие из них взаимозависимы, то с помощью статистического метода главных компонент по этим 90 инвариантам строятся 10 новых независимых друг от друга параметров. Расстояние в соответствующем 10-мерном пространстве принимается за меру структурного подобия. Полученные экспериментальные результаты для такого представления, когда указывались 5 ближайших соседей из 3912 элементов по 10 случайно выбранным веществам, показали большое соответствие с интуитивным пониманием близости веществ.

Разработка эффективных способов представления графов и изучение их свойств в структурной химии, химической кинетике и химической физике полимеров описывается в монографии [41]. С помощью представлений определенных графов определяется ряд неэмпирических и полуэмпирических методов квантовой химии, в результате облегчается качественное понимание взаимосвязи структуры и свойств молекул. Удобное представление позволяет проводить детальный анализ стационарных и нестационарных кинетических зависимостей, устанавливать связь кинетического поведения и структуры механизма сложной реакции. Аналогично достигается упрощение решений многих традиционных задач химической физики полимеров, прежде всего задач, требующих учета пространственной структуры полимера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азаренок А. С., Руденко А. Г., Степанец В. Я.* Два метода расчета шин питания и земли БИС/СБИС // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н.— 1988.— № 5.— С. 93—100
2. —, *Сарванов В. И.* Об одном подходе к глобальной трассировке интегральных схем // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н.— 1988.— № 6.— С. 104—107 (РЖМат, 1989, 4В617)
3. *Арустамов С. А.* Алгоритм построения общего плана топологии МаБИС // Автоматиз. конструкт. проектир. в радиоэлектрон. и вычисл. техн.— Вильнюс, 1987.— 7.— С. 9—17 (РЖМат, 1988, 3В679)
4. *Асельдерова И. М.* Об оптимальном кодировании некоторых арифметических графов // Теория оптим. решений.— Киев, 1987.— С. 47—54 (РЖМат, 1987, 10В650)
5. —, *Донец Г. А.* Оптимальное кодирование циклов и однородных деревьев // Теория и практика разраб. и внедрения интегрирован. АСУ.— Киев, 1988.— С. 87—94 (РЖМат, 1988, 12В587)
6. *Белкин А. Р.* Некоторые модели оптимальной аппроксимации орграфов // Моделир. и оптимиз. систем слож. структуры.— Омск, 1987.— С. 13—23 (РЖМат, 1988, 8В549)
7. *Беляевский В. В., Лепешинский Н. А.* Представление деревьев матрицей расстояний между висячими и предвисячими вершинами // ЭВМ — учебному процессу, науке и технике.— Минск: Вышэйшая школа, 1985.— С. 37—40
8. *Гайнанов Д. Н., Плотников А. Л., Иконников В. А.* Трассировка соединений платы проводного монтажа с помощью ориентированного графа зависимостей трасс // Ин-т мат. и мех. УНЦ АН СССР.— Свердловск, 1985.— 17 с.— Деп. в ВИНИТИ 26.06.85, № 4602—85 (РЖМат, 1985, 11В678 ДЕП)

9. *Горлин А. И., Коваленко В. Н., Мартынюк В. В., Хухлаев Е. В.* Параметризация чертежей по размерам, основанная на задании образца. Построение экземпляра методом поэлементного расчета // Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр.— 1987.— № 184.— С. 1—20 (РЖМат, 1988, 2В604)
10. *Григорьян Ю. Г., Маноян Г. К.* Некоторые вопросы арифметической интерпретации неориентированных графов // Кибернетика.— 1977.— № 3. — С. 129—131 (РЖМат, 1977, 11В585)
11. *Донец Г. А.* О графах, задаваемых аналитическим способом // Теория оптим. решений.— Киев, 1987.— С. 20—27 (РЖМат, 1987, 10В649)
12. *Евдокимов А. Г., Гринчак Н. В., Жалилов У.* Разработка и использование позиционно-списочного представления графа сети при проектировании инженерных сетей // Вопр. вычисл. и прикл. мат.— Ташкент, 1987.— № 83.— С. 81—86 (РЖМат, 1988, 5В657)
13. *Евстигнеев В. А.* Применение теории графов в программировании.— М.: Наука, 1985.— 352 с. (РЖМат, 1985, 10В682К)
14. *Зарецкий К. А.* Построение дерева по набору расстояний между висячими вершинами // Успехи мат. наук.— 1965.— *20*, № 6.— С. 90—92 (РЖМат, 1966, 6А267)
15. *Зыков А. А.* Основы теории графов.— М.: Наука, 1987
16. *Иващенко А. В.* Геометрическое отображение графа // Кибернетика.— 1988.— № 5.— С. 120—121 (РЖМат, 1989, 2В681)
17. *Калинин В. Б.* Об одной задаче Бержа // Мат. заметки.— 1983.— *34*, № 1.— С. 131—133 (РЖМат, 1983, 11В623)
18. *Каюров В. Ю.* Алгебраическая интерпретация *P*-графов // Кибернетика. — 1986.— № 5.— С. 17—21 (РЖМат, 1987, 3В493)
19. *Кельманс А. К.* Конструирование, восстановление и укладка графов // Препр.— М.: Ин-т пробл. упр., 1987.— 52 с. (РЖМат, 1988, 2В675)
20. *Козырев В. П.* Теория графов // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Теория вероятностей. Мат. стат. Теор. кибернет.— 1972.— *10*.— С. 25—74 (РЖМат, 1973, 3В370)
21. — Перечисление транзитивных ориентаций графа и вложение транзитивных графов // Вопр. киберн. Тр. II Всес. семин. по комбинатор. мат.— 1975.— вып. 15.— С. 44—60 (РЖМат, 1976, 3В596)
22. — Нахождение остовных деревьев, оптимальных по нескольким ранжированным критериям // Комбинатор. анализ.— 1986.— № 7.— С. 66—74 (РЖМат, 1987, 9В640)
23. —, *Коршунов А. Д.* О величине разреза в случайном графе // Пробл. кибернетики.— 1974.— вып. 29.— С. 27—62 (РЖМат, 1975, 5В496)
24. —, *Майский С. В.* Перечисление и порождение плоских корневых деревьев с заданными параметрами // Мат. Всес. семин. по дискрет. мат. и ее прил.— М., 1986.— С. 92—99 (РЖМат, 1986, 8В749)
25. —, *Юшманов С. В.* Теория графов (алгоритмические, алгебраические и метрические проблемы) // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Теория вероятностей. Мат. стат. Теор. кибернет.— 1985.— *23*.— С. 68—117 (РЖМат, 1985, 11В637)
26. *Коржик В. П.* Применение графов тока индекса 2 и 3 для построения треугольных вложений графов вида $K_n—K_m$ // Комбинатор. анализ.— 1986.— № 7.— С. 87—91 (РЖМат, 1986, 9В598)
27. *Лавренченко С. А.* Перечисление в явном виде всех автоморфизмов неприводимых триангуляций тора и всех укладок на тор помеченных графов этих триангуляций // Харьк. ин-т радиоэлектрон.— Харьков, 1987.— 57 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 01.10.87, № 2779—Ук87 (РЖМат, 1988, 2В630 ДЕП)
28. *Лозин В. В.* Вершинное кодирование графов при автоматном декодировании // Комбинатор.-алгебр. методы в прикл. мат.— Горький, 1986.— С. 73—83 (РЖМат, 1987, 10В647)
29. *Матузявичюс А., Миташюнас А.* Машинная трассировка односторонних печатных плат // Prepr. Ernst-Moritz-Arndt Univ. Greifswald. Math.

