А. В. Панюков, Представление суммы Минковского для двух полиэдров системой линейных неравенств,
Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование, 2012, выпуск 14, 108–119

https://www.mathnet.ru/vyuru87

УДК 513.71 : 519.85 : 519.62

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СУММЫ МИНКОВСКОГО ДЛЯ ДВУХ ПОЛИЭДРОВ СИСТЕМОЙ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

А.В. Панюков

Любой выпуклый полиэдр представим как множество решений некоторой системы линейных неравенств. Алгебраическая сумма по Минковскому выпуклых полиэдров $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ также является выпуклым полиэдром, и, следовательно, также представим как множество решений некоторой системы линейных неравенств. В статье предложен полиномиальный алгоритм решения указанной задачи, основанный на формировании ряда избыточных ограничений в представлении слагаемых и их трансляции в результирующее представление. Предложен эффективный способ использования параллельных и распределенных вычислений для реализации алгоритма.

Ключевые слова: полиэдр, сумма множеств по Минковскому, система линейных неравенств, линейное программирование.

Введение

Задача оценивания состояния динамических систем при наличии неопределенных, но ограниченных мешающих факторов, занимает важное место в теории идентификации. Начиная с пионерской работы F.C. Schweppe [1], этой задаче посвящается все возрастающее количество исследований, включая фундаментальные работы А.Б. Куржанского [2] и Ф.Л. Черноусько [3]. Исходя из требований повышения точности оценивания состояния, в [4] было предложено использовать многогранники, заданные своими вершинами. В работе [5] предложено использование двойного описания (вершинами и гранями) многогранника. В работах [6, 8] развиваются идеи оценивания с использованием только граней для описания многогранников. В этом случае информационные множества аппроксимированы системами линейных неравенств (гранями многогранников), а для описания эволюции объектов используется алгебраическая сумма по Минковскому для подмножеств $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, которая по определению равна

$$S = X + Y = \{z = x + y : \ x \in X, \ y \in Y\}. \tag{1}$$

Представление (1) для подмножества $S \subset \mathbb{R}^n$ использует $2n$ переменных, т.е. в два раза превышает необходимое количество. В связи с этим, актуальной проблемой становится поиск представления суммы двух полиэдров, представленных как множества решений систем линейных неравенств $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq a \in \mathbb{R}^{m_a}\}$, $Y = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Bx \leq b \in \mathbb{R}^{m_b}\}$, в виде множества решений системы неравенств

$$S = \{x : Cx \leq c \in \mathbb{R}^{m_c}\}. \tag{2}$$

Известные подходы (например, [9 – 12]) к решению данной проблемы, основанные на последовательном исключении переменных, ориентированы на уменьшение пространственной сложности реализующих их алгоритмов. В целом алгоритмы, реализующие указанные подходы, имеют экспоненциальную вычислительную сложность. Современный уровень развития вычислительной техники менее критичен к объему используемой памяти и позволяет применять алгоритмы с полиномиальной вычислительной сложностью для решения задач большой размерности. В статье предложен полиномиальный алгоритм решения указанной задачи, основанный на формировании ряда избыточных ограничений в представлении слагаемых и их трансляции в результирующее представление. Предложен эффективный способ использования параллельных и распределенных вычислений для реализации алгоритма.

1. Теоремы о представлении

Теорема 1. *Если*

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \le a \in \mathbb{R}^{m_a}\}, \tag{3}$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^n : \ Bx \le b \in \mathbb{R}^{m_b}\}, \tag{4}$$

$$Z = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \ Az \le a + \max_{y:By \le b} Ay, \ Bz \le b + \max_{x:Ax \le a} Bx \right\}, \tag{5}$$

то $Z \supseteq X + Y$.

Доказательство. Пусть $x \in X$, $y \in Y$. Рассмотрим $z = x + y$. Имеем

$$Az = A(x+y) = Ax + Ay \le b + \max_{y:By \le b} Ay,$$

$$Bz = B(x+y) = By + Bx \le b + \max_{x:Ax \le a} B.$$

Следовательно,

$$z = x + y \in \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \ Az \le a + \max_{y:By \le b} Ay, \ Bz \le b + \max_{x:Ax \le a} Bx \right\}.$$

Теорема доказана. □

В общем случае обратное включение $Z \subseteq X+Y$ не имеет место. В качестве иллюстрации этого приведем пример из работы [8]. Пусть

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{rrrcl} x_1 & & & \le & 1, \\ & x_2 & & \le & 1, \\ & & x_3 & \le & 1, \\ -x_1 & & & \le & 0, \\ & -x_2 & & \le & 0, \\ & & -x_3 & \le & 0 \end{array} \right\}; \ Y = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +x_3 & \le & 1, \\ -x_1 & & & \le & 0, \\ & -x_2 & & \le & 0, \\ & & -x_3 & \le & 0 \end{array} \right\}. \tag{6}$$

