



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. A. Kovalev, Yu. N. Radayev, R. A. Revinsky, Generalized cross-coupled type-III thermoelastic waves propagating via a waveguide under sidewall heat interchange, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2011, Volume 11, Issue 1, 59–70

DOI: 10.18500/1816-9791-2011-11-1-59-70

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.239.97.34

November 10, 2024, 15:47:52



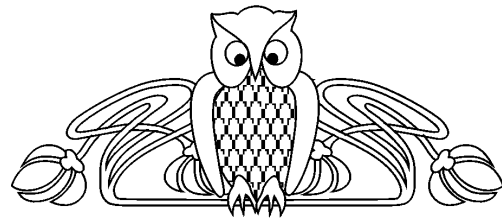


/ A.C. Lawson, J.T. Czernutzka // Proc. Inst. Mech. Engrs. 1998. Vol. 212, part H. P. 413–425.  
 10. Аврунин, А.С. Наноразмерный механизм жесткости и прочности кости / А.С. Аврунин [и др.] // Травматология и ортопедия России. 2008. Т. 2, № 48. С. 77–83.  
 11. Cowin, S.C. Bone remodeling of diaphysal surfaces under constant load: theoretical predictions / S.C. Cowin, K.J. Firoozbakhsh // J. of Biomechanics. 1981. Vol. 7. P. 471–484.  
 12. Sotin, A.V. The model of cortical bone tissue adaptive remodeling / A. V. Sotin, Yu. V. Akulich, R. M. Podgaets // Rus. J. of Biomechanics. 2001. Vol. 5, № 1. P. 24–31.  
 13. Акулич, Ю.В. Адаптационные изменения свойств

костной ткани фрагментов кости после остеосинтеза шейки бедра жёсткими резьбовыми фиксаторами / Ю.В. Акулич, А.Ю. Акулич, А.С. Денисов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2008. Т. 14, № 3. С. 313–331.  
 14. Martin, R.B. Skeletal Tissue Mechanics / R.B. Martin, D. Burr, N.A. Sharkey. N.Y.: Springer, 1998. 392 p.  
 15. Lindahl, O. Cortical bone in man. II. Variation in tensile strength with age and sex / O. Lindahl, A. Lindgren // Acta Orthopaed. Scand. 1967. Vol. 38. P. 141–147.

УДК 539.374

## ПРОХОЖДЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ GNIII-ТЕРМОУПРУГОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ВОЛНОВОД С ПРОНИЦАЕМОЙ ДЛЯ ТЕПЛА СТЕНКОЙ



В.А. Ковалев<sup>1</sup>, Ю.Н. Радаев<sup>2</sup>, Р.А. Ревинский<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Московский городской университет управления Правительства Москвы, кафедра прикладной математики  
 E-mail: vlad\_koval@mail.ru

<sup>2</sup>Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва  
 E-mail: y.radayev@gmail.com,

<sup>3</sup>Саратовский государственный университет, кафедра теории упругости и биомеханики  
 E-mail: rvskra@gmail.com

### Generalized Cross-Coupled Type-III Thermoelastic Waves Propagating via a Waveguide under Sidewall Heat Interchange

V.A. Kovalev<sup>1</sup>, Yu.N. Radayev<sup>2</sup>, R.A. Revinsky<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Moscow City Government University of Management, Chair of Applied Mathematics  
 E-mail: vlad\_koval@mail.ru

<sup>2</sup>Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow  
 E-mail: y.radayev@gmail.com

<sup>3</sup>Saratov State University, Chair of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics  
 E-mail: rvskra@gmail.com

Настоящее исследование посвящено изучению распространения обобщенных связанных термоупругих волн в длинном цилиндрическом волноводе. При этом предполагается, что стенка волновода свободна от нагрузок и является проницаемой для тепла. Исследование проводится, следуя теории связанной обобщенной GNIII-термоупругости, согласованной с основными принципами термодинамики. Данная теория сочетает оба известных типа распространения тепла: термодиффузионный и волновой. Предельными случаями обобщенной термоупругости типа III являются классическая термоупругость (GNI/CTE) и гиперболическая термоупругость (GNII), которая может быть сформулирована в терминах классической теории поля. Дифференциальные уравнения поля в этом случае принадлежат гиперболическому аналитическому типу. Методом разделения переменных найдено замкнутое решение уравнений связанной GNIII-термоупругости, которое удовлетворяет необходимым краевым условиям на стенке волновода, в том числе и условию конвективного теплообмена с окружающей средой. Проведен численный анализ частотного уравнения. Описана схема локализации корней частотного уравнения и найдены волновые числа связанных термоупругих волн, в частности первого азимутального порядка.

**Ключевые слова:** термоупругость, GNIII-термоупругость, частотное уравнение, волновод, волновое число, форма волны, азимутальный порядок.

The paper is devoted to a study of cross-coupled type-III generalized thermoelastic waves propagation via a long cylindrical waveguide. The sidewall of the waveguide is assumed free from tractions and permeable to heat. The analysis is carried out in the framework of coupled generalized theory of GNIII-thermoelasticity consistent with the basic thermodynamic principles. The theory combines the both possible mechanisms of heat transfer: thermodiffusion and wave. Type-III generalized thermoelasticity includes classical thermoelasticity (GNI/CTE) and the theory of hyperbolic thermoelasticity (GNII) as limiting cases. The GNII-theory can be formulated as a field theory and differential field equations are of hyperbolic analytical type. Closed solution of the coupled GNIII-thermoelasticity equations satisfying the required boundary conditions on the surface of waveguide including convective heat interchanging condition has been obtained. The paper provides numerical analysis of frequency equation. A scheme of frequency equation roots localization is described and wavenumbers of the coupled thermoelastic waves of the first azimuthal order are computed.

