



Общероссийский математический портал

Л. А. Макриденко, В. Я. Геча, Н. И. Сидняев, В. В. Онуфриев, С. А. Говор, Определение высотных характеристик электрических ракетных двигателей космического аппарата методами планирования эксперимента, *Пробл. управл.*, 2017, выпуск 1, 75–85

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

8 февраля 2025 г., 03:36:24



# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫСОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РАКЕТНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА МЕТОДАМИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Л.А. Макриденко, В.Я. Геча, Н.И. Сидняев, В.В. Онуфриев, С.А. Говор

Предложена методика проведения испытаний, основанная на применении теории планирования эксперимента. Выполнен анализ требуемых сочетаний высоты и скорости полета для оптимального управления космическим аппаратом. Представлены соответствующие значения параметров космической среды перед спутником. Получена регрессионная модель расходной характеристики электроракетного двигателя — зависимость его параметров от удельной тяги. Уделено внимание многофакторному подходу к проведению эксперимента при управлении ресурсами двигательной установки. Проиллюстрированы не поочередное, а одновременное изменение от точки к точке плана всех действующих факторов. Получены оптимальные планы многофакторного эксперимента.

**Ключевые слова:** космический аппарат, двигатель, планирование эксперимента, расходные характеристики, тяга, испытания, точка плана, уравнение, наблюдения.

## ВВЕДЕНИЕ

Электроракетное двигателестроение является новой, быстро развивающейся отраслью космического двигателестроения, объединяющего проектирование, отработку и изготовление космических двигательных установок. Электрическими двигательными установками принято называть двигательные установки космических летательных аппаратов (КЛА), предназначенные для выполнения в условиях космического полета баллистического маневра [1]. При полетах КЛА по орбитам спутников небесных тел или по межпланетным траекториям создание необходимых управляющих сил и моментов в целях сохранения параметров орбит (траекторий) и заданного положения КЛА в космическом пространстве представляет собой сложную задачу. Такая задача возникает, например, при околопланетных полетах и при управлении изменением скорости КЛА в целях перевода их с одной орбиты на другую, коррекции орбит, сближения и стыковки аппаратов, управления при обеспечении посадки КЛА на небесные тела, взлета с них и др.,

при межпланетных перелетах сообщения космическим летательным аппаратам необходимых приращений скорости для ухода из сферы действия небесных тел, перевода КЛА с межпланетной орбиты на орбиту спутника небесных тел и др. В работу современных электрических двигательных установок положен принцип создания реактивной движущей силы. Характерный элемент — двигатель, в котором подводимая энергия преобразуется в кинетическую энергию истекающего рабочего вещества и сила реакции, возникающая при истечении, непосредственно служит движущей силой (силой тяги) [2].

В современных КЛА широко применяются двигательные установки с химическими и газовыми реактивными двигателями. В химических двигателях запасенное на борту топливо одновременно служит источником энергии и источником рабочего вещества, а специальные системы преобразования и рассеяния энергии отсутствуют. Рабочий процесс химических двигателей складывается из двух основных стадий: сначала в камере сгорания химическая энергия топлива преобразуется в тепловую энергию газообразных продуктов сгорания,

а затем в сопле тепловая энергия переходит в кинетическую энергию реактивной струи газов. Возможные значения эффективной скорости истечения в химических двигателях ограничены как сравнительно малой энергией химических связей, так и высокой молекулярной массой продуктов сгорания. Достижимые эффективные скорости истечения в химических двигателях не превышают 4,5–5,0 км/с.

К настоящему времени электроракетные двигатели (ЭРД) нашли применение в системах ориентации и коррекции различных космических летательных аппаратов [2]. Как в России, так и за рубежом неоднократно проводились летно-космические испытания ЭРД различных классов, на ряде космических объектов ЭРД выполняли рабочие функции. Предусматривается применение ЭРД в перспективных маршевых двигательных установках. Выполненные разработки и летно-космические испытания выявили ряд преимуществ ЭРД по сравнению с двигателями других классов, применяемыми для решения сходных задач, например, по сравнению с газовыми реактивными системами и микро-ЖРД.

Для ряда практически важных задач ЭРД по существу не имеют конкурентов [2]. Их основные преимущества, подтвержденные в процессе исследований и разработок высокий удельный импульс (от 5–10 км/с для электродуговых двигателей до 100 км/с для ионных двигателей), большой ресурс, возможность большого числа включений (сотни — тысячи), предельно малый единичный импульс до  $10^{-4}$  Н и др.

Достигнутый к настоящему времени уровень характеристик ЭРД не является пределом возможного, работы по дальнейшему более углубленному исследованию двигателей и ускорителей продолжают. На новом этапе исследований можно ожидать дальнейших успехов: расширения диапазона стабильной работы ускорителей с высокой эффективностью и низким уровнем колебаний, появления новых разновидностей ускорителей, обладающих принципиально важными преимуществами. Полученные к настоящему времени результаты послужили научным фундаментом, на базе которого были созданы принципиально новые высокоэффективные классы перспективных космических электроракетных двигателей.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Программа испытаний опытного ЭДР обычно включает в себя экспериментальное определение сетки его орбитальных характеристик во всем диа-

пазоне условий полета. Результаты такого эксперимента необходимы для управления и анализа летно-технических данных спутников, поскольку расчетные орбитальные характеристики двигателя, используемые на первых этапах создания спутника, не всегда в полной мере отражают действительное влияние условий полета. Так, например, одним из перспективных ЭРД для корректирующих и маршевых двигательных установок считается электродуговой двигатель, обладающий высоким энергетическим КПД и малой ценой тяги (единицы Вт/мН), что позволит реализовать ЭРД с тягой 110 Н при энергозатратах около 15 кВт. Увеличение удельного импульса электродугового двигателя до 15 км/с (при использовании водорода) позволит создать высокоэффективный ЭРД, конкурирующий с современными электростатическими ЭРД. Вместе с тем, такой двигатель является прямым преемником микро-ЖРД и имеет аналогичный ему рабочий процесс и механизм ускорения потока. Электродуговой двигатель может использоваться в качестве маршевого в задаче доведения космического аппарата на расчетную орбиту. Неоспоримое преимущество электродугового двигателя состоит в использовании дешевого рабочего тела (аммиак, гидразин, водород) по сравнению с электростатическими ЭРД, использующими ксенон; когда суммарная масса рабочего тела может составлять от сотни килограммов до нескольких тонн. Такие, часто весьма существенные, полетные факторы как изменение плотности во всех элементах обтекаемой части, нарушение геометрического подобия из-за термических и упругих деформаций деталей, изменение действительных характеристик системы управления и ограничения режимов и ряд других, учитываются в расчетах недостаточно полно, даже если используемая математическая модель идентифицирована по результатам наземных стендовых испытаний двигателя [2].