В данном случае (см. также рисунок)

$$Z = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{rrrcl} x_1 & & & \le & 2, \\ & x_2 & & \le & 2, \\ & & x_3 & \le & 2, \\ -x_1 & & & \le & 0, \\ & -x_2 & & \le & 0, \\ & & -x_3 & \le & 0, \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & \le & 4 \end{array} \right\};$$

$$X + Y = Z \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & & \le & 3, \\ & x_2 & +x_3 & \le & 3, \\ x_1 & & +x_3 & \le & 3 \end{array} \right\}. \tag{7}$$

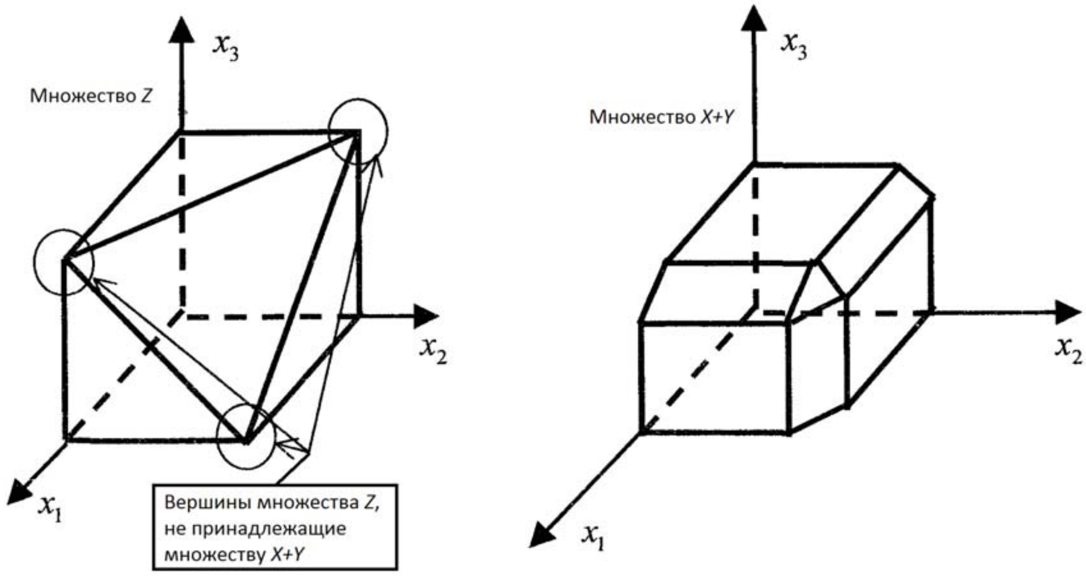

Иллюстрация множеств Z и $X+Y$, описываемых равенствами (7)

Легко заметить, что представление $X+Y$ отличается от представления Z наличием неравенств, представляющих трансляцию в множество Z суммы некоторых пар неравенств в представлении множества X. Как будет видно из дальнейшего изложения, этот факт имеет определяющее значение при построении полиномиального алгоритма.

Пусть система неравенств $\tilde{A}x \le \tilde{a}$ содержит суммы всех возможных пар неравенств системы $Ax \le a$. Пусть также система неравенств $\tilde{B}x \le \tilde{b}$ содержит суммы всех возможных пар неравенств системы $Bx \le b$.

Теорема 2. *Если*

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \le a \in \mathbb{R}^{m_a}\}, \tag{8}$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^n : \; Bx \le b \in \mathbb{R}^{m_b}\}, \tag{9}$$

$$S = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} A \\ \tilde{A} \end{pmatrix} s \le \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a} \end{pmatrix} + \max_{y: By \le b} \left[\begin{pmatrix} A \\ \tilde{A} \end{pmatrix} y \right], \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix} s \le \begin{pmatrix} b \\ \tilde{b} \end{pmatrix} + \max_{x: Ax \le a} \left[\begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix} x \right] \right\}, \tag{10}$$

то $S = X + Y$.

Доказательство. Очевидно, что системы неравенств

$$\begin{pmatrix} A \\ \tilde{A} \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a} \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix} y \le \begin{pmatrix} b \\ \tilde{b} \end{pmatrix}$$

являются избыточными представлениями множеств X и Y соответственно, т.е.

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \le a, \, \tilde{A}x \le \tilde{a}\}, \; Y = \{y \in \mathbb{R}^n : \; Bx \le b, \, \tilde{B}x \le \tilde{b}\}.$$

В соответствии с теоремой 1 имеем $S \supseteq X + Y$. Для доказательства обратного включения $S \subseteq X + Y$ достаточно показать, что все крайние точки множества S являются элементами $X + Y$.

Итак, пусть s – произвольная крайняя точка множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$;

$$I(s) = I_A(s) \cup I_{\tilde{A}}(s) \cup I_B(s) \cup I_{\tilde{B}}(s)$$

– множество активных ограничений (т.е. уравнений), определяющих точку s;

$$\big(I_A(s),\, I_{\tilde{A}}(s),\, I_B(s),\, I_{\tilde{B}}(s)\big)$$

– разбиение множества уравнений $I(s)$ на подмножества, ассоциированные с системами ограничений $Ax \le a$, $\tilde{A}x \le \tilde{a}$, $Bx \le b$ и $\tilde{B}x \le \tilde{b}$ соответственно.