**Key words:** thermoelasticity, type-III thermoelasticity, frequency equation, waveguide, wavenumber, wave mode, azimuthal order.



## 1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Классическая теория термоупругости (СТЕ, conventional thermoelasticity), основанная на законе теплопроводности Фурье  $\mathbf{h} = -\Lambda_* \nabla \theta$ , где  $\mathbf{h}$  — вектор потока тепла (heat flux),  $\Lambda_*$  — коэффициент теплопроводности (thermal conductivity),  $\theta$  — температура, предсказывает возможность распространения теплового сигнала с бесконечно большой скоростью, что явно не соответствует реальным физическим наблюдениям и нарушает принцип причинности. Известно, что соответствующее закону Фурье уравнение теплопроводности принадлежит параболическому аналитическому типу; уравнения такого типа допускают бесконечные скорости распространения возмущений. По существу, парадокс бесконечной скорости распространения температурных возмущений впервые обсуждался Максвеллом (J.C. Maxwell) [1]. Био (M.A. Biot) [2] впервые построил теорию *связанной* термоупругости; связанные соотношения этой теории, классифицируемые как СТЕ, включают векторное уравнение движения, принадлежащее гиперболическому типу, и параболическое уравнение теплопроводности. Ясно, что теория Био в полной мере обладает указанным выше недостатком.

За последние десятилетия было предложено достаточно много различных обобщений теории связанной термоупругости Био с тем, чтобы устранить парадокс бесконечной скорости распространения тепла и допустить возможность волнового характера транспорта тепла в форме *незатухающих* волн. Последнее из указанных явлений называется «вторым звуком».

Феномен второго звука наблюдается при весьма низких температурах в кристаллах высокой чистоты. Например, в работе [3] указывается на обнаружение «второго звука» в кристалле NaF. «Второй звук» в NaF наблюдается при температуре около 15К [4]. В работах [5] и [6] также подтверждается существование волн второго звука в NaF; согласно [7] скорость волн «второго звука» составляет 1953.1 м/с. В публикации [8] приводятся результаты измерений волн «второго звука» в висмуте (Bi) при температуре около 3К. Скорость волн «второго звука» в висмуте оказывается равной  $78 \pm 5$  м/с.

Остановимся на нескольких наиболее часто встречающихся в прикладных задачах термомеханики обобщениях основополагающих уравнений СТЕ. Одно из них было дано Лордом и Шульманом (H. Lord, Y. Shulman) (LS-theory) [9]. Ими было получено гиперболическое уравнение распространения тепла, основанное на новом законе теплопроводности, заменившем классический закон теплопроводности Фурье. В законе LS-теплопроводности введена дополнительная материальная постоянная — время релаксации  $\tau_{rel}$ :

$$\mathbf{h} + \tau_{rel} \dot{\mathbf{h}} = -\Lambda_* \nabla \theta.$$

Тем самым, в LS-теории уравнение транспорта тепла в сплошных деформируемых телах принадлежит гиперболическому типу, что и обеспечивает конечную скорость распространения тепловых и упругих волн.

Вторым хорошо известным обобщением связанной теории термоупругости Био является теория, предложенная Грином и Линдсей (A.E. Green, K.A. Lindsay) (GL-theory) [10]. GL-теория характеризуется тем, что вектор потока тепла в термоупругом теле  $\mathbf{h}$  зависит от скорости изменения абсолютной температуры  $\theta$  и градиента температуры; закон GL-теплопроводности имеет форму

$$\mathbf{h} = -\mathbf{b}\dot{\theta} - \Lambda_* \cdot \nabla \theta,$$

где  $\mathbf{b}$  — антисимметричный вектор,  $\Lambda_*$  — тензор теплопроводности. Тензор второго ранга  $\Lambda_*$  в GL-теории симметричен. Заметим, что в случае центральной материальной симметрии выполняется равенство  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

В начале 90-х гг. XX в. Грином и Нахди (A.E. Green, P.M. Naghdi) [11, 12] была развита теория обобщенной термоупругости (GN-theory). Предложенная теория сочетает в себе как свойства классической термоупругости СТЕ, выстроенной согласно закону теплопроводности Фурье, так и свойства недиссипативной термоупругости, предполагающей отсутствие производства энтропии и волновой характер распространения теплового сигнала. GN-теория была сформулирована в трех различных термодинамически корректных вариантах: GNI, GNII и GNIII. Классическая связанная термоупругость (GNI/СТЕ) и гиперболическая термоупругость (GNII) являются предельными случаями наиболее общего из трех вариантов GNIII.



Классическая *связанная* теория термоупругости (СТЕ) широко применяется в различных прикладных задачах термомеханики в тех ситуациях, когда речь идет о весьма быстропротекающих переходных процессах или когда происходит интенсивный нагрев тела (например, с помощью импульсного лазерного излучения). В таких ситуациях температурное поле связано с упругим полем, и связанная форма уравнений термоупругости должна быть наиболее адекватной.