Анализ характеристик двигателей такого класса показал, что в ряде случаев, в особенности при сложных законах управления, изменение параметров двигателя не может быть описано уравнениями второго порядка, так как соответствующие кривые содержат точки перегиба и существенно меняют свой вид в заданных пределах изменения факторов. Применение планов эксперимента третьего или четвертого порядка связано со значительным увеличением числа опытов и в данной задаче нерационально. В настоящей статье проанализирован способ, позволяющий в таких случаях ограничиться экономными планами второго порядка (композиционными или почти *D*-оптимальными) для нахождения в процессе эксперимента квадратных поправок к некоторой базовой ха-



рактической заранее описываемой уравнением любой необходимой сложности. Но, вместе с тем, отметим, что при планировании эксперимента даже незначительная погрешность отклонений приведенных параметров от базовых характеристик (обычно отклонение не превышает 5...10 %) лишь в малой степени отразится на точности определения абсолютного значения параметра.

Орбитальные характеристики двигателя определяются путем измерения его параметров на различных режимах на специальном высотном стенде, позволяющем создать тягу в двигателе  $p_b^*$  и расход топлива  $G_b^*$ , равные их значениям в полете на заданной высоте  $H$  с заданной скоростью  $V$  (числом Маха  $M$ ), а за соплом двигателя — давление  $p_H$ , равное атмосферному давлению на этой высоте.

Традиционная методика проведения испытаний сводится к следующему. Выбирается одно из требуемых сочетаний высоты и скорости полета, устанавливаются соответствующие значения параметров космической среды перед спутником и в этих условиях определяется дроссельная характеристика двигателя — зависимость его параметров от удельной тяги  $p_b^*$ . После этого меняется высота (или скорость) полета космического аппарата, соответственно корректируются параметры воздуха на баллистической траектории спутника и вновь определяется дроссельная характеристика и т. д. Другими словами, испытания сводятся к серии однофакторных экспериментов, в каждом из которых изучается влияние удельного расхода двигателя при постоянстве остальных определяющих параметров [3]. При таком подходе для получения сетки баллистических характеристик двигателя на различных режимах требуется определить (в зависимости от заданного диапазона условий полета) не менее 8—10 дроссельных характеристик, на каждой из которых обычно снимается 5—6 точек при разных удельных тягах; объем эксперимента получается достаточно большим. Между тем, испытания по определению высотно-скоростных характеристик по своему существу представляют собой задачу, при решении которой возможно эффективное применение методов теории планирования эксперимента (ТПЭ), позволяющих получить требуемые результаты при существенном сокращении необходимого числа опытов [4].

Основная особенность всех методов ТПЭ, как известно, заключается в многофакторном подходе к проведению эксперимента, предусматривающем не поочередное, а одновременное изменение от точки к точке всех действующих факторов. Разработанные в теории методы составления оптимальных планов многофакторного эксперимента позволяют выбрать для проведения опытов наиболее

информативные сочетания значений определяющих факторов и обоснованно назначить число опытов, необходимое и достаточное для получения результата с требуемой полнотой и точностью. Результаты опытов, проведенных в соответствии с многофакторным планом, обрабатываются так, чтобы по измеренным значениям определить коэффициенты уравнения регрессии заранее выбранного вида (обычно полинома) и получить, таким образом, математическое описание зависимости изучаемых параметров или характеристик объекта (функций отклика) от определяющих факторов и их взаимодействий [5].

Применительно к рассматриваемой задаче определения баллистических параметров многофакторный план эксперимента означает, что при испытаниях на высотном стенде от точки к точке надо менять не только тягу двигателя, как при традиционном подходе, но одновременно и параметры, характеризующие высоту и скорость полета. Первичные результаты испытания при этом не представляют собой каких-либо характеристик, а являются набором экспериментальных точек, соответствующих различным сочетаниям значений  $H$ ,  $V$  и  $p_b^*$ , из которых искомые характеристики определяются только после специальной математической обработки. Реализация такого подхода к ответственному и дорогостоящему эксперименту на двигателе требовала преодоления известного психологического барьера, поскольку она противоречила прочно установившейся и проверенной многолетней практикой методике высотных испытаний.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ПЛАНА ЭКСПЕРИМЕНТА. РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ

При испытаниях на высотном стенде ЭРД были применены методы теории планирования эксперимента. Согласно программе требовалось определить изменение основных параметров в зависимости от тяги двигателя ( $p_b^* = 15 \cdot 10^{-2}$  Н) диапазоне высот 200—250 км при постоянном числе Маха  $M$  набегающего потока [6]. Эти условия означают, что при испытаниях температура торможения на входе в двигатель должна сохраняться постоянной, а изменение высоты полета имитируются изменением полного давления воздуха на входе, причем требуется изменять и давление в барокамере  $p_H$  соответственно тяге  $p_b^*$ , сохраняя постоянным зависящее от числа  $M$  набегающего потока отношение  $p_b^*/p_H$ . Поэтому в качестве факторов были выбраны две независимые, управляемые и хорошо контролируемые величины — удельная тяга  $p_b^*$  и полное давление воздуха  $p_H$ . Функциями

отклика служили основные параметры двигателя — реактивная тяга и расход топлива. Результаты наблюдений, проведенных в соответствии с многофакторным планом, обрабатывались так, чтобы по измеренным величинам определить коэффициенты уравнения регрессии заранее выбранного вида (обычно полинома) и получить, таким образом, математическое описание зависимости изучаемых параметров или характеристик объекта (функций отклика) от определяющих факторов и их взаимодействий.

Анализ ранее полученных экспериментальных, а также расчетных высотных характеристик показал, что исследуемые зависимости в указанных диапазонах изменения факторов могут быть хорошо аппроксимированы параболой. Исходя из этого, для проведения опытов был принят двухфакторный композиционный ротatableльный план второго порядка [6, 7], состоящий, как известно, из девяти точек (опытов), расположенных в факторной плоскости в вершинах квадрата, в центре и на осях координат на расстоянии «звездного» плеча  $\alpha = \sqrt{2} \approx 1,414$  от центра [8].