— 1987.— № 18.— С. 46—49 (РЖМат, 1987, 10В711)
30. *Мжельская Е. В.* Графы полициклических соединений // Вычисл. системы.— 1987.— № 119.— С. 71—90 (РЖМат, 1988, 4В560)
31. *Миркин Б. Г., Родин С. Н.* Графы и гены.— М.: Наука, 1977
32. *Некрасов В. П.* О плоских графах, имеющих внешний доступ // Комбинатор. свойства выпукл. множеств и графов.— Свердловск, 1983.— С. 34—44 (РЖМат, 1984, 10В486)
33. *Носков В. В.* О рационализации переборных процедур и поиске сжатий // Комбинатор.-алгебр. методы в прикл. мат.— Горький, 1986.— С. 139—163 (РЖМат, 1987, 10В685)
34. *Петренюк В. И.* Список 3-минимальных плоских графов // Кировогр. ин-т с.-х. машиностр.— Кировоград, 1986.— 7 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 31.10.86, № 2450—Ук (РЖМат, 1987, 3В445 ДЕП)
35. *Петросян А. В., Маркосян С. Е., Шукурян Ю. Г.* Математические вопросы автоматизации проектирования ЭВМ.— Ереван, 1977.— 143 с. (РЖМат, 1978, 2В759К)
36. Применение теории графов в химии / Ред. Зефиров Н. С., Кучанов С. И.— Новосибирск: Наука, 1988.— 306 с. (РЖМат, 1988, 5В656К)
37. *Путуридзе З. Ш., Ниаури Ю. А.* Линейное представление неструктурных комплексов команд *P*-графов // Сообщ. АН ГССР.— 1987.— *127*, № 3.— С. 489—491 (РЖМат, 1988, 2В605)
38. *Робертс Ф. С.* Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экономическим задачам.— М.: Наука, 1986.— 495 с. (РЖМат, 1987, 4В452К)
39. *Смоленский Е. А.* Об одном способе линейной записи графов // Ж. вычисл. мат. и мат. физ.— 1962.— *2*, № 2.— С. 371—372 (РЖМат, 1963, 7В290)
40. *Солтан В. П.* *d*-выпуклость в графах // Докл. АН СССР.— 1983.— *272*, № 3.— С. 535—537 (РЖМат, 1984, 2В499)
41. *Станкевич И. В.* Графы в структурной химии // Применение теории графов в химии.— Новосибирск, 1988.— С. 7—69 (РЖМат, 1988, 8В605)
42. *Тышкевич Р. И., Черняк А. А.* Униграфы. I // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.— 1978.— № 5.— С. 5—11 (РЖМат, 1979, 4В418)
43. —, *Мельников О. И., Котов В. М.* О графах и степенных последовательностях // Кибернетика.— 1981.— № 6.— С. 5—8 (РЖМат, 1982, 5В484)
44. *Феденко А. Т., Володин В. М.* Свойства метода симметричной упаковки прямоугольников // Моск. ин-т хим. машиностр.— М., 1988.— 5 с.— Деп. в ВИНИТИ 07.05.88, № 3574—В88 (РЖМат, 1988, 8В547 ДЕП)
45. *Филотти И. С.* Один алгоритм укладки кубического графа // Кибернет. сб.— М., 1986.— № 23.— С. 5—30 (РЖМат, 1987, 5В452)
46. *Фирсов В. В.* Изометрическое вложение графов в булев куб // Кибернетика.— 1965.— № 1.— С. 95—96
47. *Чепой В. Д.* Некоторые свойства *d*-выпуклости в триангулированных графах // Мат. исследования.— 1986.— № 87.— С. 164—171 (РЖМат, 1986, 10В444)
48. — Изометрические подграфы графов Хэмминга и *d*-выпуклость // Кибернетика.— 1988.— № 1.— С. 6—9 (РЖМат, 1988, 7В589)
49. *Черняк А. А.* К гипотезе Литтла о планарных графах // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.— 1980.— № 2.— С. 41—45 (РЖМат, 1980, 8В338)
50. *Юшманов С. В.* Об одном способе задания графов // Вопр. кибернет.— М., 1980.— № 64.— С. 97—111 (РЖМат, 1980, 12В481)
51. — Восстановление произвольного графа по некоторому подмножеству строк и столбцов его матрицы расстояний // Докл. АН СССР.— 1981.— *359*, № 1.— С. 49—51 (РЖМат, 1981, 12В840)
52. — Задание дерева с *p* висячими вершинами $2p-3$ элементами его матрицы расстояний // Мат. заметки.— 1984.— *35*, № 6.— С. 877—887 (РЖМат, 1984, 10В458)

53. — Методы теории графов в эволюции. Построение филогенетических схем // Мат. кибернет. и ее прил. к биол.— М., 1987.— С. 101—140 (РЖМат, 1988, 7В652)
54. — Восстановление филогенетического дерева по его поддеревьям, порожденным четверками его висячих вершин // Мат. кибернет. и ее прил. к биол.— М., 1987.— С. 141—147 (РЖМат, 1988, 7В578)
55. — О метрических свойствах хордовых и птолемеевых графов // Докл. АН СССР.— 1988.— *300*, № 2.— С. 296—299 (РЖМат, 1988, 9В589)
56. *Alon N.* Covering graphs by the minimum number of equivalence relations // Combinatorica.— 1986.— *6*, № 3.— С. 201—206 (РЖМат, 1987, 5В619)
57. *Anderson I.* On the toroidal thickness of graphs // J. Graph Theory.— 1982.— *6*, № 2.— С. 177—188 (РЖМат, 1983, 1В674)
58. *Andreae Th.* On an extremal problem concerning the interval number of a graph // Discrete Appl. Math.— 1986.— *14*, № 1.— С. 1—9 (РЖМат, 1986, 11В620)
59. — On the interval number of a triangulated graph // J. Graph Theory.— 1987.— *11*, № 3.— С. 273—280
60. *Aragno M. E.* Sulla superiore immergibilità di particolari graphi // Riv. mat. Univ. Parma.— 1986.— *12*.— С. 35—40 (РЖМат, 1988, 5В669)
61. *Araujo G. O.* Algebras asociadas a un *p*-grafo y sus aplicaciones a un modelo matematico de la quimica estructural // Notes mat. Univ. Andes.— 1984.— № 62.— 17 с. (РЖМат, 1985, 7В701)
62. *Arbib C.* A polynomial characterization of some graph partitioning problems // Inform. Process. Lett.— 1988.— *26*, № 5.— С. 223—230 (РЖМат, 1988, 6В698)
63. *Archdeacon D. S., Huneke P.* On cubic graphs which are irreducible for nonorientable surfaces // J. Combin. Theory.— 1985.— *B39*, № 3.— С. 233—264 (РЖМат, 1986, 5В686)
64. *Asano K.* On the genus and thickness of graphs // J. Combin. Theory.— 1987.— *B43*, № 3.— С. 287—292 (РЖМат, 1988, 4В548)
65. *Bandelt H.-J., Dress A.* Reconstructing the shape of a tree from observed dissimilarity data // Adv. Appl. Math.— 1986.— *7*, № 3.— С. 309—343 (РЖМат, 1988, 5В658)
66. —, *Mulder H. M.* Distance-hereditary graphs // J. Combin. Theory.— 1986. — *B41*, № 2.— С. 182—208 (РЖМат, 1987, 2В626)
67. —, *Wilkeit E.* Dwarf, brick and triangulation of the torus // Discrete Math.— 1987.— *67*, № 1.— С. 1—14 (РЖМат, 1988, 2В623)
68. *Basak S. C., Magnuson V. R., Niemi G. J., Regal R. R.* Determining structural similarity of chemicals using graph-theoretic indices // Discrete Appl. Math.— 1988.— *19*, № 1—3.— С. 17—44 (РЖМат, 1988, 11В560)
69. *Batini C., Nardelli E., Tamassia R.* A layout algorithm for data flow diagrams // IEEE Trans. Software Eng.— 1986.— *12*, № 4.— С. 538—546 (РЖМат, 1986, 11Г314)
70. *Becker B., Hotz G.* On the optimal layout of planar graphs with fixed boundary // SIAM J. Comput.— 1987.— *16*, № 5.— С. 946—972 (РЖМат, 1988, 6В675)
71. —, *Osthof H. G.* Layouts with wires of balanced length // Lect. Notes Comput. Sci.— 1985.— *182*.— С. 21—31 (РЖМат, 1987, 3В444)
72. *Bender E. A., Canfield E. R., Robinson R. W.* The asymptotic number of tree-rooted map on a surface // J. Combin. Theory.— 1988.— *A48*, № 2.— С. 156—164 (РЖМат, 1988, 11В517)
73. *Benzaken C., Hammer P. L., Werra D. de.* Split graphs of Dilworth number 2 // Discrete Math.— 1985.— *55*, № 2.— С. 123—127 (РЖМат, 1986, 2В700)
74. *Bertossi A. A.* Finding Hamiltonian circuits in proper interval graphs // Inform. Process. Lett.— 1983.— *17*, № 2.— С. 97—101 (РЖМат, 1984, 2В530)
75. — Dominating sets for split and bipartite graphs // Inform. Process. Lett. — 1984.— *19*, № 1.— С. 37—40 (РЖМат, 1985, 2В711)