С учетом принятых обозначений, имеем

$$\big(\forall i \in I_A \cup I_{\tilde{A}}(s)\big)\left(A_{i*}s = a_i + A_{i*}y^{(i)}\right), \quad \big(\forall j \in I_B \cup I_{\tilde{B}}(s)\big)\left(B_{j*}s = b_j + B_{j*}x^{(j)}\right), \tag{11}$$

где

$$x^{(j)} = \arg\max_{x:Ax\le a} B_{j*}x, \quad y^{(i)} = \arg\max_{y:By\le b} A_{i*}y. \tag{12}$$

Для завершения доказательства теоремы предваительно докажем следующую лемму.

Лемма 1. *В системе уравнений (11), определяющей крайнюю точку $s \in S$, имеют место равенства*

$$\big(\forall i \in I_A(s) \cup I_{\tilde{A}}(s)\big)\, y^{(i)} = y(s), \quad \big(\forall j \in I_B(s) \cup I_{\tilde{B}}(s)\big)\, x^{(j)} = x(s). \tag{13}$$

Доказательство. Приведем доказательство для уравнений из множества $I_A(s) \cup I_{\tilde{A}}(s)$, доказательство для уравнений множества $I_B(s) \cup I_{\tilde{B}}(s)$ делается аналогично.

Предложение 1. *Если множество $I_A(s)$ содержит уравнения $A_{i*}s = a_i + A_{i*}y^{(i)}$ и $A_{j*}s = a_j + A_{j*}y^{(j)}$, то*

$$y^{(i)} = y^{(j)} = \arg\max_{y:By\le b}(A_{i*} + A_{j*})y.$$

Доказательство. Складывая уравнения $A_{i*}s = a_i + A_{i*}y^{(i)}$ и $A_{j*}s = a_j + A_{j*}y^{(j)}$, получим

$$(A_{i*} + A_{j*})s = a_i + a_j + A_{i*}y^{(i)} + A_{j*}y^{(j)} \ge a_i + a_j + \max_{y:By\le b}(A_{i*} + A_{j*})y.$$

Так как система неравенств, определяющая множество S, содержит противоположное неравенство

$$(A_{i*} + A_{j*})s \le a_i + a_j + \max_{y:By\le b}(A_{i*} + A_{j*})y,$$

то

$$\max_{y:By\le b}(A_{i*} + A_{j*})y = a_j + A_{i*}y^{(i)} + A_{j*}y^{(j)}. \tag{14}$$

Предположение, что

$$y^{(i)}, y^{(j)} \ne \arg\max_{y:By\le b}(A_{i*} + A_{j*})y,$$

приводит к противоречию с равенством (14), следовательно в рассматриваемом случае

$$y^{(i)} = y^{(j)} = \arg\max_{y:By\le b}(A_{i*} + A_{j*})y.$$

Предложение 1 доказано. □

Предложение 2. *Если множество $I_{\tilde{A}}(s)$ содержит уравнение*

$$(A_{i*} + A_{j*})s = a_i + a_j + (A_{i*} + A_{j*})y^{ij}, \text{ где } y^{ij} = \arg\max_{y:By\le b}(A_{i*} + A_{j*})y, \tag{15}$$

то множество $I_A(s)$ содержит либо уравнение $A_{i*}s = a_i + A_{i*}y^{(i)}$ и при этом $y^{(i)} = y^{ij}$, либо уравнение $A_{j*}s = a_j + A_{j*}y^{(j)}$ и при этом $y^{(j)} = y^{ij}$.

Доказательство. Действительно, возможны три случая:

$$\begin{array}{ll}(1) & A_{i*}s = a_i + A_{i*}y^{(ij)},\ A_{j*}s = a_j + A_{j*}y^{(ij)};\\ (2) & A_{i*}s \le a_i + A_{i*}y^{(ij)},\ A_{j*}s \ge a_j + A_{j*}y^{(ij)};\\ (3) & A_{i*}s \ge a_i + A_{i*}y^{(ij)},\ A_{j*}s \le a_j + A_{j*}y^{(ij)}.\end{array}$$

В первом случае мы имеем $y^{(ij)} = y^{(i)} = y^{(j)}$, т.е. предложение спрведливо.

Во втором случае из существования $s : A_{i*}s = a_i + A_{i*}y^{(i)}$ и очевидного неравенства $A_{i*}y^{(ij)} \le A_{i*}y^{(i)}$ следует $y^{(ij)} = y^{(i)}$ и принадлежность уравнения $A_{i*}s = a_i + A_{i*}y^{(i)}$ множеству $I_A(s)$.

В третьем случае из существования $s : A_{j*}s = a_j + A_{j*}y^{(j)}$ и очевидного неравенства $A_{j*}y^{(ij)} \le A_{j*}y^{(j)}$ следует $y^{(ij)} = y^{(j)}$ и принадлежность уравнения $A_{j*}s = a_j + A_{j*}y^{(j)}$ множеству $I_A(s)$.