Связь между физическими значениями факторов в точках плана  $p_H(z_1)$  и  $p_v^*(z_2)$  и их безразмер-

ными (кодированными) значениями  $x_1$  и  $x_2$  определяется из соотношения

$$x_i = \frac{z_i - z_{i0}}{\Delta z_i},$$

где  $z_{i0} = (z_{i\max} + z_{i\min})/2$  — нулевое значение и  $\Delta z_i = (z_{i\max} - z_{i\min})/2$  — интервал варьирования. В соответствии с обычной методикой в качестве факторов — их в данном случае три — были приняты тяга  $p$ , высота  $H$  и число Маха  $M$  набегающего потока (табл. 1). Диапазон изменения этих величин был задан программой  $H = 200 \div 250$  км;  $M = 22 \div 25$ ;  $p = 10^{-2} \div 15^{-2}$  Н. В данном случае используются новые переменные:  $X_1 = H$ ,  $X_2 = M$ ,  $X_3 = p$ .

Далее осуществляется переход к кодированным переменным:

$$x_1 = \frac{X_1 - 225}{25}, \quad x_2 = \frac{X_2 - 23,5}{1,5}, \quad x_3 = \frac{X_3 - 1,25}{0,5}.$$

Постулируемая модель представлена в виде полинома:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{123}x_1x_2x_3,$$

где  $y$  — расход, мг/с. Для этого полинома необходимо найти неизвестные коэффициенты. Соответственно строится матрица плана с дублированным экспериментом (табл. 2).

В представленной модели наблюдения удовлетворяют следующим условиям.

- Результаты эксперимента свободны от систематических ошибок или, иными словами, математическое ожидание величины  $y_i$  равно действительному значению выхода в точке  $x^i$ :  $M\{y_i\} = f^i(x)$ , т. е.  $M\{\varepsilon_i\} = 0$ .
- Результат наблюдения в точке  $x^i$  не зависит от результата в точке  $x^j$ , т. е. наблюдения некоррелированные.
- Дисперсия наблюдений во всех точках  $x^i$  одинакова, т. е.  $D\{y_i\} = \sigma^2$  для всех  $i$  или  $D\{\varepsilon_i\} = \sigma^2$  для всех  $i$ .

С учетом этих условий постулируемую модель для всех наблюдений можно записать в матричном виде:  $Y = Xb + \varepsilon$ ;  $M\{\varepsilon\} = 0$ ;  $D\{\varepsilon\} = \sigma^2 I_N$ , где  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)'$  — случайный вектор,  $I_N$  — единичная матрица. Это выражение описывает линейную модель с некоррелированными наблюдениями.

Таблица 1

Диапазоны изменения факторов

Факторы	Высота, км, $X_1$	Число Маха, $X_2$	Тяга, $10^{-2}$ Н, $X_3$
Основной уровень (нулевой)	225	23,5	1,25
Нижний уровень (-1)	200	22	1
Верхний уровень (+1)	250	25	1,5
Шаг варьирования	25	1,5	0,5

Таблица 2

Кодированные факторы и их взаимодействия

№	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	$y_1'$	$y_1''$
1		-	-		+	+		-	1,546	1,406
2		+	-		-	-	+	+	1,453	1,403
3		-	+			+		-	1,434	1,34
4		+	+		+	-	-	-	1,334	1,301
5	+	-	-					+	1,321	1,296
6		+	-		-	+		-	1,251	1,251
7		-	+	+		-		-	1,234	1,234
8		+	+		+	+	+	+	1,152	1,052