76. *Bhatt S. N., Leighton F. T.* A framework for solving VLSI graph layout problems // Mass. Inst. Technol. Lab. Comput. Sci. Techn. Rept.— 1983.— № 305.— 44 с. (РЖМат, 1984, 10В506)
77. *Bienstock D., Monma C. L.* On the complexity of covering vertices in a planar graph // SIAM J. Comput.— 1988.— *17*, № 1.— С. 53—76 (РЖМат, 1989, 2В677)
78. *Bodendiek R.* On graphs not being embaddable into the torus // Graphs, Hypergraphs and Appl. Proc. Conf. Graph Theory, Eyba, Oct. 1th—5th, 1984.— Leipzig, 1985.— С. 7—14 (РЖМат, 1987, 5В656)
79. —, *Wagner K.* A characterization of the minimal basis of the torus // Combinatorica.— 1986.— *6*, № 3.— С. 245—260 (РЖМат, 1987, 5В654)
80. *Bonuccelli M. A.* Dominanting sets and domatic number of circular arc graphs // Discrete Appl. Math.— 1985.— *12*, № 3.— С. 203—213 (РЖМат, 1986, 6В771)
81. *Booth K. S., Johnson J. H.* Dominanting sets in chordal graphs // SIAM J. Comput.— 1982.— *11*, № 1.— С. 191—199 (РЖМат, 1982, 8В638)
82. —, *Lucker G. S.* Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using *PQ*-tree algorithms // J. Comput. and Syst. Sci.— 1976.— *13*, № 3.— С. 335—379 (РЖМат, 1977, 8В814)
83. *Bouchet A.* Characterizing and recognizing circle graphs // Graph Theory. Proc. 6th Yugosl. Semin., Dubrovnik, Apr. 18—19, 1985.— Novi Sad, 1986. — С. 57—69 (РЖМат, 1987, 11В644)
84. — Un algorithme polynomial pour reconnaitre les graphes d'alternance // C. r. Acad. sci.— 1985, sér. 1.— *300*, № 16.— С. 569—572 (РЖМат, 1985, 11В655)
85. — Reducing prime graphs and recognizing circle graphs // Combinatorica. — 1987.— *7*, № 3.— С. 243—254 (РЖМат, 1988, 3В633)
86. *Brandstädt A.* Characterizations of split permutation graphs // Algebra und Graphentheor. Beitr. Jahrestag., Siebenlehn, 28 Okt. — 1 Nov., 1985.— Freiberg, 1986.— С. 21—24 (РЖМат, 1987, 7В633)
87. *Breier N.* Pattiell-rekursive Graphwortfunktionen // J. Inf. Process and Cybern. EIK.— 1987.— *23*, № 4—5.— С. 171—179 (РЖМат, 1987, 12В759)
88. *Bublitz S.* Decomposition of graphs and monotone formula size of homogeneous functions // Acta Inform.— 1986.— *23*, № 6.— С. 689—696 (РЖМат, 1987, 4В543)
89. *Buneman P.* The recovery of trees from measures of disimilarity // In: Mathematics in archaeological and historical sciences.— Edinburgh, University Press, 1971.— С. 387—395
90. — A note on the metric properties of trees // J. Combin. Theory.— 1974. — *B17*, № 1.— С. 48—50 (РЖМат, 1975, 2В518)
91. — A characterization of rigid circuit graphs // Discrete Math.— 1974.— *9*, № 3.— С. 205—212 (РЖМат, 1975, 2В495)
92. *Carpano M.* Automatic display of hierarchized graphs for computer-aided decision analysis // IEEE Trans. Syst., Man, and Cybern.— 1980.— *10*, № 11.— С. 705—715 (РЖМат, 1981, 7В1348)
93. *Chaiken S., Dewdney A. K., Slater P. J.* An optimal diagonal tree code // SIAM J. Alg. Disc. Math.— 1983.— *4*, № 1.— С. 42—49
94. *Chang G. J., Nemhauser G. L.* The *k*-domination and *k*-stability problems on sunfree chordal graphs // SIAM J. Algebraic and Discrete Methods.— 1984.— *5*, № 3.— С. 332—345
95. *Charrier P., Roman J.* Etude de la séparation et de l'élimination sur une famille de graphes quotients déduite d'une méthode de dissections emboîtées // RARIO. Inf. Théor. et Appl.— 1988.— *22*, № 2.— С. 245—265 (РЖМат, 1989, 3В508)
96. *Chiba N., Onoguchi K., Nishizeki T.* Drawing planar graphs nicely // Acta inform.— 1985.— *22*.— С. 187—201
97. —, *Yamanouchi T., Nishizeki T.* Linear algorithms for convex drawings of planar graphs // In: J. A. Bondy and V. S. R. Murty, eds., Progress in Graph Theory (Acad. Press, N. Y., 1984).— С. 153—173

98. *Chin F. Y.* Security in statistical databases for queries with small counts // ACM Transaction on Database Systems.— 1978.— *3*, № 1.— С. 92—104
99. *Chung F. R. K., Graham R. L., Winkler P. M.* On the addressing problem for directed graphs // Graphs and Comb.— 1985.— *1*, № 1.— С. 41—50 (РЖМат, 1986, 2В691)
100. *Colonius H., Schulze H. H.* Tree structures for proximity data // Brit. J. Math. and Statist. Psychol.— 1981.— *34*.— С. 167—180
101. *Cozzens M. B., Roberts F. S.* Computing the boxicity of a graph by covering its complement by cointerval graphs // Discrete Appl. Math.— 1983.— *6*, № 3.— С. 217—228 (РЖМат, 1984, 2В538)
102. *Cunningham J. P.* Free trees and bidirectional trees as representations of psychological distance // J. Math. Psychol.— 1978.— *17*, № 2.— С. 165—188 (РЖМат, 1978, 10В715)
103. *Cunningham W. H.* Decomposition of directed graphs // SIAM J. Algebraic Discrete Methods.— 1982.— *3*, № 3.— С. 214—228
104. *Cvetković D., Pevac I.* Man-machine theorem proving in graph theory // Artif. Intell.— 1988.— *35*, № 1.— С. 1—23 (РЖМат, 1988, 10В665)
105. *Czerwinski P., Ramachandran V.* Optimal VLSI graph embeddings in variable aspect ratio rectangles // Algorithmica.— 1988.— *3*, № 4.— С. 487—510 (РЖМат, 1989, 1В625)
106. *De Fraysseix H., Rosenstiehl P.* A depth-firat-search characterisation of planarity // «Graph Theory» Amsterdam e. a.— 1982.— С. 75—80 (РЖМат, 1984, 5В495)
107. *Di Battista G., Nardelli E.* An algorithm for testing planarity of hierarchical graphs // In: G. Tinhofer, G. Schmidt, eds., Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, Lecture Notes in Computer Science 246 // Springer, Berlin, 1987.— С. 277—289
108. —, *Tamassia R.* Algorithms for plane representations of acyclic digraphs // Theoretical Computer Science.— 1988.— *61*, № 2—3.— С. 175—198
109. *Diestel R.* Simplicial decompositions of graphs — some uniqueness results // J. Combin. Theory.— 1987.— *B42*, № 2.— С. 133—145 (РЖМат, 1987, 10В679)
110. — Tree-decompositions, tree-representability and chordal graphs // Discrete Math.— 1988.— *71*, № 2.— С. 181—184 (РЖМат, 1989, 4В578)
111. *Dietz P. F.* Intersection graph algorithms // Ph. D. thesis, Cornell University, 1984
112. *Dirac G. A.* On rigid circuit graphs // Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg. — 1961.— *25*, № 1—2.— С. 71—76 (РЖМат, 1962, 9А173)
113. *Djoković D. Ž.* Distance-preserving subgraphs of hypercubes // J. Combin. Theory.— 1973.— *B14*, № 3.— С. 263—267 (РЖМат, 1973, 11В477)
114. *Dress A. W. M.* Trees, tight extensions of metric spaces, and the cohomological dimension of certain groups: A note on combinatorial properties of metric spaces // Adv. Math.— 1984.— *53*.— С. 321—402
115. *Duchet P., Hamidoune Y., Las Vergnas M., Meyniel H.* Representing a planar graph by vertical lines joining different levels // Discrete Math.— 1983.— *46*, № 3.— С. 319—321 (РЖМат, 1984, 3В573)
116. *Dyer M. E., Frieze A. M.* On the complexity of partitioning graphs into connected subgraphs // Discrete Appl. Math.— 1985.— *10*, № 2.— С. 139—153 (РЖМат, 1985, 6В585)
117. —, — Planar 3DM is NP-complete // J. Algorithms.— 1986.— *7*, № 2.— С. 174—184 (РЖМат, 1987, 3В485)
118. *Eades P., Kelly D.* Heuristics for reducing crossings in 2-layered networks // Ars Combin.— 1986.— *21*, № 1.— С. 89—98
119. —, *McKay B., Wormald N.* An NP-hard crossing number problem for bipartite graphs // Tech. Rept. 60, Dept. of Computer Science, Univ. of Queensland, 1985
120. *Ehrlich G., Even S., Tarjan R. E.* Intersection graphs of curves in the plane // J. Combin. Theory.— 1976.— *B21*, № 1.— С. 8—20 (РЖМат, 1977, 3В460)