Анализ литературных источников показывает, что к настоящему времени опубликовано сравнительно немного работ, выполненных с привлечением связанных уравнений GNIII-теории. Например, распространение плоских гармонических связанных термоупругих волн в рамках GNIII-теории изучалось лишь сравнительно недавно в работах [13] и [14] и нельзя сказать, что эта проблема полностью разрешена в плане определения *нормальных* волновых чисел указанного типа волн. В статье [15] в рамках теории обобщенной термоупругости GNIII исследуются термоупругие волны в неограниченном однородном изотропном теле, вызванные линейным источником тепла. Полученные в указанной работе результаты показывают, что теория GNIII в целом прогнозирует диффузионный механизм распространения тепла и только в отдельных случаях допускает волновой механизм теплопроводности. В [16, 17] получено решение задачи о распространении связанной GNIII-термоупругой волны вдоль теплоизолированного цилиндрического волновода. В работе [18] исследуется частотное уравнение указанных волн в случае достаточно высоких азимутальных чисел.

Целью настоящей работы является изучение распространения обобщенных связанных GNIII-термоупругих волн вдоль цилиндрического волновода со свободной теплопроницаемой стенкой. Одной из задач исследования является определение влияния теплообмена через стенку цилиндрического волновода на величину волновых чисел распространяющихся в волноводе нормальных волн. В рассматриваемой линейной постановке принимается определяющий закон Дюгамеля – Неймана:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + (\lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \alpha\theta) \mathbf{I},$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжений,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — тензор малых деформаций,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор,  $\lambda, \mu$  — упругие постоянные Ламе,  $\alpha$  — термомеханическая постоянная ( $\alpha = 1/3(3\lambda + 2\mu)\beta^*$ ),  $\beta^*$  — коэффициент объемного теплового расширения,  $\theta$  — превышение температуры над отсчетной температурой  $\theta_0$  (следует отметить, что при температуре  $\theta_0$  отсутствуют деформации и напряжения).

Линейная теория GNIII-термоупругости характеризуется тем, что вектор потока тепла линейно зависит как от градиента температуры, так и от градиента температурного смещения:

$$\mathbf{h} = -\Lambda_* \nabla \theta - \Lambda \nabla \vartheta,$$

где  $\Lambda$  — характерная скорость теплопроводности (thermal conductivity rate),  $\vartheta$  ( $\dot{\vartheta} = \theta$ ) — температурное смещение (thermasy). Кроме того, полная система соотношений GNIII-теории включает уравнения движения:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0},$$

где  $\rho$  — плотность среды,  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений, и уравнение баланса энергии:

$$-\left(\dot{\psi} + s\dot{\theta}\right) + \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \mathbf{h} \cdot \frac{\nabla \theta}{\theta} = \theta \xi,$$

где  $\psi$  — плотность (на единицу объема) свободной энергии Гельмгольца,  $s$  — плотность (на единицу объема) энтропии,  $\xi$  — внутреннее производство энтропии ( $\xi \geq 0$ ).

Приведем также соотношения Коши

$$2\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T.$$

Условие конвективного теплообмена с окружающей средой через поверхность с единичной нормалью  $\mathbf{n}$  в линейном приближении имеет вид

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{h} = \sigma (\theta - \theta_{\text{env}}), \quad (1)$$

где  $\sigma$  — коэффициент теплообмена,  $\theta_{\text{env}}$  — температура окружающей среды. В дальнейшем будем полагать, что температура окружающей среды совпадает с отсчетной  $\theta_{\text{env}} = \theta_0$ .



Из приведенных выше прямых тензорных соотношений находятся физические компоненты тензора напряжений и деформаций в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda\varepsilon + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r} - \alpha\theta, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda\varepsilon + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{u_r}{r}\right) - \alpha\theta, & \sigma_{zz} &= \lambda\varepsilon + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} - \alpha\theta, \\ \sigma_{r\varphi} &= \mu\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\right), & \sigma_{rz} &= \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right), & \sigma_{\varphi z} &= \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right), \\ \varepsilon &= \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}, & \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{u_r}{r}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ 2\varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, & 2\varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, & 2\varepsilon_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}. \end{aligned}$$

Заключая введение, приведем линейные связанные уравнения движения и теплопроводности GNIII-термоупругости [11, 16] в той форме, в которой они используются в настоящей работе:

$$\begin{cases} \mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha\nabla\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Lambda\Delta\theta + \Lambda_*\Delta\dot{\theta} - \kappa\ddot{\theta} - \alpha\theta_0\nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\Delta$  — трехмерный оператор Лапласа,  $\nabla$  — трехмерный оператор Гамильтона;  $\kappa$  — (specific heat) теплоемкость (на единицу объема) при постоянной деформации.

Разделим второе уравнение системы (2) на  $\Lambda$  и  $\theta_0$ . В дальнейшем, постоянные  $\Lambda$ ,  $\Lambda_*$  и  $\kappa$  будут считаться отнесенными к отсчетной температуре  $\theta_0$ . Таким образом, можно минимизировать число постоянных, необходимых для формулировки связанных уравнений GNIII-теории. В итоге приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha\nabla\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \Delta\theta + \frac{\Lambda_*}{\Lambda}\Delta\dot{\theta} - \frac{\kappa}{\Lambda}\ddot{\theta} - \frac{\alpha}{\Lambda}\nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Заметим, что система (3) исключительно удобна при переходе к гиперболической GNII-теории [19, 20]: для этого необходимо положить  $\Lambda_* = 0$ . Ясно также, что переход  $\Lambda \rightarrow 0$  к классической термоупругости (GNI/СТЕ) в уравнениях (3) требует соблюдения ряда мер предосторожности.

## 2. РАЗДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В УРАВНЕНИЯХ GNIII-ТЕОРИИ

Будем рассматривать гармоническую зависимость перемещений и температуры от времени:  $\mathbf{u} = \mathbf{U}e^{-i\omega t}$ ,  $\theta = \Theta e^{-i\omega t}$ , где  $\omega$  — циклическая частота;  $\mathbf{U}$ ,  $\Theta$  — комплексные амплитуды.