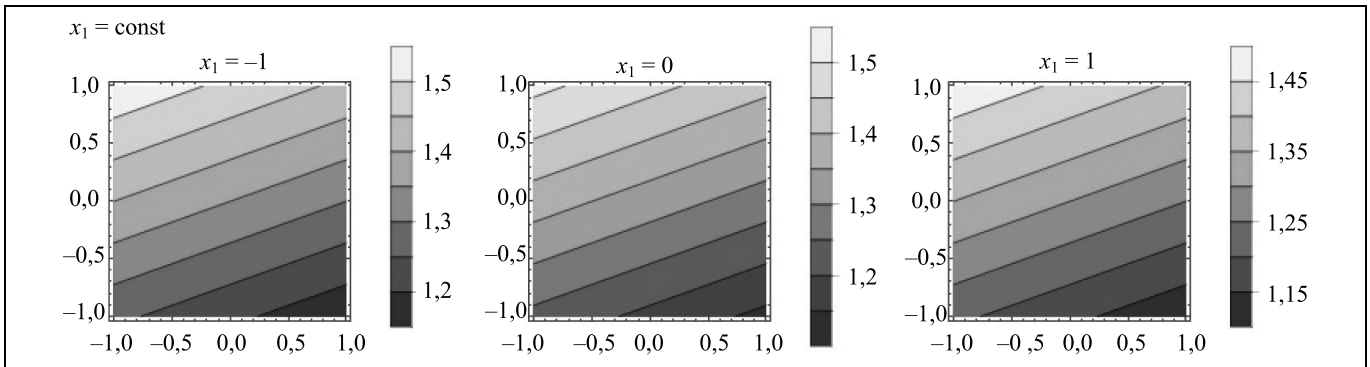


Рис. 1. Линии уровня при фиксировании первого фактора — высоты

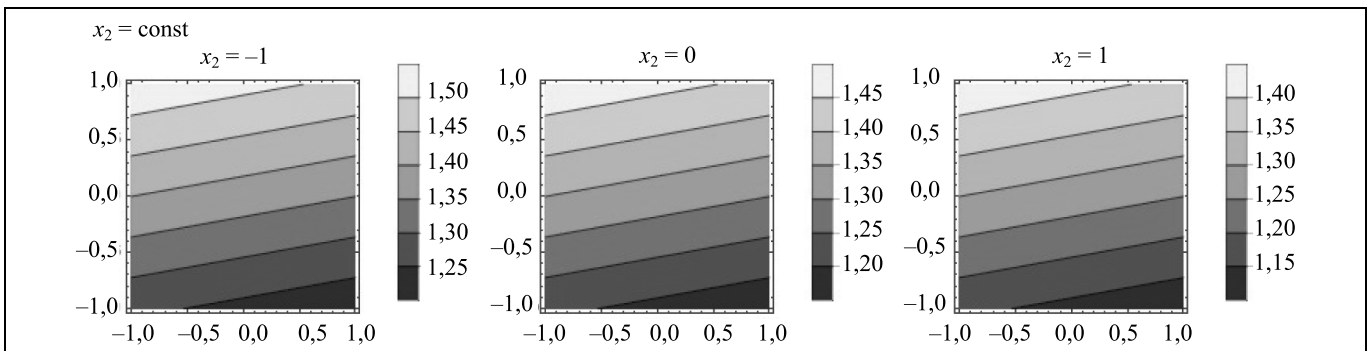


Рис. 2. Линии уровня при фиксировании второго фактора — числа Маха

Задача состоит в том, чтобы найти оценку  $\hat{b}$  вектора  $b$ . Для этого будем рассматривать класс линейных оценок, образуемых линейными комбинациями результатов наблюдений  $y_i$ .

Рассмотрим функционал

$$S = \sum_{i=1}^N (y_i - \tilde{y}_i)^2 = |Y - \tilde{Y}|^2 = (Y - \tilde{Y})(Y - \tilde{Y}),$$

где  $Y$  — вектор наблюдений;  $\tilde{Y} = Xb$  — вектор истинных значений выхода.

Значение  $\hat{b}$ , минимизирующее представленный функционал при наблюдаемых значениях  $y_1, y_2, \dots, y_N$ , называется оценкой метода наименьших квадратов (МНК-оценкой) неизвестного параметра  $b$ .

Таким образом,  $S(\hat{b}) = \min_b S(b)$ .

Очевидно, что этот функционал можно записать как  $S = S(b) = Y'Y + \beta X'Xb - 2Y'Xb$ . Здесь  $S$  — расширенная квадратичная форма  $b_p$ , которая в случае невырожденности матрицы  $X'X$  имеет единственный минимум при  $b = \hat{b} = (X'X)^{-1}X'Y$ . Матрица

$X'X$  невырожденная, т. е.  $\det(X'X) \neq 0$ , если матрица  $X$  имеет ранг  $k + 1$ .

Матрица  $C = (X'X)^{-1}$  размера  $(k + 1) \times (k + 1)$  есть дисперсионная матрица. Таким образом,  $\hat{b} = CX'Y$ . Соответствующие уравнения с рассчитанными коэффициентами представлены в виде:

$$y_1' = 1,341 - 0,043x_1 - 0,052x_2 - 0,101x_3 - 2,375 \cdot 10^{-3}x_1x_2 + 5,125 \cdot 10^{-3}x_1x_3 + 5,625 \cdot 10^{-3}x_2x_3 - 6,25 \cdot 10^{-4}x_1x_2x_3,$$

$$y_1'' = 1,285 - 0,034x_1 - 0,054x_2 - 0,077x_3 - 0,022x_1x_2 - 0,023x_1x_3 - 0,012x_2x_3 - 0,013x_1x_2x_3.$$

В табл. 2 представлены расчетные значения расходных характеристик  $y_1'$  и  $y_1''$  при первом и втором продублированном эксперименте. Анализируя полученные уравнения регрессии и поверхность отклика (рис. 1–3), можно сделать вывод, что межфакторное взаимодействие незначительное. Наибольшее воздействие на характеристики двигателя при управлении оказывает высота, затем число Маха и тяга.

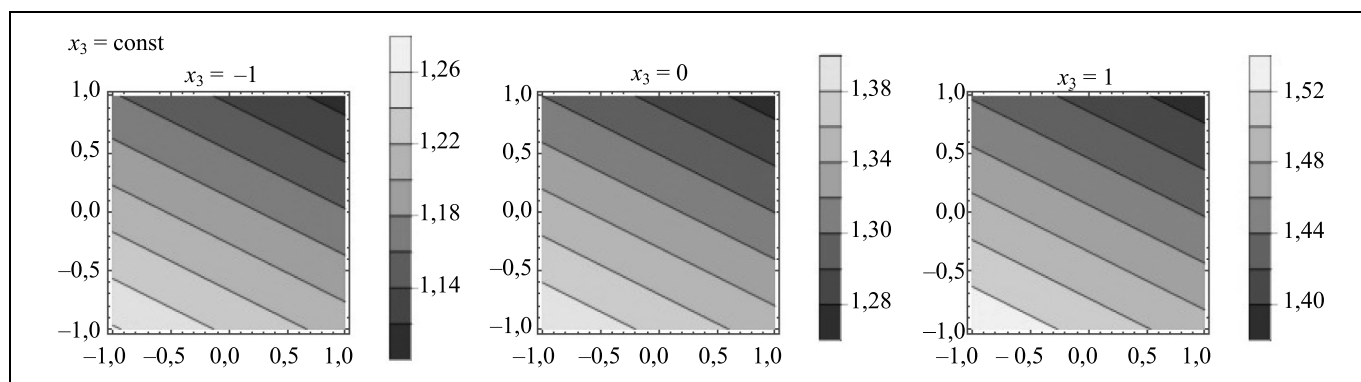


Рис. 3. Линии уровня при фиксировании третьего фактора — тяги

Здесь матрица плана и вектор исходных данных при дублировании эксперимента имеет вид [8]:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0,5 & -1 \\ 1 & -1 & 0,5 & 1 & -0,5 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, y_1 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,45 \\ 1,4 \\ 1,33 \\ 1,3 \\ 1,25 \\ 1,2 \\ 1,15 \end{pmatrix}.$$

В данном случае две вершины заменены на точки с координатами (1; 1; 0,5) и (-1; 0,5; 1). Аналитическая зависимость примет вид:

$$y = 1,323 - 0,028x_1 + 0,191x_2 + 0,152x_3 - 0,246x_1x_2 + 0,252x_1x_3 + 0,252x_2x_3 + 0,00025x_1x_2x_3.$$

Далее приведен пример построения ортогонального центрального композиционного плана (ОЦКП) второго порядка для  $n = 2$  (рис. 4). Постулируется математическая модель вида

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_3(x_1^2 - a) + b_4(x_2^2 - a).$$

Коэффициенты регрессионной модели в этом случае вычисляются по формуле

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^N x_{ij}y_j}{\sum_{j=1}^N x_{ij}^2}.$$

Параметры плана  $N_0 = 4$ ,  $N = 9$ ,  $a = 1,414$ ,  $a = 2/3$ ,  $1 - a = 1/3$ ,  $a^2 - a = 1,339$ , откуда константа преобразования

$$a = \sqrt{\frac{N_0}{N}} = \sqrt{\frac{2^n}{2^n + 2n + n_0}}.$$

В ОЦКП каждый фактор в общем случае фиксируется на пяти уровнях  $(-\alpha, -1, 0, +1, +\alpha)$  (табл. 3). В табл. 4 приведены кодированные и соответствующие им физические значения факторов в точках плана.