121. *Erdös P., Faudree R., Ordman E. T.* Clique partitions and clique coverings // Discrete Math.— 1988.— *72*, № 1—3.— С. 93—101 (РЖМат, 1989, 4В581)
122. —, *West D. B.* A note on the interval number of a graph // Discrete Math.— 1985.— *55*, № 2.— С. 129—133 (РЖМат, 1985, 12В600)
123. *Even S., Itai A.* Queus, stacks and graphs // In: Theory of Machines and Computations.— 1971, N. Y. Acad. Press.— С. 71—80
124. —, *Pnueli A., Lempel A.* Permutation graphs and transitive graphs // J. Assoc. Comput. Mach.— 1972.— *19*, № 3.— С. 400—410 (РЖМат, 1973, 10В322)
125. *Feigenbaum J., Herhberger J., Schäffer A. A.* A polynomial time algorithm for finding the prime factors of Cartesian-product graphs // Discrete Appl. Math.— 1985.— *12*, № 2.— С. 123—138 (РЖМат, 1986, 4В707)
126. *Feinberg R. B.* The circular dimension of a graph // Discrete Math.— 1979.— *25*, № 1.— С. 27—31 (РЖМат, 1979, 8В405)
127. *Felsenstein J.* Numerical methods for inferring evolutionary trees // Quart. Rev. Biol.— 1982.— *57*, № 4.— С. 379—404
128. *Filotti I. S., Miller G., Reif J.* On determining the genus of a graph in $O(n^{O(g)})$ steps // Proc. 11th Annu. ACM Symp. Theory Comput., 1979.— С. 27—37
129. *Fishburn P. C.* On the sphericity and cubicity of graphs // J. Combin. Theory.— 1983.— *B35*, № 3.— С. 309—318 (РЖМат, 1984, 7В468)
130. — Interval orders and interval graphs: A study of partially ordered sets. — New York e. a., 1985.— 215 с. (РЖМат, 1986, 4В680К)
131. *Flapan E.* Symmetries of knotted hypotetical molecular graphs // Discrete Appl. Math.— 1988.— *19*, № 1—3.— С. 157—166 (РЖМат, 1988, 10В671)
132. *Foldes S., Hammer P. L.* Split graphs // Proc. 8th South-Eastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Comput. (Bosa Raton, 1977); Bosa Raton, Florid Atlant. Univ., 1977.— С. 311—315
133. *Fourier J. C.* Une caracterization des graphs de cordes // C. r. Acad. sci. Paris.— 1978.— *A286*.— С. 811—813
134. *Frankl P., Maehara H.* On the contact dimensions of graphs // Discrete Comput. Geom.— 1987.— *3*, № 1.— С. 89—96 (РЖМат, 1988, 4В540)
135. —, — The Johnson-Lindenstrauss lemma and the sphericity of some graphs // J. Combin. Theory.— 1988.— *B44*, № 3.— С. 355—362 (РЖМат, 1988, 9В569)
136. *Fraysseix H. de.* A characterization of circle graphs // Eur. J. Comb.— 1984.— *5*, № 3.— С. 223—238 (РЖМат, 1985, 7В720)
137. *Freeman L. C.* Spheres, cubes and boxes: graph dimensionality and network structure // Soc. Networks.— 1983.— *5*, № 2.— С. 139—156 (РЖМат, 1984, 2В536)
138. *Fulkerson D. R., Gross O. A.* Incidence matrices and interval graphs // Pacif. J. Math.— 1965.— *15*.— С. 835—855 (РЖМат, 1966, 1А444К)
139. *Gabor C. P., Hsu W.-L., Supowit K. J.* Recognizing circle graphs in polynomial time // In: 26th Annu. Symp. Found. Comput. Sci., Portland, Ore., Oct. 21—23, 1985.— Washington (D. C.), 1985.— С. 106—116 (РЖМат, 1986, 11В563)
140. *Galina H., Systo M. M.* Some applications of graph theory to the study of polymer configuration // Discrete Appl. Math.— 1988.— *19*, № 1—3.— С. 167—176 (РЖМат, 1988, 11В561)
141. *Garey M. R., Johnson D. S.* Crossing number is NP-complete // SIAM J. Alg. Disc. Math.— 1983.— *4*, № 3.— С. 312—316
142. —, —, *Miller G. L., Papadimitriou C. H.* The complexity of coloring circular arcs and chords // SIAM J. Algebraic and Discrete Methods.— 1980. — *1*.— С. 216—227
143. *Gattass E. A., Nemhauser G. L.* An application of vertex packing to data analysis in the evaluation of pavement deterioration // Oper. Res. Lett.— 1981.— *1*, № 1.— С. 13—17 (РЖМат, 1983, 7В761)
144. *Gavril F.* Algorithms for a maximum clique and a maximum independent set of a circle graph // Networks.— 1973.— *3*.— С. 261—273

145. — The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs // J. Combin. Theory.— 1974.— *B16*, № 1.— С. 47—56 (РЖМат, 1974, 7В512)
146. — A recognition algorithm for the intersection graphs of directed paths in directed trees // Discrete Math.— 1975.— *13*, № 3.— С. 237—249 (РЖМат, 1976, 5В567)
147. — A recognition algorithm for the intersection graphs of paths in trees // Discrete Math.— 1978.— *23*, № 3.— С. 211—227 (РЖМат, 1979, 2В510)
148. *Gilmore P. C., Hoffman A. J.* A characterization of comparability graphs and of interval graphs // Can. J. Math.— 1964.— *16*, № 3.— С. 539—548 (РЖМат, 1966, 1А421)
149. *Gimbel J.* End vertices in interval graphs // Discrete Appl. Math.— 1988. — *21*, № 3.— С. 257—259 (РЖМат, 1989, 3В491)
150. *Golumbic M. C.* Algorithmic graph theory and perfect graphs.— N. Y. Acad. Press, 1980
151. — Algorithmic aspects of intersection graphs and representation hypergraphs // Graphs and comb.— 1988.— *4*, № 4.— С. 307—327
152. —, *Hammer P. L.* Stability in circular arc graphs // J. Algorithms.— 1988.— *9*, № 3.— С. 314—320
153. —, *Jamison R. E.* The edge intersection graphs of paths in a tree // J. Combin. Theory.— 1985.— *B38*, № 1.— С. 8—22 (РЖМат, 1985, 10В684)
154. —, — Edge and vertex intersection of paths in a tree // Discrete Math.— 1985.— *55*, № 2.— С. 151—159 (РЖМат, 1985, 12В536)
155. —, *Monma C. L.* A generalization of interval graphs with tolerances // Congressus Numerantium 35.— 1982.— С. 321—331
156. —, —, *Trotter W. T. (Jr.)*. Tolerance graphs // Discrete Appl. Math.— 1984.— *9*, № 2.— С. 157—170 (РЖМат, 1985, 3В496)
157. —, *Rotem D., Urrutia J.* Comparability graphs and intersection graphs // Discrete Math.— 1983.— *43*, № 1.— С. 37—46 (РЖМат, 1983, 5В544)
158. *Graham R. L., Pollak H. O.* On the addressing problem for loop switching // J. Bell. Syst. Techn.— 1971.— *50*, № 8.— С. 2495—2519 (РЖМат, 1972, 7В326)
159. —, — On embedding graphs in squashed cubes // Lect. Notes Math.— 1972.— *303*.— С. 99—110 (РЖМат, 1973, 6В361)
160. —, *Winkler P. M.* Isometric embeddings of graphs // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. Phys. Sci.— 1984.— *81*, № 2.— С. 7259—7260 (РЖМат, 1985, 7В679)
161. —, — On isometric embeddings of graphs // Trans. Amer. Math. Soc.— 1985.— *288*, № 2.— С. 527—536 (РЖМат, 1986, 1В771)
162. *Griggs J. R.* Extremal values of the interval number of a graph. II // Discrete Math.— 1979.— *28*, № 1.— С. 37—47 (РЖМат, 1980, 4В403)
163. —, *West D. B.* Extremal values of the interval number of a graph // SIAM J. Algebraic Discrete Methods.— 1980.— *1*, № 1.— С. 1—7
164. *Gupta U. I., Lee D. T., Leung J. Y.-T.* Efficient algorithms for interval graphs and circular-arc graphs // Networks.— 1982.— *12*, № 4.— С. 459—467 (РЖМат, 1983, 5В599)
165. *Hambrusch S. E., Simon J.* Solving undirected graph problems on VLSI // SIAM J. Comput.— 1985.— *14*, № 3.— С. 527—544 (РЖМат, 1986, 4В746)
166. *Hammer P. L., Simeone B.* The splittance of a graph // Combinatorica.— 1981.— *1*, № 3.— С. 275—284
167. *Harary F., Buckley F.* On the euclidean dimension of a wheel // Graphs and Comb.— 1988.— *4*, № 1.— С. 23—30
168. —, *Kabell J. A., McMorris F. R.* Bipartite intersection graphs // Comment. math. Univ. carol.— 1982.— *23*, № 4.— С. 739—745 (РЖМат, 1983, 5В354)
169. —, *Melter R. A., Tomescu I.* Digital metrics: A graph-theoretical approach // Pattern Recogn. Lett.— 1984.— *2*, № 3.— С. 159—163 (РЖМат, 1984, 12В753)