Представим вектор комплексной амплитуды  $\mathbf{U}$  в виде разложения Гельмгольца:

$$\mathbf{U} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi, \quad (4)$$

где  $\Phi$  — скалярный потенциал,  $\Psi$  — векторный потенциал. При этом необходимо учесть условие калибровки векторного потенциала:

$$\nabla \cdot \Psi = 0. \quad (5)$$

Исходная система уравнений (3) будет удовлетворяться, если потенциалы  $\Phi$ ,  $\Psi$  и амплитуда  $\Theta$  будут удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \omega^2\rho\Psi + \mu\Delta\Psi = \mathbf{0}, \\ (\lambda + 2\mu)\Delta\Phi - \alpha\Theta + \omega^2\rho\Phi = 0, \\ \Delta\Theta - i\omega\frac{\Lambda_*}{\Lambda}\Delta\Theta + \frac{\kappa\omega^2}{\Lambda}\Theta + \frac{\alpha\omega^2}{\Lambda}\Delta\Phi = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Потенциал  $\Psi$  удовлетворяет независимому уравнению, векторному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta\Psi + k_\perp^2\Psi = \mathbf{0}, \quad (7)$$

где  $k_\perp^2$  — квадрат волнового числа чисто упругой поперечной волны.



В цилиндрической системе координат в векторном уравнении (7) удается разделить пространственные переменные. Для определения векторного поля  $\Psi$  будем искать его компоненты в виде

$$\Psi_r(r, \varphi, z) = A_r(r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \quad \Psi_\varphi(r, \varphi, z) = A_\varphi(r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz},$$

$$\Psi_z(r, \varphi, z) = A_z(r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz},$$

где  $n$  — азимутальный порядок волны,  $k$  — волновое число распространяющейся в волноводе обобщенной термоупругой волны заданного азимутального порядка  $n$ . Физические компоненты  $A_r(r)$ ,  $A_\varphi(r)$ ,  $A_z(r)$  находятся в форме линейных комбинаций модифицированных функций Бесселя (см. [16]). Окончательно компоненты  $\Psi_r$ ,  $\Psi_\varphi$ ,  $\Psi_z$  принимают вид

$$\Psi_r(r, \varphi, z) = (C_3 I_{n-1}(q_2 r) + C_4 I_{n+1}(q_2 r)) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz},$$

$$\Psi_\varphi(r, \varphi, z) = (C_3 I_{n-1}(q_2 r) - C_4 I_{n+1}(q_2 r)) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \quad (8)$$

$$\Psi_z(r, \varphi, z) = C_5 I_n(q_2 r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz},$$

где  $I_n(\xi)$  — модифицированная функция Бесселя целого порядка  $n$ ;  $q_2^2 = k^2 - k_\perp^2$ ;  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$  — произвольные постоянные.

Два последних уравнения в системе (6) связывают скалярный потенциал  $\Phi$  и комплексную амплитуду  $\Theta$ . Следуя работе [16], определим  $\Phi$  и  $\Theta$  через новый скалярный потенциал  $\Omega$  согласно

$$\Phi = a\Omega, \quad \Theta = b\Omega, \quad (9)$$

при этом постоянные  $a$  и  $b$  могут принимать в точности два различных значения

$$a_j = p_j^2 - g^2, \quad b_j = h \frac{\omega \alpha}{\Lambda_*} \gamma_j^2, \quad p_j^2 = k^2 - \gamma_j^2, \quad g^2 = k^2 - h h_2^2 h_3^{-2} k_\parallel^2,$$

$$h = h_3^2 \frac{1 + i h_3^2}{1 + h_3^4}, \quad h_2^2 = \frac{c_l^2}{l^2}, \quad h_3^2 = \frac{\Lambda_* \omega}{\Lambda}, \quad l^{-2} = \frac{\kappa}{\Lambda}, \quad j = 1, 2,$$

где постоянные  $\gamma_j$  ( $j = 1, 2$ ) имеют смысл волновых чисел и определяются в дальнейшем,  $k_\parallel^2$  — квадрат волнового числа чисто упругой продольной волны. Потенциал  $\Omega$  удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \Omega + \gamma^2 \Omega = 0. \quad (10)$$

Остановимся на определении постоянной  $\gamma$ . Подставляя равенства (9) во второе и третье уравнения (6), приходим к линейной алгебраической системе уравнений относительно  $a$  и  $b$  (см. [14, 16])

$$\begin{cases} (\gamma^2 (\lambda + 2\mu) - \rho \omega^2) a + \alpha b = 0, \\ \gamma^2 \omega^2 \frac{\alpha}{\Lambda} a + \left( \gamma^2 - i \frac{\Lambda_* \omega}{\Lambda} \gamma^2 - \frac{\kappa \omega^2}{\Lambda} \right) b = 0. \end{cases}$$

Для того чтобы существовало нетривиальное решение относительно  $a$  и  $b$  этой системы линейных алгебраических уравнений, необходимо, чтобы определитель системы обращался в нуль. Вычисляя определитель системы, приходим к биквадратному уравнению, из которого находятся волновые числа  $\gamma$ :

$$\frac{\gamma^4}{k_\parallel^4} (i h_3^2 - 1) + \frac{\gamma^2}{k_\parallel^2} (h_1^2 - i h_3^2) - h_2^2 = 0.$$

Квадраты волновых чисел, следовательно, вычисляются в виде (см. [16])

$$\frac{2\gamma^2}{k_\parallel^2} = \frac{i h_3^2 - h_1^2 + \sqrt{(h_1^2 - i h_3^2)^2 + 4 h_2^2 (i h_3^2 - 1)}}{i h_3^2 - 1}, \quad h_1^2 = 1 + h_2^2 + \frac{\alpha^2}{\rho \Lambda}.$$