Коэффициенты полинома  $b_0 = 4$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 0,138$ ,  $b_{12} = 0,5$ ,  $b_3 = 3$ ,  $b_4 = 0$ . Переменные

$$x_1 = \frac{M - 225}{25} \text{ и } x_2 = \frac{p - 1,25}{0,5}.$$

Полученное регрессионное уравнение принимает вид:  $\hat{y} = 4 + 0,138x_2 + 1,5x_1x_2 + 3(x_1^2 - 0,67)$ . Соответствующие регрессионные кривые при раз-

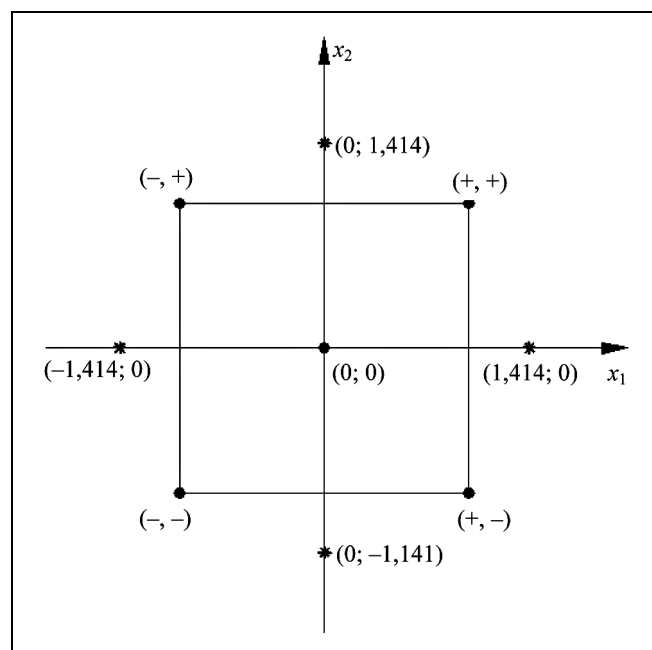


Рис. 4. Расположение «звездных» точек композиционного плана второго порядка для двух факторов



личных вариациях параметров представлены на рис. 5 и 6.

Полезно рассмотреть случай при одновременном варьировании трех факторов ( $n = 3$ ). Зададимся значениями орбитальных характеристик:  $H = 200 \div 250$  км;  $M = 22 \div 25$ ;  $p = 1 \div 1,5 \cdot 10^{-2}$  Н.

Постулируемая регрессионная модель в этом случае имеет вид:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_1x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2,$$

$$N_0 = 8, \quad N = 15, \quad \alpha = 1,68,$$

$$c = (N_0 + 2\alpha^2)/N = 0,7,$$

Таблица 3

Уровни плана

Уровень $x$	Высота $H$ , км	Тяга $p$ , $10^{-2}$ Н
$+\alpha$	251,4	0,4
$+$	250	1
$0$	225	1,25
$-$	200	1,5
$-\alpha$	198,6	2,9

Таблица 4

Композиционный план

№	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	$y$	$\hat{y}$
1	+	-	-	+	1/3	1/3	6	6,352
2		+	-	-			3	6,352
3		-	+	-			4	6,628
4		+	+	+			7	6,628
5		-1,414	0	0	-2/3	-2/3	5	10,95362
6		1,414					5	11,07105
7		0	0	-1,414	-2/3	1/3	1	10,95362
8				1,414			3	11,07105
9				0			2	1,989211

Таблица 5

Уровни плана

Уровень $x$	Высота $H$ , км	Число Маха $M$	Тяга $p$ , $10^{-2}$ Н
$+\alpha$	251,2	26,2	0,2
$+$	250	25	1
$0$	225	23,5	1,25
$-$	200	22	1,5
$-\alpha$	198,8	20,8	2,7

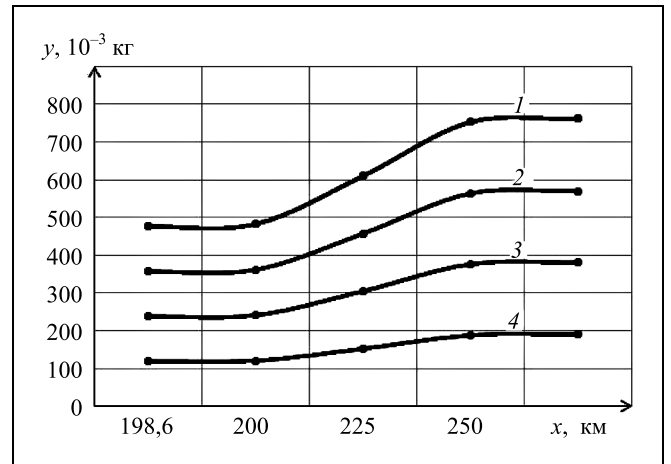


Рис. 5. Зависимость функции отклика от влияющих факторов при фиксированных значениях тяги: 1 –  $x_2 = 1$ ; 2 –  $x_2 = 1,25$ ; 3 –  $x_2 = 1,5$ ; 4 –  $x_2 = 2,9$

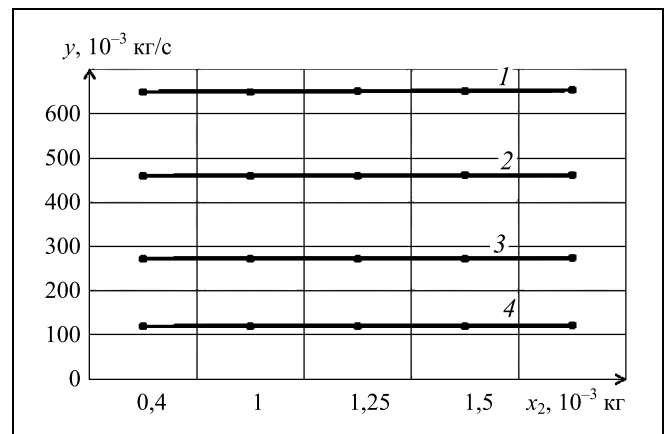


Рис. 6. Зависимость функции отклика от влияющих факторов при фиксированных значениях высоты полета: 1 –  $H = 251,4$ ; 2 –  $H = 250$ ; 3 –  $H = 225$ ; 4 –  $H = 200$

в ОЦКП второго порядка каждый фактор в общем случае фиксируется на пяти уровнях ( $+\alpha, +, 0, -, -\alpha$ ). В табл. 5 приведены кодированные и соответствующие им физические значения факторов в точках плана (табл. 6). На рис. 7 и 8 указаны точки плана, где проводились вычисления.