Предложение 2 доказано. □

В соответствии с предложением 1 $(\forall i \in I_A(s))y^{(i)} = y(s)$. Отсюда в соответствии с предложением 2 имеем

$$\left(\forall i \in I_A(s) \cup I_{\tilde{A}}(s)\right) y^{(i)} = y(s).$$

Лемма доказана. □

Если множества $I_A(s) \cup I_{\tilde{A}}(s)$ и $I_B(s) \cup I_{\tilde{B}}(s)$ не пусты, то $s = x(s) + y(s)$.

Предположим, что $I_A(s) \cup I_{\tilde{A}}(s) = \emptyset$, тогда определенным является только $x(s)$, но в соответствии с (11) и леммой 1 имеем

$$\left(\forall j \in I_B \cup I_{\tilde{B}}(s)\right)\left(B_{j*}\left(x(s) + y(s)\right) = b_j + B_{j*}y(s)\right),$$

следовательно,

$$\left(\forall j \in I_B \cup I_{\tilde{B}}(s)\right)\left(B_{j*}y(s) = b_j\right). \tag{16}$$

Система уравнений (16) определяет допустимое базисное решение на полиэдре, представленным системой ограничений

$$By(s) \le b + \max_{x:Ax\le a} Bx - Bx(s). \tag{17}$$

Если $By(s) \le b$, то справедливость теоремы очевидна. Предположение существования k, такого что

$$B_{k*}y(s) > b \tag{18}$$

приводит к противоречию. Действительно, пусть $j \in I_B$. Из (16) и (18) следует

$$\left(B_{j*} + B_{k*}\right)\left(x(s) + y(s)\right) > b_j + b_k. \tag{19}$$

С другой стороны пара $(x(s), y(s))$ удовлетворяет ограничению

$$\left(B_{j*} + B_{k*}\right)\left(x(s) + y(s)\right) \le b_j + b_k + \left(B_{j*} + B_{k*}\right)x(s) \ \Rightarrow \left(B_{j*} + B_{k*}\right)y(s) \le b_j + b_k,$$

которое противоречит (19).

Случай $I_B(s) \cup I_{\tilde{B}}(s) = \emptyset$ рассматривается аналогично.

Теорема доказана. □

Из теоремы 2 следует, что для нахождения представления суммы по Минковскому полиэдров X и Y достаточно решить $m_a + \mathrm{C}^2_{m_a}$ задач линейного программирования

$$\max_{y:\ By \le b} A_i y, \quad i = 1, 2, \dots, m_a + \mathrm{C}^2_{m_a}, \tag{20}$$

и $m_b + \mathrm{C}^2_{m_b}$ задач линейного программирования

$$\max_{x:\ Ax \le a} B_i x, \quad i = 1, 2, \dots, m_b + \mathrm{C}^2_{m_b}, \tag{21}$$

где A_i, $i = 1, 2, \dots, m_a + \mathrm{C}^2_{m_a}$ и B_i, $i = 1, 2, \dots, m_b + \mathrm{C}^2_{m_b}$ – все возможные строки матриц

$$\begin{pmatrix} A \\ \tilde{A} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix}.$$

Поскольку задача линейного программирования имеет полиномиальную сложность, а число решаемых задач $m_a + m_b + \mathrm{C}^2_{m_a} + \mathrm{C}^2_{m_b}$ имеет полиномиальную зависимость от числа бит, требуемых для кодирования исходных данных, т.е. матриц $A, a, B, b,$, то имеет место

Теорема 3. *Задача нахождения представления суммы полиэдров $X = \{x \in \mathbb{R}^n :\ Ax \le a \in \mathbb{R}^{m_a}\}$ и $Y = \{x \in \mathbb{R}^n :\ Bx \le b \in \mathbb{R}^{m_b}\}$ в виде $X + Y = \{x : Cx \le c \in \mathbb{R}^{m_c}\}$ имеет полиномиальную сложность.*

2. Алгоритмы нахождения представления суммы двух полиэдров

Предположим, что имеется вычислительная система, позволяющая независимо выполнять N процессов. Далее для краткости ограничимся расмотрением алгоритма решения задач семейства (20). Алгоритм решения задач семейства (21) с точностью до обозначений будет таким же.

Тривиальный метод равномерного распределения задач из семейств (20) по процессам и их независимое решение недостаточно неэффективен, т.к. не учитывает общность условий решаемых задач.

Действительно, все задачи семейства (20) имеют одинаковую систему ограничений $By \le b$ и различаются в пределах семейства только целевыми функциями. Задачи с близкими относительно значений псевдометрики

$$\rho(A_i, A_j) = \left\| \frac{A_i}{\|A_i\|} - \frac{A_j}{\|A_j\|} \right\|,\ i = 1, 2, \dots, m_a \tag{22}$$

целевыми функциями имеют близкие оптимальные базисы. Одно допустимое базисное решение может оказаться оптимальным сразу для нескольких целевых функций. Эффективную последовательность решения задач дает решение задачи коммивояжера в полном графе с множеством вершин $I_A = \{A_i :\ i = 1, 2, \dots, m_a\}$ и весовой функцией $\rho(*, *)$ на множестве ребер. Для задачи коммивояжера известно множество эффективных приближенных алгоритмов , в том числе алгоритмы автора статьи [14, 15].