Извлекая квадратный корень, приходим к выражению

$$2 \frac{\gamma^2}{k_{\parallel}^2} = \frac{ih_3^2 - h_1^2 + a_{1,2} + ib_{1,2}}{ih_3^2 - 1},$$

где  $a_{1,2}$  и  $b_{1,2}$  вычисляются согласно

$$a_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2 + \sqrt{(h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2)^2 + 4h_3^4(2h_2^2 - h_1^2)^2}}{2}}, \quad b_{1,2} = \frac{h_3^2(2h_2^2 - h_1^2)}{a_{1,2}}.$$

Выражения для самих волновых чисел  $\gamma$  будут следующими:

$$\sqrt{2(h_3^4 + 1)} \frac{\gamma}{k_{\parallel}} = a'_{1,2;3,4} + ib'_{1,2;3,4},$$

где введены обозначения [16]

$$a'_{1,2;3,4} = \pm \sqrt{\frac{S^2 + b_{1,2}h_3^2 - a_{1,2} + \sqrt{(S^2 + b_{1,2}h_3^2 - a_{1,2})^2 + (T^2 - a_{1,2}h_3^2 - b_{1,2})^2}}{2}},$$

$$b'_{1,2;3,4} = \frac{T^2 - a_{1,2}h_3^2 - b_{1,2}}{2a_{1,2;3,4}},$$

при этом  $S^2$  и  $T^2$  выражаются как

$$S^2 = h_3^4 + h_1^2, \quad T^2 = h_3^2(h_1^2 - 1).$$

Следует отметить, что  $\gamma_{1,2}^2$  есть квадраты волновых чисел плоской связанной термоупругой волны [14].

Вернемся к определению потенциала  $\Omega$ . В цилиндрической системе координат дифференциальное уравнение в частных производных (10) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \gamma_j^2 \Omega = 0 \quad (j = 1, 2),$$

а соответствующие решения для  $\Omega$  находятся в виде

$$\Omega|_{\gamma=\gamma_j} = I_n(p_j r) \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz} \quad (j = 1, 2).$$

Окончательно скалярный потенциал  $\Phi$  и комплексная амплитуда  $\Theta$  определяются в форме

$$\Phi = (C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r)) \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz},$$

$$\Theta = h \frac{\omega \alpha}{\Lambda_*} (C_1 \gamma_1^2 I_n(p_1 r) + C_2 \gamma_2^2 I_n(p_2 r)) \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right\} e^{\pm ikz},$$
(11)

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

### 3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВОЛНОВОДА И ЧАСТОТНОЕ УРАВНЕНИЕ

В рассматриваемой задаче предполагается, что боковая поверхность волновода свободна от нагрузок, т. е. должны удовлетворяться граничные условия:

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{r=R} = 0, \quad (12)$$

где  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\varphi}$ ,  $\sigma_{rz}$  — физические компоненты тензора напряжений.

С окружающей средой через стенку волновода происходит конвективный теплообмен по линейному закону (1). Разделим уравнение (1) на  $\theta_0$ , затем разность  $\theta - \theta_0$  обозначим, как было оговорено ранее, через  $\theta$  и продифференцируем обе части полученного уравнения по времени. В результате, приходим к условию



$$\left( \Lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} + \Lambda_* \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial r} + \sigma \dot{\theta} \right) \Big|_{r=R} = 0, \quad (13)$$

$\sigma$  — коэффициент теплообмена, отнесенный к отсчетной температуре  $\theta_0$ .

На основании (4) физические компоненты перемещений в цилиндрической системе координат выражаются (с точностью до гармонической экспоненты  $e^{-i\omega t}$ ) через потенциалы  $\Phi$  и  $\Psi$ :

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial z}, \quad u_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial r}, \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\Psi_\varphi}{r} + \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_r}{\partial \varphi}. \quad (14)$$

Принимая во внимание соотношения (8), (11), с помощью (14) получаем представления для перемещений и температуры в гармонической связанной GNIII-термоупругой волне:

$$\begin{aligned} u_r &= \left[ C_1 (p_1^2 - g^2) \left( \frac{n}{r} I_n(p_1 r) + p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right) + C_2 (p_2^2 - g^2) \left( \frac{n}{r} I_n(p_2 r) + p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n}{r} C_5 I_n(q_2 r) + (\mp i k) \left( C_3 \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + C_3 I_{n+1}(q_2 r) - C_4 I_{n+1}(q_2 r) \right) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm i k z - i \omega t}, \\ u_\varphi &= \left[ (\pm i k) \left( C_3 \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + C_3 I_{n+1}(q_2 r) + C_4 I_{n+1}(q_2 r) \right) - C_5 \left( \frac{n}{r} I_n(q_2 r) + q_2 I_{n+1}(q_2 r) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n}{r} \{ C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \} \right] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm i k z - i \omega t}, \\ u_z &= \left[ (\pm i k) \{ C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \} + (C_3 - C_4) q_2 I_n(q_2 r) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm i k z - i \omega t}, \\ \theta &= h \frac{\omega \alpha}{\Lambda_*} (C_1 (k^2 - p_1^2) I_n(p_1 r) + C_2 (k^2 - p_2^2) I_n(p_2 r)) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm i k z - i \omega t}. \end{aligned}$$