После вычисления коэффициентов полинома и анализа окончательно регрессионная модель примет вид:

$$y = 4,5 + 0,68x_1 + 0,2x_2 + 0,12x_3 + x_1x_2 + 0,5x_1x_3 + 0,75x_2x_3 + 2,95x_1^2 + 2,15x_2^2 + 3,35x_3^2.$$

Результаты измерений, проведенных в точках плана при незначительном отличии действительных значений факторов от указанных на рис. 7 и



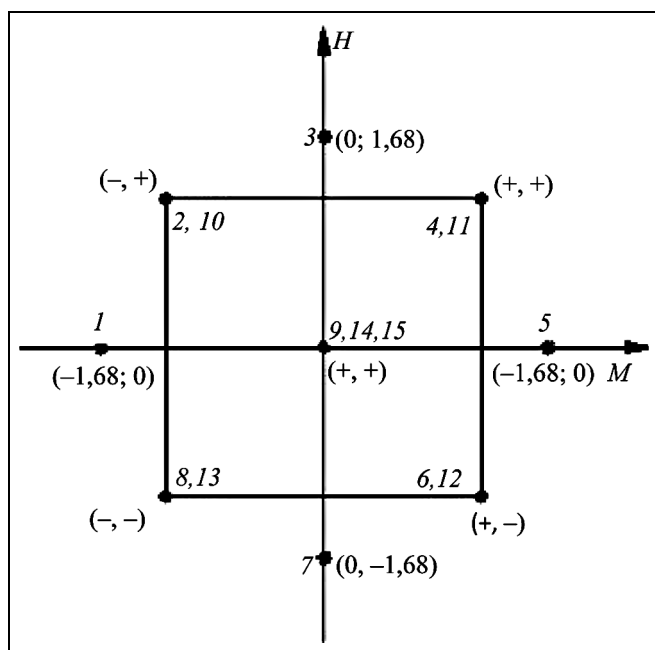


Рис. 7. Расположение «звездных» точек композиционного плана второго порядка для двух факторов

в табл. 6, были использованы для определения коэффициентов уравнений регрессии  $b_i$  по общим формулам, приведенным, например, в работе [7].

После проверки по  $t$ -критерию абсолютных значений полученных коэффициентов и исключения статистически незначимых членов (т. е. находящихся в пределах возможной погрешности их вычисления) уравнения регрессии принимаются в окончательном виде. Проверка по  $F$ -критерию показывает, что уравнения адекватно описывают результаты эксперимента. Заменяя в уравнениях кодированные значения факторов физическими, получаем выражения, с помощью которых можно рассчитать сколь угодно подробную сетку высотных расходных и тяговых характеристик в исследованном диапазоне изменения параметров космической среды. Для более наглядной прямой проверки уравнений регрессии можно дополнительно к точкам плана, в условиях, соответствующих минимальной и максимальной высотам полета, обычным способом снять две дроссельные характеристики. При обычном подходе в данной задаче для получения результатов потребовалось бы снять не менее четырех дроссельных характеристик, т. е. провести примерно 20–25 опытов.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Многофакторный план даже в рассмотренной простой задаче позволяет сократить необходимый объем эксперимента примерно вдвое (с учетом

Таблица 6

Композиционный план второго порядка

№	Матрица независимых переменных										y				
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$					
1	+	—	—	—	+	+	+	0,3	0,3	0,3	8				
2		+	—		—	—					—	—	4		
3		—	+			+	—				+		—	3	
4		+	—		—		+				—	+		7	
5		—	—	+		—	—				—		5		
6		+	—		+	—	+					+	7		
7		—	+	—		+	—				—		7		
8		+	+		—	+	+					+	9		
9		—1,215	0	0		0	0				0		0,8	—0,3	—0,3
10		1,215			—1,215							1,215			
11		0	1,215	—1,215		1,215	0				0		—0,3	—0,3	0,8
12					0							1,215			
13		0	1,215	—1,215		1,215	0				0		—0,3	—0,3	0,8
14					0							1,215			
15		0	1,215	—1,215		1,215	0				0		—0,3	—0,3	0,8

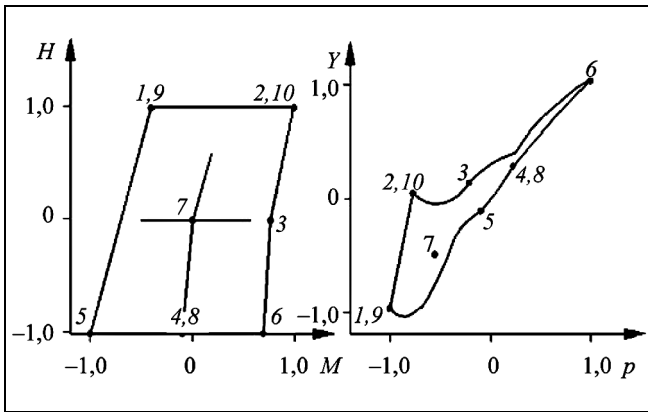


Рис. 8. Сочетания параметров  $H$ ,  $M$ ,  $p$  и  $Y$  в точках плана эксперимента при изменении условий полета

нескольких повторных опытов для оценки дисперсии воспроизводимости); при большем числе факторов эффективность методов ТПЭ будет еще большей.

Первые положительные результаты, полученные в настоящей работе, позволят перейти к применению методов ТПЭ для решения более сложной задачи — определения управляющих параметров высотно-скоростных характеристик ЭРД.