Изложенное выше дает основания считать разумным решение всего семейства задач с использованием общей симплекс-таблицы и применением распараллеливания по ее столбцам на число блоков, равное числу возможных процессов N.

В работе [13] приведен эффективный способ декомпозиции, в соответствии с которым все столбцы симплекс-таблицы, за исключением левого столбца, делятся в равных пропорциях

Таблица

Декомпозиция симплекс-таблицы по процессорам

Процесс $K = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ N$				
T_{00}^{1} T_{00}^{2} $\vdots$ $T_{00}^{m_a}$	$T_{0\,\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+1}^{1}$ $T_{0\,\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+1}^{2}$ $\vdots$ $T_{0\,\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+1}^{m_a}$	$T_{0\,\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+2}^{1}$ $T_{0\,\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+2}^{2}$ $\vdots$ $T_{0\,\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+2}^{m_a}$	$\cdots$ $\cdots$ $\ddots$ $\cdots$	$T_{0\,\lceil\frac{Kn}{N}\rceil}^{1}$ $T_{0\,\lceil\frac{Kn}{N}\rceil}^{2}$ $\vdots$ $T_{0\,\lceil\frac{Kn}{N}\rceil}^{m_a}$
$T_{10} = X_{B1}$ $T_{20} = X_{B2}$ $\vdots$ $T_{m0} = X_{Bm}$	$T_{1\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+1}$ $T_{2\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+1}$ $\vdots$ $T_{m\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+1}$	$T_{1\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+2}$ $T_{2\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+2}$ $\vdots$ $T_{m\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+2}$	$\cdots$ $\cdots$ $\ddots$ $\cdots$	$T_{1\lceil\frac{Kn}{N}\rceil}$ $T_{2\lceil\frac{Kn}{N}\rceil}$ $\vdots$ $T_{m\lceil\frac{Kn}{N}\rceil}$

между N процессами, левый столбец, т.е. вектор значений базисных переменных, и вектор значений целевых функций на нем рассылаются всем процессам и обрабатываются ими независимо.

Пример разбиения симплекс-таблицы T на блоки $T(K),\ K = 1, 2, \ldots, N$ представлен в таблице. В верхнем блоке осуществляется преобразование целевых функций, т.е. строк $A_i,\ i = 1, 2, \ldots, m_a$ в соответствии с симплекс-методом, а в нижнем блоке – преобразование ограничений, т.е. строк $B_i,\ i = 1, 2, \ldots, m_b$.

Приведенный ниже алгоритм MVal находит вектор значений

$$\max_{y:\ By\leq b} A_i y, \quad i = 1, 2, \ldots, m_a + \mathrm{C}_{m_a}^2,$$

используя прямой симплекс-метод.

Алгоритм MVal

- Исходные данные:
  - матрицы $A[(m_a + \mathrm{C}_{m_a}^2) \times n], B[m_b \times n], b[m_b]$;
  - линейный порядок L на множестве I_A строк матрицы A, представляющий некоторое субоптимальное решение задачи коммивояжера в полном графе с множеством вершин I_A и весовой функцией $\rho(*, *)$ на множестве ребер, $L(A_i)$ – следующее за A_i ребро в цикле L;
  - распределение $T(K),\ K = 1, 2, \ldots N$ – по процессорам столбцов симплекс-таблицы для всего множества задач I_A.
- Результат: множество **result** =

$$\left\{ \left(\mathbf{S}[i] = A_i, \mathbf{V}[i] = \max_{y:\ By\leq b} A_i y, \mathbf{Y}[i] = \arg\max_{y:\ By\leq b} A_i y \right) :\ i = 1, 2, \ldots, m_a + \mathrm{C}_{m_a}^2 \right\}.$$

- Шаг 1. [Инициализация] Каждому процессу $K = 1, 2, \ldots N$ положить
  - **result** $= \emptyset$, номер итерации $k = 0$;
  - ${}^{(k)}T(K)$ – блок столбцов начальной симплекс-таблицы процесса K для всего множества задач I_A, $A_t = \min\{A_i \in L\}$ – текущая задача.