Далее, удовлетворяя граничным условиям (12), условию конвективного теплообмена (13), а также калибровочному условию (5), приходим к линейной однородной алгебраической системе уравнений относительно пяти постоянных  $C_j$ :

$$D_{ij} C_j = 0 \quad (i, j = \overline{1, 5}). \quad (15)$$

Приравнявая нулю определитель системы (15), который мы в дальнейшем будем обозначать через  $D$ , получаем частотное уравнение  $D = 0$ . В случае теплоизолированного цилиндрического волновода элементы частотного определителя приведены в работах [16, 17]. В рассматриваемой задаче с конвективным теплообменом через боковую поверхность волновода элементы частотного определителя  $D_{41}$  и  $D_{42}$  будут отличаться от приведенных в указанных работах. Для удобства ниже выписываются все элементы частотного определителя  $D$  ( $n \geq 1$ ):

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{1}{k^2 - q_1^2} (p_1^2 - g^2) ((n^2 - n + p_1^2) I_n(p_1) - p_1 I_{n+1}(p_1)) + \\ &\quad + \frac{(2q_1^2 - q_2^2 - k^2)(p_1^2 - g^2)}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} ((n - n^2 - k^2) I_n(p_1) + p_1 I_{n+1}(p_1)) - h s_*^2 (k^2 - p_1^2) I_n(p_1), \\ D_{12} &= \frac{1}{k^2 - q_1^2} (p_2^2 - g^2) ((n^2 - n + p_2^2) I_n(p_2) - p_2 I_{n+1}(p_2)) + \\ &\quad + \frac{(2q_1^2 - q_2^2 - k^2)(p_2^2 - g^2)}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} ((n - n^2 - k^2) I_n(p_2) + p_2 I_{n+1}(p_2)) - h s_*^2 (k^2 - p_2^2) I_n(p_2), \\ D_{13} &= \mp (i k) \frac{2}{k^2 - q_2^2} \left( \frac{2n^2 - 2n + q_2^2}{2n} (I_{n-1}(q_2) - I_{n+1}(q_2)) + (n - 1) I_{n+1}(q_2) \right), \\ D_{14} &= \mp (i k) \frac{2}{k^2 - q_2^2} (-q_2 I_n(q_2) + (n + 1) I_{n+1}(q_2)), \quad D_{15} = \frac{2}{k^2 - q_2^2} ((n^2 - n) I_n(q_2) + q_2 n I_{n+1}(q_2)), \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
 D_{21} &= 2(p_1^2 - g^2) ((n - n^2)I_n(p_1) - np_1I_{n+1}(p_1)), & D_{22} &= 2(p_2^2 - g^2) ((n - n^2)I_n(p_2) - np_2I_{n+1}(p_2)), \\
 D_{23} &= \pm(ik) \left( \frac{4n^2 - 4n + q_2^2}{2n} (I_{n-1}(q_2) - I_{n+1}(q_2)) + (2n - 2)I_{n+1}(q_2) \right), \\
 D_{24} &= \pm(ik) (q_2I_n(q_2) - (2n + 2)I_{n+1}(q_2)), & D_{25} &= (2n - 2n^2 - q_2^2)I_n(q_2) + 2q_2I_{n+1}(q_2), \\
 D_{31} &= \pm(2ik)(p_1^2 - g^2) (nI_n(p_1) + p_1I_{n+1}(p_1)), & D_{32} &= \pm(2ik)(p_2^2 - g^2) (nI_n(p_2) + p_2I_{n+1}(p_2)), \\
 D_{33} &= \frac{2k^2 + q_2^2}{2} (I_{n-1}(q_2) - I_{n+1}(q_2)) + (q_2^2 + k^2)I_{n+1}(q_2), \\
 D_{34} &= -q_2nI_n(q_2) - (q_2^2 + k^2)I_{n+1}(q_2), & D_{35} &= \pm(ik)nI_n(q_2), \\
 D_{41} &= (k^2 - p_1^2) (nI_n(p_1) + p_1I_{n+1}(p_1)) + h_7 (k^2 - p_1^2) I_n(p_1), \\
 D_{42} &= (k^2 - p_2^2) (nI_n(p_2) + p_2I_{n+1}(p_2)) + h_7 (k^2 - p_2^2) I_n(p_2), \\
 D_{43} &= 0, & D_{44} &= 0, & D_{45} &= 0, & D_{51} &= 0, & D_{52} &= 0, & D_{53} &= q_2, & D_{54} &= q_2, & D_{55} &= \pm(ik),
 \end{aligned}$$

где приняты обозначения  $q_1^2 = k^2 - k_{\parallel}^2$ ,  $s_*^2 = \frac{\alpha^2}{\rho\Lambda_*}$  и введены следующие безразмерные величины:  $h_5^2 = h_6^2 k_{\parallel}$ ,  $h_6^2 = \sigma c_l \Lambda^{-1}$ ,  $h_7 = \frac{ih_5^2}{1 + ih_3^2}$ ,  $\tilde{s}_* = \frac{s_*}{\sqrt{\omega}}$ ,  $\tilde{k} = kR$ ,  $\tilde{k}_{\parallel} = k_{\parallel}R$ ,  $\tilde{p}_j = p_jR$ ,  $\tilde{q}_j = q_jR$ . Символ волны, указывающий на отсутствие физической размерности, для краткости опущен.

#### 4. ВИЗУАЛЬНАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ КОРНЕЙ ЧАСТОТНОГО УРАВНЕНИЯ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Переходя к анализу частотного уравнения, отметим, что в рассматриваемой задаче имеется пять безразмерных материальных постоянных, не зависящих от частоты. Изменение частоты будет определяться варьированием еще одного (шестого) безразмерного параметра  $\tilde{k}_{\parallel}$ .