170. *Hartsfield N.* The toroidal splitting number of the complete graph K_n // Discrete Math.— 1986.— *62*.— С. 35—47 (РЖМат, 1987, 3В455)
171. — The splitting number of the complete graph in the projective plane // Graphs and Comb.— 1987.— *3*, № 4.— С. 349—356 (РЖМат, 1988, 3В637)
172. —, *Jackson B., Ringel G.* The splitting number of the complete graph // Graphs and Comb.— 1985.— *1*.— С. 311—329
173. *Havel T. E.* The combinatorial distance geometry approach to the calculation of molecular conformation, Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, 1982
174. *Hoffmann F., Kriegel K.* Embedding rectilinear graphs in linear time // Inform. Process. Lett.— 1988.— *29*, № 2.— С. 75—79 (РЖМат, 1989, 1В626)
175. *Horák P., Širáň J.* On a modified concept of thickness of a graph // Math. Nachr.— 1982.— *108*.— С. 305—306 (РЖМат, 1983, 7В547)
176. *Howe E., Johnson C. R., Lawrece J.* The structure of distances in networks // Networks.— 1986.— *16*, № 1.— С. 87—106 (РЖМат, 1987, 9В652)
177. *Howorka E.* A characterization of Ptolemaic graphs // J. Graph. Theory.— 1981.— *5*, № 3.— С. 323—331 (РЖМат, 1982, 3В567)
178. *Hsu W.-L.* Maximum weight clique algorithms for circular-arc graphs and circle graphs // SIAM J. Comput.— 1985.— *14*, № 1.— С. 224—231 (РЖМат, 1985, 11В671)
179. — Recognizing planar perfect graphs // J. Assoc. Comput. Mach.— 1987. — *34*, № 2.— С. 255—288 (РЖМат, 1988, 8В564)
180. *Hubert L.* Some applications of graph theory and related nonmetric techniques to problems of approximate seriation: the cuse of symmetric proximity measures // Brit. J. Math. Statist. Psychol.— 1974.— *27*, № 2.— С. 133—153 (РЖМат, 1975, 6В381)
181. *Hutchinson J. P.* Automorphism properties of embedded graphs // J. Graph Theory.— 1984.— № 1.— С. 35—49 (РЖМат, 1985, 3В461)
182. *Imrich W., Schwartz G.* Trees and length functions in groups // Ann. Discrete Math.— 1983.— *17*.— С. 347—359
183. *Jin X.* Large processors are good in VLSI chips // Inform. Process. Lett. — 1984.— *18*, № 1.— С. 47—49 (РЖМат, 1984, 6В520)
184. *Johnson D. S.* The NP-completeness column: an ongoing guide // J. Algorithms.— 1985.— *6*, № 3.— С. 434—451 (РЖМат, 1986, 5В744)
185. *Jovanovic A. D.* Combinatorial characterization of hexagonal systems // Discrete Appl. Math.— 1988.— *19*, № 1—3.— С. 259—270 (РЖМат, 1988, 9В579)
186. *Jungch J. R., Dick G., Dick A. G.* Computer-assisted sequencing, interval graphs, and molecular evolution // Biosystems.— 1982.— *15*.— С. 259—273
187. *Karpinski M., Wagner K. W.* The computational complexity of graph problems with succinet multigraph representation // ZOR: Z. Oper. Res.— 1988. — *32*, № 3—4.— С. 201—211 (РЖМат, 1989, 3В509)
188. *Kelly D.* Fundamentals of planar ordered sets // Discrete Math.— 1987.— *63*, № 2—3.— С. 197—216 (РЖМат, 1987, 9В584)
189. *Kendall D. G.* Some problems and methods in statistical archaeology // World Archaeology.— 1969.— *1*, № 1.— С. 61—76
190. *Klavžar S., Petkovšek M.* Intersection graphs of halflines and halfplanes // Discrete Math.— 1987.— *66*, № 1—2.— С. 133—137 (РЖМат, 1987, 12В708)
191. *Kleitman D., Leighton F. T., Lepley M., Miller G. L.* An asymptotically optimal layout for the shuffle-exchange graph // MIT. Lab. Comput. Sci. Techn. Memo.— 1982.— № 231.— 28 с. (РЖМат, 1983, 6В561)
192. —, *Winston K. J.* On the number of graphs without 4-cycles // Discrete Math.— 1982.— *41*, № 2.— С. 167—172 (РЖМат, 1983, 1В685)
193. *Klenovčan P.* Direct product decompositions of digraphs // Math. slov.— 1988.— *38*, № 1.— С. 3—10 (РЖМат, 1988, 6В699)
194. *Kou L. T., Stockmeyer L. J., Wong C. K.* Covering edges by cliques with