- Шаг 2. [k-я итерация симплекс-метода]
  - Каждому процессу $K = 1, 2, \dots N$ проверить выполнение условия оптимальности текущего допустимого базисного решения y для каждой целевой функции $A_i \in I_a$. Для функций $A_i \in I_a$, таких, что во всех процессах $K = 1, 2, \dots N$ выполнено условие оптимальности положить $\mathbf{result} = \mathbf{result} \cup \{(A_i,\ A_i y,\ y)\},\ I_a = I_a \setminus \{A_i\}$. Если $A_t \notin I_A$, то перейти на Шаг 3.
  - Определить ведущий процесс [13] для целевой функции A_t, найти вводимую в базис и выводимую из базиса переменные.
  - Если выводимая из базиса переменная найдена, то положить $k = k + 1$, каждому процессу $K = 1, 2, \dots, N$ вычислить модифицированную симплекс-таблицу ${}^{(k)}T(K)$ и повторить выполнение Шага 2. Иначе положить $I_a = I_a \setminus \{A_i\}$ и перейти на Шаг 3.
- Шаг 3. [Выбор следующей текущей целевой функции]
  - Пока $I_A \neq \emptyset$, полагать $A_t = L(A_t)$ и выполнять Шаг 2. Иначе перейти на Шаг 4
- Шаг 4. Останов, множество **result** содержит все тройки

$$\left(A_i,\ \max_{y:\ By \le b} A_i y,\ \arg\max_{y:\ By \le b} A_i y\right),$$

  где A_i – строка, определяющая ограниченную на множестве $\{y : By \le b\}$ функцию $A_i y,\ i = 1, 2, \dots, m_a + \mathrm{C}^2_{m_a}$.
- Конец алгоритма MVal.

Из описания алгоритма видно, что в основном все его процессы выполняются независимо. Межпроцессный обмен требуется только на шаге 2 при сводке результатов проверки выполнения условия оптимальности, выборе ведущего процесса и рассылки номера ведущей строки. Результативность алгоритма MVal очевидна.

Система ограничений (10) для представления множества S с матрицами $A, \tilde{A}, B, \tilde{B}$, как правило, оказывается избыточной, т.е. содержит одинаковые ограничения и ограничения, являющиеся следствием других. Известные подходы к свертыванию систем линейных неравенств (например, [9 – 12, 16]) имеют экспоненциальную сложность. В тоже время очевидно, что минимальным по мощности множеством неравенств для описания полиэдра $X = \{x\mathbb{R}^n :\ Ax \le a\}$ является множество фасетных неравенств [17] $A_{i*}x \le a_i$: $\dim\left(X \cap \{x :\ A_{i*}x \le a_i\}\right) = \dim(X) - 1$.

Очевидно, что фасетное неравенство $A_{i*}x \le a_i$ является опорным к множеству X, т.е. $\max_{x\in X} A_i x = a_i$, причем свойство опорности устойчиво относительно возмущений параметра a_i. Найти фасетные неравенства полиэдра $X = \{x \in \mathbb{R}^n :\ Ax \le a\}$ можно применив постоптимизационный анализ к результатам алгоритма MVal$(A,\ A,\ a,\ L_A)$. Приведенный ниже алгоритм RMSum решает проблему нахождения фасетного представления $Cx \le c$ суммы по Минковскому полиэдров $Ax \le a$ и $Bx \le b$.

Алгоритм RMSum

- Исходные данные: матрицы $A[m_a \times n]$, $B[m_b \times n]$, $a[m_a]$, $b[m_b]$.
- Результат: матрицы $C[m_c \times n]$, $c[m_c]$:

$$\{x \in \mathbb{R}^n\ :\ Cx \le c\} = \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ Ax \le a\} + \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ Bx \le b\}.$$

- Шаг 1. [Инициализация]

$$\tilde{A} = \left\{ \tilde{A}_{i(m_a-1)+j,*} = A_{i*} + A_{j*}:\ i = 1, 2, \ldots, m_a - 1,\ j = i+1, i+2, \ldots, m_a \right\},$$

$$\tilde{a} = \left\{ \tilde{a}_{i(m_a-1)+j,*} = a_{i*} + a_{j*}:\ i = 1, 2, \ldots, m_a - 1,\ j = i+1, i+2, \ldots, m_a \right\},$$

$$\tilde{B} = \left\{ \tilde{B}_{i(m_b-1)+j,*} = B_{i*} + B_{j*}:\ i = 1, 2, \ldots, m_b - 1,\ j = i+1, i+2, \ldots, m_b \right\},$$

$$\tilde{b} = \left\{ \tilde{b}_{i(m_b-1)+j,*} = b_{i*} + b_{j*}:\ i = 1, 2, \ldots, m_b - 1,\ j = i+1, i+2, \ldots, m_b \right\}.$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ \tilde{A} \end{pmatrix}, \qquad \bar{B} = \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix}.$$

- Шаг 2. [Упорядочение] Пусть L_A и L_B – линейные порядки на множествах строк матриц $\bar{A}$ и $\bar{B}$ соответственно, представляющие некоторое субоптимальные решения задач коммивояжера на полных графах с множеством вершин $\bar{A}$ и $\bar{B}$ и весовой функцией $\rho(*, *)$.

- Шаг 3. [Вычисление границ]

$$C_A = \text{MVal}\left(\bar{A},\ B,\ b,\ L_A\right).\mathbf{result}; \quad C_B = \text{MVal}\left(\bar{B},\ A,\ a,\ L_B\right).\mathbf{result}.$$

- Шаг 4. [Формирование избыточной системы $Cx \le c$]

$$C = (C_A).\mathbf{S} \cup (C_B).\mathbf{S}, \quad c = (C_A).\mathbf{V} \cup (C_B).\mathbf{S}.$$

- Шаг 5. [Нормировка, лексикографическая сортировка и предварительная отбраковка неравенств избыточной системы] $(C, c) = \text{clear}(C, c)$.