Для отыскания решений частотного уравнения и анализа полученных данных применялась система символьных вычислений Mathematica 6.0. С ее помощью численно исследовалось уравнение  $D = 0$  в случае азимутального числа  $n = 1$ . Осуществлялся поиск безразмерных волновых чисел  $\tilde{k} = kR$  при заданных значениях пяти независимых безразмерных определяющих постоянных и различных значениях волнового числа чисто упругой продольной волны  $\tilde{k}_{\parallel}$ ; проводилась визуальная локализация корней уравнения  $D = 0$  и были построены соответствующие графические образы.

В таблице, приводимой далее, сгруппированы некоторые наиболее близкие к нулю безразмерные волновые числа  $\tilde{k}$ , найденные при следующих значениях безразмерных определяющих постоянных:  $h_0 = \sqrt{\Lambda_* c_l / (\Lambda R)} = 0.1$ ,  $h_2 = c_l / l = 100.0$ ,  $h_4 = \alpha \sqrt{R / (\rho \Lambda_* c_l)} = 0.01$ ,  $h_6 = \sqrt{\sigma c_l / \Lambda} = 1.1$ ,  $c_l / c_t = 1.9$ .

Безразмерные волновые числа  $\tilde{k} = kR$

$\tilde{k}_{\parallel}$	Волновые числа $\tilde{k} = kR$	$\tilde{k}_{\parallel}$	Волновые числа $\tilde{k} = kR$
0.1	$-0.011814 + 6.085313i$	0.2	$-0.2 + 4.98733 \times 10^{-18}i$
	$-0.19 - 3.39887 \times 10^{-18}i$		$0.38 - 1.3892 \times 10^{-22}i$
	$1.98107 \times 10^{-13} + 2.81428i$		$1.33648 \times 10^{-13} + 2.79345i$
	$1.71312 \times 10^{-14} + 0.456983i$		$6.96231 \times 10^{-15} + 0.605541i$
0.3	$0.57 - 1.90096 \times 10^{-18}i$	0.4	$0.4 - 1.5378 \times 10^{-17}i$
	$0.3 - 1.0262 \times 10^{-17}i$		$0.76 + 4.57084 \times 10^{-18}i$
	$2.20287 \times 10^{-15} + 0.689327i$		$2.35725 \times 10^{-15} + 0.731949i$
	$1.74377 \times 10^{-15} + 6.6713i$		$-4.41931 \times 10^{-18} + 2.70864i$
0.5	$2.967 \times 10^{-15} + 0.741351i$	0.6	$2.12995 \times 10^{-15} + 0.719426i$
	$-3.51351 \times 10^{-15} - 0.741351i$		$2.67966 \times 10^{-15} + 0.719426i$
	$0.95 - 4.0535 \times 10^{-19}i$		$1.14 - 3.57361 \times 10^{-18}i$
	$0.5 - 3.07992 \times 10^{-17}i$		$0.6 - 4.43641 \times 10^{-17}i$
0.7	$1.69503 \times 10^{-15} + 0.663357i$	0.8	$1.21172 \times 10^{-16} + 0.562791i$
	$-1.60072 \times 10^{-15} + 0.663357i$		$1.44482 \times 10^{-15} + 0.562791i$
	$1.33 + 7.8288 \times 10^{-20}i$		$0.8 - 7.91034 \times 10^{-17}i$
	$0.7 - 6.05126 \times 10^{-17}i$		$1.52 + 1.94567 \times 10^{-24}i$



Далее остановимся на процедуре визуальной локализации корней частотного уравнения. Для определенности выберем первый из корней частотного уравнения, включенных в таблицу:  $\tilde{k} = -0.011814 + 6.085313i$ . Сначала построим кривые нулевого уровня значений  $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$  и  $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$ . На рис. 1 приведены соответствующие графические образы, полученные с помощью системы символьных вычислений Mathematica 6.0. Линии уровня  $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  и  $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  выстраиваются с помощью стандартных процедур Mathematica 6.0 по 400 точкам.

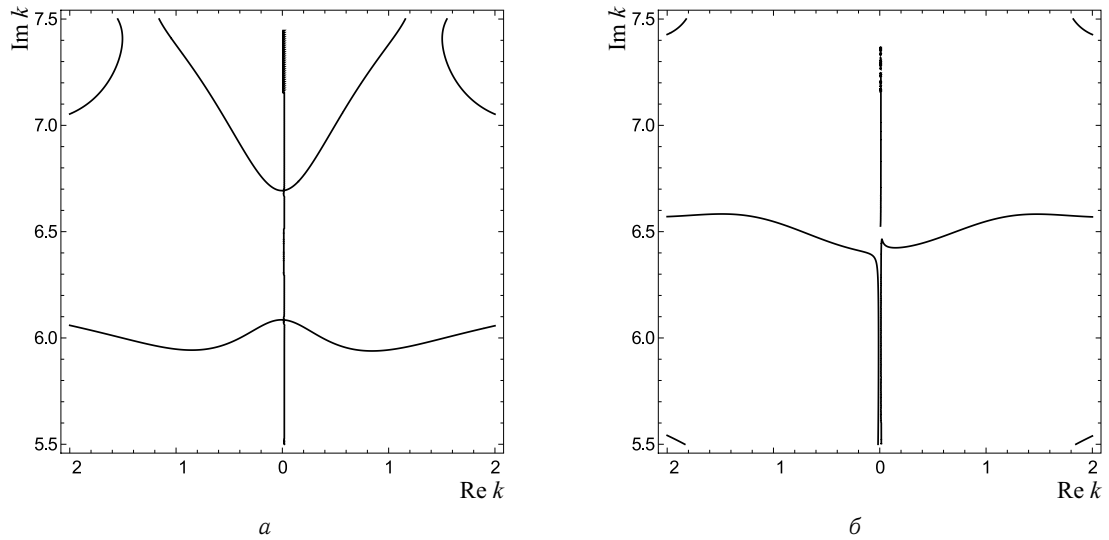


Рис. 1. Изолинии в области локализации волнового числа  $\tilde{k} = -0.011814 + 6.085313i$  при заданных значениях  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $h_6 = 1.1$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\tilde{k}_{||} = 0.1$ : а —  $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$ , б —  $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$