Отметим, что для описания расчетных высотно-скоростных характеристик ЭРД достаточно уравнения второго порядка с взаимодействиями. Поэтому в эксперименте может быть применен ротатбельный композиционный план второго порядка, включающий в себя 15 опытов при различных сочетаниях величин  $H$ ,  $M$ ,  $p_v^*$ . Определение коэффициентов уравнения одновременно по всем снятым экспериментальным точкам, т. е. построение общей для всех снятых точек поверхности отклика, имеет важные преимущества по сравнению с построением обычных однофакторных зависимостей [8].

При известном из теории снижении дисперсии определения коэффициентов уравнения регрессии — повышении точности оценки влияния отдельных факторов и их взаимодействий — по остаточным разностям легко обнаруживаются выпадающие точки, где при наблюдениях или первичной обработке были допущены грубые ошибки. На кривых (дроссельных характеристиках), построенных по небольшому числу точек однофакторного эксперимента, такие ошибки могут остаться незамеченными, однако при перестроении характеристик, например, по числу  $M$  или высоте при постоянном давлении, могут привести к неверным выводам [8]. В данной работе указанные соображения позволили устранить несколько ошибок и

значительно уменьшить остаточную дисперсию. Данные, полученные в этом эксперименте по 12-ти опытам, при традиционной методике потребовали бы снятия дроссельных характеристик по меньшей мере на трех-четыре значения высоты и трех числах  $M$  на каждой из них, т. е. примерно втрое большего числа опытов [7].

Анализ материалов эксперимента показал, что в качестве фактора целесообразно выбирать не физическую, а удельную тягу  $p_v^*$ , являющуюся критерием газодинамического подобия режима. Дело в том, что при использовании в качестве фактора физического параметра при расчете орбитальных характеристик по уравнению регрессии происходит, по существу, экстраполяция данных по удельной тяге, что всегда сопряжено со снижением точности. Такое положение обычно имеет место, поскольку в точках композиционного плана (см. рис. 5) отсутствуют сочетания предельных значений факторов, в частности, наименьшей температуры  $T_v^*$  (т. е. малых чисел  $M$  на большой высоте) и максимальной физической тяги. С этой точки зрения может быть более целесообразным применение планов Бокса [7], которые по существу являются композиционными планами со «звездным» плечом  $\alpha = 1$ . Соображения подобия режимов оказываются существенными и при оценке других величин, применяемых в качестве факторов в рассматриваемом эксперименте.

Отметим, что факторы должны быть управляемыми, так как в противном случае невозможно проводить эксперимент в соответствии с заданным планом. Например, такой фактор, как плотность на высоте не является управляемым, его следует отнести к шумовому фону. Далее, факторы должны быть совместными и функционально независимыми. Например, рассматривая такие переменные, как высоту  $H$ , число Маха  $M$  и давление окружающей среды, в качестве факторов можно взять любые два из трех (например, высоту  $H$  и число Маха  $M$ ), так как все три переменные связаны функциональной зависимостью. При симметричном и ортогональном (относительно начала координат высоты  $H$  и числа Маха  $M$ ) расположении точек плана эксперимента указанные факторы значительно коррелированы при изменении тяги  $p_v^*$  и температуры  $T_v^*$ .

Корреляция реальных управляемых факторов  $p_v^*$  и  $T_v^*$  нарушает одно из условий оптимального планирования — независимость факторов. Особенно сильно проявилась корреляция определяющих параметров при анализе плана испытаний двигателя сложной схемы, когда требовалось определить высотно-скоростные характеристики в

широком диапазоне изменения высоты и скорости полета. Кроме того, здесь имеется известная свобода выбора, поскольку известно, что для основной части полетных режимов ЭРД, когда сверхкритический перепад давлений в сопле достаточен для стабилизации коэффициента расхода, величина  $p_H$  не влияет на параметры рабочего процесса и расход топлива, а измеренная на стенде тяга легко приводится к любому требуемому значению  $p_H$ .

Специфика ЭРД как объекта испытаний создает дополнительные трудности при формировании плана эксперимента, поскольку реальные ограничения режимов работы во многих случаях не позволяют определить параметры двигателя при предельных сочетаниях факторов — отдельные точки оптимального плана не реализуемы из-за несовместимости значений факторов [9]. При испытаниях ЭРД со штатной системой автоматики и управления указанные сочетания параметров просто не будут реализованы. Вместо них можно снять предельные точки на режимах ограничения соответствующих параметров, однако при этом как план эксперимента, так и построенное по его результатам уравнение регрессии потеряет ряд ценных качеств — симметрии, ортогональности или ротатабельности, понизится точность вычисления коэффициентов, возрастет смешивание эффектов. Более целесообразно применение известных из теории несимметричных планов, например, насыщенных почти  $D$ -оптимальных планов [7], обеспечивающих наряду с достаточной информативностью также некоторое сокращение числа опытов по сравнению с композиционными планами второго порядка. Почти  $D$ -оптимальный трехфакторный план, который может быть применен для определения высотно-скоростных характеристик ЭРД, содержит 10 экспериментальных точек (вместо 15-ти в композиционном плане) (см. рис. 8), причем в нем отсутствуют четыре точки, соответствующие вершинам куба, т. е. четырем предельным сочетаниям факторов. Надлежащим образом ориентируя значения факторов по осям куба, можно таким образом избежать нереализуемых режимов наблюдений. Если этого окажется недостаточно, можно воспользоваться поворотом осей координат, чтобы обеспечить совместимость факторов во всех точках плана без уменьшения интервала варьирования факторов.

Отметим, что с развитием методов и автоматизацией испытаний ЭРД на высотных стендах можно будет применительно к каждой конкретной программе испытаний решать задачу о рациональном размещении заданного числа экспериментальных точек в несимметричной или сложно

организованной области изменения факторов, т. е. о формировании оптимального плана испытания с оценкой его качества по информационной матрице Фишера. Это одновременно позволит решить практически важную задачу о рациональном (минимальном) дополнении заданных основной программой режимов испытаний опытного двигателя в заявленных полетных условиях с тем, чтобы полученные результаты позволили не только проверить соответствие двигателя техническим условиям, но и построить сетку его высотно-скоростных характеристик [9].