- Шаг 6. [Упорядочение] Пусть L_C – линейный порядок на множествах строк матрицы C, представляющие некоторое субоптимальные решения задачи коммивояжера на полном графе на строках матрицы C с весовой функцией на ребрах $\rho(*, *)$.

- Шаг 7. [Вычисление эффективных границ]

$$\tilde{C} = \text{MVal}\left(C,\ C,\ c,\ L_C\right).\mathbf{result}.$$

- Шаг 8. [Окончательная чистка системы неравенств] $(C, c) = \text{final\_clear}(C, c)$.

- Шаг 9. Останов, $(Cx \le c)$ – фасетное представление суммы по Минковскому полиэдров $Ax \le a$ и $Bx \le b$.

- Конец алгоритма RMSum.

На Шаге 5 решается проблема очистки от неравенств с одинаковой левой частью. Очевидно, что данная задача может быть решена с помощью лексикографической сортировки отнормированных неравенств.

На Шаге 8 решается проблема удаления нефасетных неравенств. Такими являются все неопорные неравенства $C_{i*}x \le c_i$, у которых $c_i > (\tilde{C}).V[i] = \max_{Cx \le c} C_i x$, а также неравенства со свойством опорности неустойчивым относительно возмущений параметра a_i. Второй признак легко выявить зная, $(\tilde{C}).Y[i] = \arg\max_{Cx \le c} C_i x$.

Результативность алгоритма очевидна.

3. Заключение

Способ задания информационных множеств системами линейных неравенств (т.е. без использования метода двойного описания [5]) позволяет реализовать полиномиальные алгоритмы построения представления их суммы с наименьшим числом неравенств. Предложенный в работе алгоритм RMSum решает данную задачу. При выполнении алгоритма необходимо решение $O(m^2)$ (m – число неравенств в представлении информационных множеств) задач линейного программирования с одинаковым допустимым множеством. Предложенный в работе алгоритм MVal дает решение всего семейства задач с использованием общей симплекс-таблицы и применением распараллеливания по ее столбцам на число блоков равное числу возможных процессов N. Это существенно снижает требуемые вычислительные ресурсы по сравнению с приминением тривиального распараллеливания по задачам.

Выражаю искреннюю признательность В.И. Ширяеву, обратившему внимание автора на актуальность рассмотренных в статье проблем.

Литература

1. Schweppe, F.C. Recursive state estimalion: unknown but bounded errors and systems inputs / F.C. Schweppe // IEEE Tram. Autom. Control. – 1968. – V. 13, № 1. – P. 22–28.
2. Куржанский, А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А.Б. Куржанский. – М.: Наука, 1977. – 392 с.
3. Черноусько, Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов / Ф.Л. Черноусько. – М.: Наука, 1988. – 320 с.
4. Кунцевич, В.М. Синтез оптимальных и адаптивных систем управления: игровой подход / В.М. Кунцевич, М.М. Лычак. – Киев: Наукова думка, 1985. – 245 с.
5. Лычак, М.М. Идентификация и оценивание состояния объектов управления на основе множественного подхода / М.М. Лычак // Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 5. – С. 34–41.
6. Ширяев, В.И. Минимаксная фильтрация в реальном времени многошаговых систем / В.И. Ширяев // Проблемы управления и теории информации. – 1991. – № 5. – С. 805–812.
7. Шестаков, А.Л. Динамическое измерение как задача оптимального управления / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, Е.В. Захарова // Обозрение прикл. и пром. математики. – 2009. – Т. 16, №4. – С. 732.
8. Уханов, М.В. Алгоритмы построения информационных множеств для реализации минимаксного фильтра // М.В. Уханов, В.И. Ширяев // Вестн. Юж-Урал гос. ун-та. Серия «Математика, физика, химия». – 2002. – Вып. 2, № 3. – С. 19–33.
9. Черникова, Н.Б. Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных неравенств / Н.Б. Черникова // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1965. – Т. 5, № 2. – С. 334–337.
10. Черников С.Н. Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968. – 488 с.
11. Уханов, М.В. Алгоритм построения суммы многогранников / М.В. Уханов // Вестн. Юж-Урал гос. ун-та. Серия «Математика, физика, химия». – 2001. – Вып. 1, № 7. – С. 39–44.
12. Лукацкий, А.М. Конструктивный алгоритм свертывания систем линейных неравенств высокой размерности / А.М. Лукацкий, Д.В. Шапот // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2008. – Т. 48, №7. – С. 1167–1180.