regard to keyword conflicts and intersection graphs // Comm. ACM.— 1978.— *21*.— С. 231—236
195. *Kratochvil J., Goljan M., Kučera P.* String graphs // Rozpr. ČSAV MPV. — 1986.— *96*, № 3.— 96 с. (РЖМат, 1987, 2В617)
196. *Lavrenchenko S.* An infinite set of torus triangulations of connectivity 5 whose graphs are not uniquelly embeddable in the torus // Discrete Math.— 1987.— *66*, № 3.— С. 299—301 (РЖМат, 1987, 12В718)
197. *Leclerc M.* A graph-theoretical approach to a problem in circuit design // Mitt. Math. Semin. Giessen.— 1986.— № 175.— С. 19—26 (РЖМат, 1987, 4В542)
198. *Leighton F. T.* New lower bound techniques for VLSI // Math. Syst. Theory.— 1984.— *17*, № 1.— С. 47—70 (РЖМат, 1984, 12В762)
199. —, *Rosenberg A. L.* Three-dimensional circuit layouts // SIAM J. Comput.— 1986.— *15*, № 3.— С. 793—813 (РЖМат, 1987, 3В453)
200. *Leiss E.* Data base security and the representation of graphs as query graphs // Congressus Numerantium.— 1981.— *33*.— С. 167—183
201. *Lekkerkerker C. G., Boland J. Ch.* Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line // Fund. math.— 1962.— *51*, № 1.— С 45—64 (РЖМат, 1963, 2А258)
202. *Linial N., Lovasz L., Wigderson A.* Rubber bands, convex embeddings and graph connectivity // Combinatorica.— 1988.— *8*, № 1.— С. 91—102
203. *Little C. H. C.* On rings of circuits in planar graphs // Lect. Notes Math. — 1977.— *622*.— С. 133—140 (РЖМат, 1978, 7В699)
204. *Lovasz L.* Perfect graphs // In: Selected Topics in Graph Theory 2, N. Y. Acad. Press, 1983.— С. 55—87
205. *Luccio F., Mazzone S., Wong C. K.* A note on visibility graphs // Discrete Math.— 1987.— *64*, № 2—3.— С. 209—219 (РЖМат, 1987, 9В586)
206. *Maas C.* Some results about the interval numbers of a graph // Discrete Appl. Math.— 1983.— *6*, № 1.— С. 99—102 (РЖМат, 1983, 9В503)
207. — Determining the interval number of triangle-free graph // Computing.— 1983.— *31*, № 4.— С. 347—354 (РЖМат, 1984, 5В485)
208. *Maehara H.* On time graphs // Discrete Math.— 1980.— *32*, № 3.— С. 281—289 (РЖМат, 1981, 3В538)
209. — Space graphs and sphericity // Discrete Appl. Math.— 1984.— *7*, № 1. — С. 55—64 (РЖМат, 1984, 3В574)
210. — A digraph represented by a family of boxes or spheres // J. Graph Theory.— 1984.— *8*, № 3.— С. 431—439 (РЖМат, 1985, 8В556)
211. — Sphericity exceeds cubicity for almost all complete bipartite graphs // J. Combin. Theory.— 1986.— *B40*, № 2.— С. 231—235 (РЖМат, 1986, 11В564)
212. — On the euclidean dimension of a complete multipartite graph // Discrete Math.— 1988.— *72*, № 1—3.— С. 285—289 (РЖМат, 1989, 4В507)
213. —, *Reiterman J., Rödl V., Sinajova E.* Embedding of trees in euclidean space // Graphs Comb.— 1988.— *4*, № 1.— С. 43—47
214. *Mahadev N. V. R., Peled U. N.* Strict 2-threshold graphs // Discrete Appl. Math.— 1988.— *21*, № 2.— С. 113—131 (РЖМат, 1989, 4В521)
215. *May M., Szkatula K.* On the bipartite crossing number // Contr. and Cybern.— 1988.— *17*, № 1.— С. 85—98 (РЖМат, 1989, 2В680)
216. *McMorris F. R., Shier D. R.* Representing chordal graphs on $K_{1,n}$ // Comment. math. Univ. carol.— 1983.— *24*, № 3.— С. 489—494 (РЖМат, 1984, 6В460)
217. *Miller G. L.* Finding small simple cycle separators for 2-connected planar graphs // J. Comput. and Syst. Sci.— 1986.— *32*, № 3.— С. 265—279 (РЖМат, 1987, 3В475)
218. — An additivity theorem for the genus of a graph // J. Combin. Theory. — 1987.— *B43*, № 1.— С. 25—47 (РЖМат, 1987, 11В657)
219. *Mohar B.* Embeddings of infinite graphs // J. Combin. Theory.— 1988.— *44*, № 1.— С. 29—43 (РЖМат, 1988, 6В673)
220. — Nonorientable genus of nearly complete bipartite graphs // Discrete

and Comput. Geom.— 1988.— *3*, № 2.— С. 137—146 (РЖМат, 1988, 6В676)
221. *Monien B., Sudborough I. H.* Min Cut is NP-complete for edge weighted trees // Theor. Comput. Sci.— 1988.— *58*, № 1—3.— С. 209—229 (РЖМат, 1989, 2В710)
222. *Monma C. L., Wei V. K.* Intersection graphs of paths in a tree // J. Combin. Theory.— 1986.— *B41*, № 2.— С. 141—181 (РЖМат, 1987, 2В618)
223. *Mull B. P., Rieper R. G., White A. T.* Enumerating 2-cell imbeddings of connected graphs // Proc. Amer. Math. Soc.— 1988.— *103*, № 1.— С. 321—330 (РЖМат, 1989, 1В636)
224. *Naji W.* Reconnaissance des graphes de cordes // Discrete Math.— 1985.— *54*, № 3.— С. 329—337 (РЖМат, 1985, 12В534)
225. *Nakajima K., Sun M.* On an efficient implementation of a planarity testing algorithm for a graph with local constraints // Proc. 20th Annu. Allerton Conf. Commun., Contr. and Comput. Monticello, Ill. Oct. 6—8, 1982. S. 1, s. a.— С. 656—664 (РЖМат, 1987, 5В733)
226. *Negami S.* Uniqueness and faithfulness of embedding of toroidal graphs // Discrete Math.— 1983.— *44*, № 2.— С. 161—180 (РЖМат, 1983, 7В548)
227. — Uniquely and faithfully embeddable projective-planar triangulations // J. Combin. Theory.— 1984.— *B36*, № 2.— С. 189—193 (РЖМат, 1984, 12В702)
228. — Enumeration of projective-planar embeddings of graphs // Discrete Math.— 1986.— *62*, № 3.— С. 299—306 (РЖМат, 1987, 5В653)
229. — Re-embedding of projective-planar graphs // J. Combin. Theory.— 1988.— *B44*, № 3.— С. 276—299 (РЖМат, 1988, 9В567)
230. — The spherical genus and virtually planar graphs // Discrete Math.— 1988.— *70*, № 2.— С. 159—168 (РЖМат, 1988, 11В519)
231. *Nešetřil J., Thomas R.* A note on spatial representation of graphs // Comment. math. Univ. carol.— 1985.— *26*, № 4.— С. 655—659 (РЖМат, 1986, 7В626)
232. *Opsut R. J., Roberts F. S.* On the fleet maintenance, mobile radio frequency, task assignment, and traffic phasing problems // In: Chartrand G., Alavi Y., Goldsmith D. L., Lesniak-Foster L., Lick D. R., eds., The theory and applications of graphs (Wiley, New York, 1981).— С. 479—492
233. —, — Optimal *I*-intersection assignments for graphs: A linear programming approach // Networks.— 1983.— *13*, № 3.— С. 317—326 (РЖМат, 1984, 3В608)
234. *Orlin J. B., Bonuccelli M. A., Bovet D. P.* An $O(n^2)$ algorithm for coloring proper circular-arc graphs // SIAM J. Algebraic and Discrete Methods.— 1981.— *2*, № 1.— С. 88—93
235. *Otten R. H. J. M., Wijk J. G. van.* Graph representations in interactive layout design // Proc. IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems, 914—918, New York, 1978
236. *Oubina L., Zucchello R.* A generalization of outerplanar graphs // Discrete Math.— 1984.— *51*, № 3.— С. 243—249 (РЖМат, 1985, 5В533)
237. *Parsons T. D., Pica G., Pisanski T., Ventre A. G. S.* Orientably simple graphs // Math. slov.— 1987.— *37*, № 4.— С. 391—394 (РЖМат, 1988, 3В638)
238. —, *Pisanski T.* Inner-product representations of graphs // Graph Theory. Proc. 6th Yugosl. Semin., Dubrovnik, Apr. 18—19, 1985.— Novi Sad, 1986. — С. 151—157 (РЖМат, 1987, 11В684)
239. *Peck G. W.* A new proof of a theorem of Graham and Pollak // Discrete Math.— 1984.— *49*, № 3.— С. 327—328 (РЖМат, 1984, 11В542)
240. *Peruničić B., Durić Z.* An efficient algorithm for embedding graphs in the projective plane // Graph Theory. Proc. 6th Yugosl. Semin., Dubrovnik, Apr. 18—19, 1985.— Novi Sad, 1986.— С. 159—171 (РЖМат, 1987, 11В648)
241. *Petrovšek M., Pisanski T.* A note on function graphs // Graph Theory.