В качестве базовой характеристики можно принять, например, земную (полученную в условиях  $H = 0, \mathbf{M} = 0$ ) дроссельную характеристику, а функции отклика представлять в виде отклонения приведенных параметров  $\delta y = f(p_B^*, H, \mathbf{M})$ , где

$$\delta y = \frac{y_{\text{пр}} - y_0}{y_0}.$$

Здесь  $y_{\text{пр}}$  — величина, измеренная в точке плана и приведенная по обычным формулам при  $H = 0, \mathbf{M} = 0, y_0$  — базовое значение при том же значении  $p_B^*$ .

Следует иметь в виду, что наличие на земной дроссельной характеристике режимов с докритическим отношением давлений в сопле приведет к значительному увеличению полетной поправки  $\delta y$  в левой части дроссельных характеристик. Чтобы избежать этого, можно в качестве базовой принять какую-либо из высотно-скоростных дроссельных характеристик, для удобства приведенную к стандартным земным атмосферным условиям [9].

Указанное представление функции отклика заметно снижает требования к точности описания результатов эксперимента. Действительно, даже значительная погрешность отклонений приведенного параметра от базовой характеристики (обычно размер отклонения не превышает) 5–10 % лишь в малой степени отразится на точности определения абсолютной величины параметра. Заметим, что функция отклика в виде  $\delta y$  по существу является экспериментальной поправкой к формулам приведения в исследованном диапазоне изменения высотно-скоростных условий. Формулы приведения с экспериментально полученными поправками для одного двигателя могут быть использованы для любого экземпляра двигателя той же партии или даже близкой модификации. Тогда для расчета орбитальных характеристик конкретного двигателя достаточно знать его земную дроссельную характеристику (например, по данным приемосдаточных испытаний). Изложенные результа-



ты свидетельствуют о том, что применение методов математического планирования эксперимента действительно позволяет повысить информативность одного из важных видов испытаний электрических ракетных двигателей на высотных стендах и должно внедряться в практику [10]. Специальной проработки, конечно, потребует оптимальное планирование аналогичных испытаний применительно к современным ЭРД со сложными законами регулирования и ограничения режимов, в особенности для определения орбитальных характеристик на различных режимах работы двигателей. Некоторые изложенные выше общие соображения могут быть полезными при подготовке таких испытаний.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ показывает, что ЭРД в зависимости от условий может работать в различных режимах, каждый из которых отличается специфическими особенностями. Ускорение плазмы в ЭРД в типичных условиях происходит при одновременном действии различных механизмов. Такой характер процессов в ЭРД, с одной стороны, усложняет регулирование его характеристик, а также затрудняет его расчет. К настоящему времени удалось развить удовлетворительные методы расчета лишь для отдельных частных случаев высотных характеристик. С другой стороны, возможность использования различных режимов управления работой двигателя, несомненно, расширяет практические возможности его применения при управлении космическим аппаратом на орбите. Так, например, вклад газодинамических и диссипативных механизмов ускорения позволяет получать скорости истечения, которые превосходят величину, определяемую приложенной разностью потенциалов. Изложенные результаты свидетельствуют о том, что применение методов математического планирования эксперимента действительно позволяет повысить информативность одного из важных видов испытаний ЭРД на высотных стендах и должно внедряться в практику. Применение планов третьего или четвертого порядка связано со значительным увеличением числа опытов и для решения данной задачи нерационально. Предложенный способ позволяет ограничиться экономными планами второго порядка (композиционными или почти  $D$ -оптимальными) для нахождения в процессе эксперимента квадратичных поправок к некоторой базовой характеристике, заранее описываемой уравнением любой необходимой сложности.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гильзин К.А. Электрические межпланетные корабли. — М.: Наука, 1970. — 432 с.
2. Гришин С.Д., Лесков Л.В. Электрические ракетные двигатели космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1989. — 216 с.
3. Налимов В.В., Чернова Н.А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. — М.: Наука, 1965.
4. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / Под ред. Э.К. Лецкого. — М.: Мир, 1977.
5. Черкез А.Я. Возможности применения теории планирования эксперимента при испытаниях и доводке ГТД // Испытания авиационных двигателей. Сб. ст. — Уфа: УАИ, 1975. — Вып. 3.
6. Лурье В.Б., Рыбко В.А., Казанцев В.С. Испытания ТРД на высотном стенде с использованием методов статистического планирования эксперимента / Там же.
7. Сидняев Н.И., Вилисова Н.Т. Введение в теорию планирования эксперимента: уч. пособие. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. — 463 с.
8. Сидняев Н.И. Теория планирования эксперимента и анализ статистических данных: учебное пособие. — М.: Юрайт, 2011. — 399 с.
9. Макриденко Л.А., Геча В.Я., Сидняев Н.И., Онуфриев В.Н. Факторы космической погоды, влияющие на бортовые элементы низкоорбитальных космических аппаратов // Вопросы электромеханики. Тр. ВНИИЭМ. Тр. четвертой междунар. науч.-техн. конф. «Актуальные проблемы создания космических систем дистанционного зондирования Земли». — М., 2016. — С. 90—102.
10. Макриденко Л.А., Геча В.Я., Сидняев Н.И., Онуфриев В.Н. Аэрмеханика низкоорбитальных космических аппаратов // Там же. — С. 103—114.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.В. Павловым.*

**Макриденко Леонид Алексеевич** — д-р техн. наук, ген. директор, АО «Научно-производственная корпорация «Космические системы мониторинга, информационно-управляющие и электромеханические комплексы» им. А.Г. Иосифьяна»; ген. директор, «VNIEM Corporation» JSC, г. Москва, ✉ vniem@orc.ru, vniem@vniem.ru,

**Геча Владимир Яковлевич** — д-р техн. наук, зам. ген. директора, АО «Научно-производственная корпорация «Космические системы мониторинга, информационно-управляющие и электромеханические комплексы» им. А.Г. Иосифьяна»; зам. ген. директора, «VNIEM Corporation» JSC, г. Москва, ✉ vniem@orc.ru, vniem@vniem.ru,

**Сидняев Николай Иванович** — д-р техн. наук, зав. кафедрой, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, ✉ Sidn\_ni@mail.ru,

**Онуфриев Валерий Валентинович** — д-р техн. наук, профессор, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, ✉ onufriyev@bmstu.ru,

**Говор Светлана Александровна** — аспирант, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, ✉ govor\_sa@mail.ru.