13. Панюков, А.В. Применение массивно-параллельных вычислений для решения задач линейного программирования с абсолютной точностью / А.В. Панюков, В.В. Горбик // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №2. – С. 73–88.
14. Панюков А.В., Тычинин С.А. Применение дополнений паросочетаниями для решения задачи max tsp // Вестн. Юж-Урал гос. ун-та. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – №27 (127), вып. 2. – С. 78–99.
15. Панюков, А.В. Алгоритм дополнения паросочетаниями для ассиметричной задачи коммивояжера / А.В. Панюков, В.А. Пьянков // Математическое и статистическое исследование социально-экономических процессов / под ред. А.В. Панюкова. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2008. – С. 115–122.
16. Бушенков, И.Ф. Алгоритм анализа независимости неравенств в линейной системе / В.А. Бушенков, А.В. Лотов// Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1980. – Т. 20, №3. – С. 562–572.
17. Емеличев, В.А. Многогранники, графы, оптимизация / В.А. Емеличев, М.М. Ковалев, М.К. Кравцов. – М.: Наука, 1981.

Анатолий Васильевич Панюков, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Экономико-математические методы и статистика», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), anatoly.panyukov@gmail.com.

MSC 52B55

The Linear Inequalities Set Representation of Minkovski's Sum for Two Polyhedrons

A.V. Panyukov, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

A convex polyhedron is represented as a set of the linear inequalities solutions. Minkowski's sum of two convex polyhedrons $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ is polyhedron as well is represented as a set of the linear inequalities solutions. Polynomial algorithm of solving this problem based of forming number of extra inequalities in the summands representation and them translation to resultant representation is presented in the paper. Usage of parallel and distributed computation for effective algorithm Implementation is suggested.

Keywords: polyhedron, Minkowski's sum set, linear inequalities set, linear programming.

References

1. Schweppe F.C. Recursive State Estimalion: Unknown but Bounded Errors and Systems Inputs. *IEEE Tram. Autom. Control,* 1968, vol. 13, no. 1, pp. 22–28.
2. Kurzhanskii A.B. *Control and observation under uncertainty.* Moscow, Nauka, 1977. 392 p. (in Russian)
3. Chernous'ko F.L. Estimation of the Phase State of Dynamical Systems. The Method of Ellipsoids. Moscow, Nauka, 1988. 320 p. (in Russian).
4. Kuntsevich V.M., Lychak M.M. *Synthesis of Optimal and Adaptive Control Systems.* Kiev, Naukova Dumka, 1985. 245 p.
5. Lychak M.M. Identification and Estimation of State for Control Objects Based on the Plural Method of Attack. *Problems of Control and Informatics,* 1999, no. 5, pp. 34–41. (in Russian)

6. Shiryaev V.I. Real Time Minimax Filtration for Multi-step Systems. *Control Problems and Information Theory,* 1991, no. 5, pp. 805–812. (in Russian)
7. Shestakov A.L., Sviridjuk G.A., Zaharova E.V. Dynamic Measurement as a Optimal Control Problem. *Obozrenie prikladnoj i promyshlennoj matematiki,* 2009, vol. 16, no. 4, pp. 732. (in Russian)
8. Uhanov M.V., Shirjaev V.I. Information Sets Constructiom Algorithms for Minimax Filter Implementation. *Bulletin of South Ural State University. Series ≪Mathematics, Physics, Chemistry≫,* 2002, vol. 2, no. 3, pp. 19–33. (in Russian)
9. Chernikova N.B. Algorithm for Finding General Formulas of Non-negative Linear Inequalities Set Solutions. *Journal of Computational mathematics and Mathematical Physics*, 1965, vol. 5, no. 2, pp. 334–337.
10. Chernikov S.N. *Linear Inequalities.* Moscow, Nauka, 1968. 488 p. (in Russian)
11. Uhanov M.V. Polygons Sum Construction Algorithm. *Bulletin of South Ural State University. Series ≪Mathematics, Physics, Chemistry≫,* 2001, vol. 1, no. 7, pp. 39–44. (in Russian)
12. Lukackij A.M., Shapot D.V. Constructive Algorithm for Large Scale Set of Inequalities Folging. *Journal of Computational mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, no. 7, pp. 1167–1180. (in Russian)
13. Panyukov A.V., Gorbik V.V. Using Massively Parallel Computations for Absolutely Precise Solution of the Linear Programming Problems. *Automation and Remote Control,* 2012, vol. 73, no. 2, pp. 276–290.
14. Panyukov A.V., Tychinin S.A. Matching Add-Ins Application for Solving MaxTSP. *Bulletin of South Ural State University. Series ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫*, 2008, no. 27 (127), pp. 78–99. (in Russian)
15. Panyukov A.V., P'jankov V.A. Matching Add-Ins Algorithm for Antisymmetrical Traveling Salesman Problem. *Mathematical and Statistical Research of social and Economical Processes,* 2008, Chelyabinsk, SUSU, pp. 115–122. (in Russian)
16. Bushenkov I.F., Lotov A.V. Independence Linear Inequalities Set Analisys Algorithm. *Journal of Computational mathematics and Mathematical Physics,* 1980, vol. 20, no. 3, pp. 562–572. (in Russian)
17. Emelichev V.A., Kovalev M.M., Kravtsov M.K. *Polyhedrons, Graphs, Optimization.* Moscow, Nauka, 1981. (in Russian)

Поступила в редакцию 20 июля 2012 г.