Proc. 6th Yugosl. Semin., Dubrovnik, Apr. 18—19, 1985.— Novi Sad, 1986. — C. 179—182 (РЖМат, 1987, 11B654)
242. *Pisanski T.* Nonorientable genus of Cartesian products of regular graphs // J. Graph Theory.— 1982.— *6*, № 4.— C. 391—402 (РЖМат, 1983, 6B544)
243. *Plummer M. D.* Matching extension and the genus of a graph // J. Combin. Theory.— 1988.— *B44*, № 3.— C. 329—337 (РЖМат, 1988, 9B568)
244. *Pnueli A., Lempel A., Even S.* Transitive orientation of graphs and identification of permutation graphs // Can. J. Math.— 1971.— *23*, № 1.— C. 160—175 (РЖМат, 1971, 11B498)
245. *Poljak S., Rödl V., Turzik D.* Complexity of representation of graphs by set systems // Discrete Appl. Math.— 1981.— *3*.— C. 301—312
246. *Raghavan R., Cohoon J., Sahni S.* Single bend wiring // J. Algorithms.— 1986.— *7*, № 2.— C. 232—257 (РЖМат, 1987, 4B520)
247. *Ramakrishnan I. V., Varman P. J.* On mapping cube graphs onto VLSI arrays // Lect. Notes Comput. Sci.— 1984.— *181*.— C. 296—316 (РЖМат, 1985, 5B599)
248. *Read R. C., Rotem D., Urrutia J.* Orientations of circle graphs // J. Graph Theory.— 1982.— *6*, № 3.— C. 325—341 (РЖМат, 1983, 1B650)
249. *Renz P. L.* Intersection representations of graphs by arcs // Pacif. J. Math.— 1970.— *34*, № 2.— C. 501—510 (РЖМат, 1971, 5B376)
250. *Richter R. B.* On the non-orientable genus of a 2-connected graph // J. Combin. Theory.— 1987.— *B43*, № 1.— C. 48—59 (РЖМат, 1987, 11B658)
251. — On the Eulerian genus of a 2-connected graph // J. Combin. Theory.— 1987.— *B43*, № 1.— C. 60—69 (РЖМат, 1987, 11B659)
252. —, *Shank H.* The cycle space of an embedded graph // J. Graph Theory.— 1984.— *8*, № 3.— C. 365—369 (РЖМат, 1985, 6B545)
253. *Roberts F. S.* Indifference graphs // In: Proof Techn. Graph Theory, N. Y. Acad. Press, 1969.— C. 139—146 (РЖМат, 1971, 4B438)
254. — On the boxicity and cubicity of a graph // In: Recent Progr. in Combinator., N. Y. Acad. Press, 1969.— C. 301—310 (РЖМат, 1971, 12B639)
255. — Food webs, competition graphs, and the boxicity of ecological phase space // In: Alavi Y., Lick D. eds., Theory and applications of graphs (Springer, New York, 1978a).— C. 477—490
256. — Applications of edge coverings by cliques // Discrete Appl. Math.— 1985.— *10*, № 1.— C. 93—109 (РЖМат, 1985, 7B725)
257. *Robertson N., Seymour P. D.* Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc // J. Combin. Theory.— 1986.— *B41*, № 1.— C. 115—138 (РЖМат, 1986, 12B865)
258. —, — Graph minors. VII. Disjoint paths on a surface // J. Combin. Theory. B.— 1988.— *45*, № 2.— C. 212—254 (РЖМат, 1989, 2B678)
259. *Rosenstiehl P., Tarjan R. E.* Gauss codes, planar Hamiltonian graphs, and stack-sortable permutations // J. Algorithms.— 1984.— *5*, № 3.— C. 375—390 (РЖМат, 1985, 6B610)
260. —, — Rectilinear planar layouts of planar graphs and bipolar orientations // Discrete & Comput. Geom.— 1986.— *1*.— C. 342—351
261. *Rotem D., Urrutia J.* Circular permutation graphs // Networks.— 1982.— *12*, № 4.— C. 429—437 (РЖМат, 1983, 6B527)
262. *Ryu Hae Dong, Li Chong I.* The study on the maximum genus of graphs // Сухак.— 1986.— № 3.— C. 13—16 (РЖМат, 1987, 9B612)
263. *Sachs H.* On a spatial analogue of Kuratowski's theorem on planar graphs — an open problem // Lect. Notes Math.— 1983.— *1018*.— C. 230—241 (РЖМат, 1984, 5B509)
264. *Sattath S., Tversky A.* Additive similarity trees // Psychometrica.— 1977.— *42*, № 3.— C. 319—345 (РЖМат, 1978, 8B577)
265. *Scheinerman E. R.* Characterizing intersection classes of graphs // Discrete Math.— 1985.— *55*, № 2.— C. 185—193 (РЖМат, 1985, 12B537)
266. — Irrepresentability by multiple intersection, or why the interval number

is unbounded // Discrete Math.— 1985.— *55*, № 2.— С. 195—211 (РЖМат, 1986, 2В690)
267. — Irredundancy in multiple interval representations // Discrete Math.— 1987.— *63*, № 1.— С. 101—108 (РЖМат, 1987, 7В622)
268. — The maximum interval number of graphs with given genus // J. Graph Theory.— 1987.— *11*, № 3.— С. 441—446
269. —, *West D. B.* The interval number of a planar graph: three intervals suffice // J. Combin. Theory.— 1983.— *B35*, № 3.— С. 224—239 (РЖМат, 1984, 7В447)
270. *Schlag M., Luccio F., Maestrini P., Lee D. T., Wong C. K.* A visibility problem in VLSI layout compaction // In: Advances in Computing Research, Vol. 2, JAI Press Inc., Greenwich, CT, 1985.— С. 259—282
271. *Scotti F.* Il complementare di un grafo non superiormente immergibile è superiormente immergibile // Boll. Unione mat. ital.— 1984.— *A3*, № 1. — С. 111—118 (РЖМат, 1985, 4В549)
272. *Sedlaček J.* O jednom zobecněni vnějškově rivinných grafů // Cas. pěstov. mat.— 1988.— *113*, № 2.— С. 213—218 (РЖМат, 1988, 9В562)
273. *Shaohan Ma, Wallis W. D.* Maximal-clique partitions of interval graphs // J. Austral Math. Soc. A.— 1988.— *45*, № 2.— С. 227—232
274. *Shearer J. B.* A note on circular dimension // Discrete Math.— 1980.— *29*, № 1.— С. 103 (РЖМат, 1980, 4В351)
275. *Shen X., Edelsbrunner H.* A tight lower bound on the size of visibility graphs // Inform. Process. Lett.— 1987.— *26*, № 2.— С. 61—64 (РЖМат, 1988, 4В539)
276. *Shiraishi Yoschi.* A planar description algorithm of a vertex-grouped graph and its application to a channel assignment problem // Int. Symp. Circuits and Syst. Proc., Kyoto, June 5—7, 1985, Vol. 1, New York, N. Y., s. a.— С. 195—198 (РЖМат, 1987, 4В521)
277. *Simões-Pereira J. M. S.* A note on the tree realizability of a distance matrix // J. Combin. Theory.— 1969.— *6*, № 3.— С. 303—310 (РЖМат, 1969, 11В310)
278. *Sinden F. W.* Topology of thin film RC-circuits // Théorie graphes. Journées internat. étude, Rome, 1966.— Paris—N. Y., 1967.— С. 389—393 (РЖМат, 1969, 2В257)
279. *Širáň J.* Crossing-critical edges and Kuratowski subgraphs of a graph // J. Combin. Theory.— 1983.— *B35*, № 2.— С. 83—92
280. — Edges and Kuratowski subgraphs of non-planar graphs // Math. Nachr.— 1983.— *113*.— С. 187—190 (РЖМат, 1984, 7В455)
281. —, *Horak P.* A construction of thickness-minimal graphs // Discrete Math.— 1987.— *64*, № 2—3.— С. 263—268 (РЖМат, 1987, 7В608)
282. —, *Škoviera M.* Relative embeddings of graphs on closed surfaces // Math. Nachr.— 1988.— *136*.— С. 275—284 (РЖМат, 1989, 3В493)
283. —, — Oriented relative embeddings of graphs // Zastos. mat.— 1987.— *19*, № 3—4.— С. 589—597 (РЖМат, 1988, 12В599)
284. *Skrien D.* Chronological orderings of interval graphs // Discrete Appl. Math.— 1984.— *8*, № 1.— С. 69—83 (РЖМат, 1984, 11В477)
285. —, *Gimbel J.* Homogeneously representable interval graphs // Discrete Math.— 1985.— *55*, № 2.— С. 213—216 (РЖМат, 1986, 1В763)
286. *Spinrad J.* On comparability and permutation graphs // SIAM J. Comput. — 1985.— *14*, № 3.— С. 658—670 (РЖМат, 1986, 4В697)
287. —, *West D. B.* An improved edge bound on the interval number of a graph // J. Graph Theory.— 1987.— *11*, № 3.— С. 447—449
288. *Stahl F. W.* Circular genetic maps // J. Cell Physiol.— 1967.— *70*, № 1.— С. 1—12
289. *Stańczak W.* An efficient algorithm for partitioning a network into minimally interconnected subnetworks // Contr. and Cybern.— 1984.— *13*, № 1—2.— С. 97—112 (РЖМат, 1985, 6В599)
290. *Steif J. E.* The frame dimension and the complete overlap dimension of a graph // J. Graph Theory.— 1985.— *9*, № 2.— С. 285—299 (РЖМат, 1986, 3В738)

291. *Stoffers K. E.* Scheduling of traffic lights — a new approach // Transp. Res.— 1968.— *2*.— С. 199—234
292. *Storer J. A.* On minimal node-cost planar embeddings // Networks.— 1984.— *14*.— С. 181—212
293. *Sugihara G.* Graph theory, homology and food webs // Popul. Biol. Lect. Notes Amer. Math. Soc. Short Course, Albany, N. Y., Aug. 6—7, 1983.— Providence, R. I., 1984.— С. 83—101 (РЖМат, 1985, 10В731)
294. *Sugiyama K., Tagawa S., Toda M.* Methods for visual understanding of hierarchical systems // IEEE Trans. on Syst., Man, and Cybern.— 1981. — *SMC-11*.— С. 109—125
295. *Syslo M. M.* Triangulated edge intersection graphs of paths in a tree // Discrete Math.— 1985.— *55*, № 2.— С. 217—220 (РЖМат, 1985, 12В538)
296. *Tamassia R.* On embedding a graph in the grid with the minimum number of bends // SIAM J. Comput.— 1987.— *16*, № 1.— С. 421—444
297. —, *Tollis I. G.* A unified approach to visibility representations of planar graphs // Discrete Comput. Geom.— 1986.— *1*.— С. 321—341
298. *Tarjan R. E.* Decomposition by clique separators // Discrete Math.— 1985. — *55*, № 2.— С. 221—231 (РЖМат, 1985, 12В601)
299. —, *Yannakakis M.* Simple linear-time algorithms to test chordality of graphs, test acyclicity of hypergraphs, and selectively reduce acyclic hypergraphs // SIAM J. Comput.— 1984.— *13*, № 3.— С. 566—579 (РЖМат, 1985, 2В724)
300. *Thomassen C.* Plane representations of graphs // In: Progress in Graph Theory, Academic Press, N. Y., 1984.— С. 43—69
301. — Planarity and duality of finite and infinite graphs // J. Combin. Theory.— 1980.— *B29*, № 2.— С. 244—271 (РЖМат, 1981, 3В530)
302. — Interval representations of planar graphs // J. Combin. Theory.— 1986.— *B40*, № 1.— С. 9—20 (РЖМат, 1986, 7В613)
303. *Trotter W. T. (Jr.).* A characterization of Roberts' inequality for boxity // Discrete Math.— 1979.— *28*, № 3.— С. 303—313 (РЖМат, 1980, 4В382)
304. —, *Harary F.* On double and multiple interval graphs // J. Graph Theory. — 1979.— *3*, № 3.— С. 205—211 (РЖМат, 1980, 8В328)
305. —, *West D. B.* Poset boxicity of graphs // Discrete Math.— 1987.— *64*, № 1.— С. 105—107 (РЖМат, 1987, 9В585)
306. *Tucker A.* Matrix characterizations of circular-arc graphs // Pacif. J. Math.— 1971.— *39*, № 2.— С. 535—545 (РЖМат, 1972, 8В385)
307. — Structure theorems for some circular-arc graphs // Discrete Math.— 1974.— *7*, № 1—2.— С. 167—195 (РЖМат, 1974, 8В332)
308. — Circular arc graphs: new uses and new algorithm // Lect. Notes Math. — 1978.— № 642.— С. 580—589 (РЖМат, 1979, 2В501)
309. — An efficient test for circular-arc graphs // SIAM J. Comput.— 1980.— *9*, № 1.— С. 1—24 (РЖМат, 1980, 9В577)
310. *Tutte W. T.* Convex representations of graphs // Proc. London Math. Soc. — 1960.— *10*, № 38.— С. 304—320 (РЖМат, 1961, 7А329)
311. *Veldhorst M.* The optimal representation of disjoint iso-oriented rectangles in two-dimensional trees // J. Algorithms.— 1986.— *7*, № 1.— С. 1—34 (РЖМат, 1987, 4В504)
312. *Voss H.-J.* Note on a paper of McMorris and Shier // Comment. math. Univ. carol.— 1985.— *26*, № 2.— С. 319—322 (РЖМат, 1986, 1В761)
313. *Walter J. R.* Representations of chordal graphs as subtrees of a tree // J. Graph. Theory.— 1978.— *2*, № 3.— С. 265—267
314. *Walther H. J.* On a conjecture of W. Klotz concerning clique-decomposition of graphs // Graphs, Hypergraphs and Matroids. II. Zielona Góra, 1987.— С. 83—88 (РЖМат, 1988, 12В619)
315. *Warfield J.* Crosiing theory and hierarchy mapping // IEEE Trans. Syst., Man, and Cybern.— 1977.— *SMC-7*.— С. 502—523
316. *Wegner G.* Eigenschaften der Nerven homolgish-eigenfacher Familien in R^h // Ph. thesis Göttingen, 1967
317. *Welzl E.* Constructing the visibility graph for n-line segments in $O(n^2)$

time // Inform. Process. Lett.— 1985.— *20*, № 4.— С. 167—171 (РЖМат, 1986, 1В764)
318. *Wessel W.* Chord graphs — new means for representing graphs // Zastos. mat.— 1987.— *19*, № 3—4.— С. 619—627
319. — The non-biplanar character of the graph K_{10}—K_3 // Prepr. Akad. Wiss. DDR. Karl-Weierstrass Inst. Math.— 1988.— № 3.— С. 1—21 (РЖМат, 1988, 9В570)
320. *West D. B., Shmoys D. B.* Recognizing graphs with fixed interval number is NP-complete // Discrete Appl. Math.— 1984.— *8*, № 3.— С. 295—305 (РЖМат, 1984, 11В552)
321. *White K., Farber M., Pulleyblank W.* Steiner trees, connected domination and strongly chordal graphs // Networks.— 1985.— *15*, № 1.— С. 109—124 (РЖМат, 1986, 2В749)
322. *Wilf H. S.* Finite lists of obstructions // Amer. Math. Mon.— 1987.— *94*, № 3.— С. 267—271 (РЖМат, 1987, 9В610)
323. *Winkler P. M.* Proof of the squashed cube conjecture // Combinatorica.— 1983.— *3*, № 1.— С. 135—139
324. — Isometric embedding in products of complete graphs // Discrete Appl. Math.— 1984.— *7*, № 2.— С. 221—225 (РЖМат, 1984, 6В478)
325. — Every connected graph is a query graph // J. Combinatorics, Inf. and Syst. Sci.— 1985.— *10*, № 1—2.— С. 1—4 (РЖМат, 1987, 9В645)
326. — The metric structure of graphs: theory and applications // London Math. Soc. Lect. Note Ser.— 1987.— № 123.— С. 197—221 (РЖМат, 1988, 2В626)
327. *Witsenhausen H. S.* On intersections of interval graphs // Discrete Math. — 1980.— *31*, № 2.— С. 211—216 (РЖМат, 1981, 4В429)
328. — Minimum dimension embedding of finite metric spaces // J. Combin. Theory.— 1986.— *A42*, № 4.— С. 184—199 (РЖМат, 1986, 11В484)
329. *Wolfe D.* Imbedding a finite metric set in an *N*-dimensional Minkowski space // Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.— 1967.— *A70*, № 1.— С. 136—140 (РЖМат, 1967, 11А540)
330. *Woods D.* Drawing planar graphs, Ph. D. Thesis // Computer Science Dept., Stanford Univ., 1982
331. *Yoshioka Chiko, Tanabe Chieko.* On some embedding of complete graphs // Ниигата дайгаку кёику гакубу киё. Сидзэн кагакухэн. Mem. Fac. Educ. Niigata Univ. Nat. Sci.— 1987.— *28*, № 2.— С. 57—62 (РЖМат, 1987, 12В717)
332. *Zeleznik V.* Quadrilateral embeddings of the conjunction of graphs // Math. slov.— 1988.— *38*, № 2.— С. 89—98
333. *Živković T. P.* Graphical representation of regular resonance structures and their linear dependence // Discrete Appl. Math.— 1988.— *19*, № 1—3.— С. 397—414 (РЖМат, 1988, 12В636)