На рис. 2, 3 построены совместные изображения нулевых линий уровня  $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  и  $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  в окрестности волнового числа  $\tilde{k} = -0.011814 + 6.085313i$ . Рис. 3 дает наиболее детальную картину. Точки, в которых пересекаются указанные линии уровня, и являются корнями частотного уравнения  $D = 0$ . После чего, собственно говоря, процесс визуальной локализации волнового числа  $\tilde{k} = -0.011814 + 6.085313i$  можно считать завершенным.

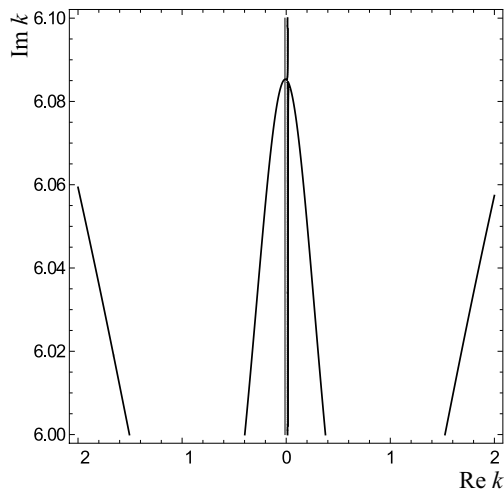


Рис. 2. Пересечение линий уровня  $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  и  $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$ , определяющее комплексное волновое число  $\tilde{k} = -0.011814 + 6.085313i$ , при заданных значениях  $h_0 = 0.1$ ,  $h_2 = 100.0$ ,  $h_4 = 0.01$ ,  $h_6 = 1.1$ ,  $c_l/c_t = 1.9$ ,  $\tilde{k}_{||} = 0.1$

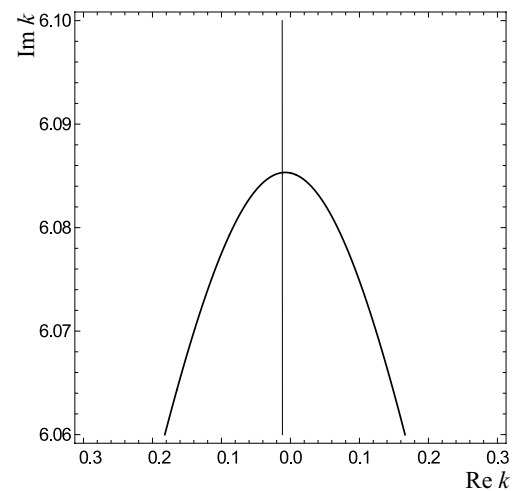


Рис. 3. Пересечение (более детальное изображение) линий уровня  $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$  и  $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k}) = 0$ , определяющее волновое число  $\tilde{k} = -0.011814 + 6.085313i$

Подставляя найденное волновое число  $\tilde{k} = -0.011814 + 6.085313i$  в частотный определитель  $D$ , получаем значение  $D = 5.52613 \cdot 10^{-11} + 7.10898 \cdot 10^{-11}i$ , весьма близкое к нулю, что свидетельствует о достаточно точном нахождении корня частотного уравнения  $D = 0$ .

Используемые в формулах для элементов частотного детерминанта величины  $q_1, q_2, p_1, p_2, g$  в силу своего определения *многозначны*. Последнее обстоятельство существенно осложняет вычисление частотного детерминанта в системах типа Mathematica 6.0. В частности, для получения полного набора линий нулевого уровня значений  $\text{Re } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$  и  $\text{Im } D(\text{Re } \tilde{k}, \text{Im } \tilde{k})$  требуется исследование всех  $2^5$  вариантов выбора значений двузначных величин  $q_1, q_2, p_1, p_2, g$ . С целью контроля их значений произведем явное вычисление соответствующих квадратных корней. Для этого воспользуемся тем, что извлечение квадратного корня в выражении

$$q = \sqrt{k^2 - \xi^2} \quad (16)$$

приводит к двум следующим значениям:

$$\text{Re } q = \pm \sqrt{\frac{P + \sqrt{P^2 + 4Q^2}}{2}}, \quad \text{Im } q = \frac{Q}{\text{Re } q}, \quad (17)$$

где введены обозначения  $P = (\text{Re } k)^2 - (\text{Im } k)^2 - (\text{Re } \xi)^2 + (\text{Im } \xi)^2$ ,  $Q = (\text{Re } k)(\text{Im } k) - (\text{Re } \xi)(\text{Im } \xi)$ .

Ясно, что приведенные формулы вычисления значений  $\sqrt{k^2 - \xi^2}$  пригодны только в том случае, когда  $\text{Re } \sqrt{k^2 - \xi^2} \neq 0$ . Это условие не выполняется только тогда, когда разность  $k^2 - \xi^2$  есть отрицательное вещественное число.

На основании (16), (17) для величин  $q_1 = \sqrt{k^2 - k_{\parallel}^2}$ ,  $k_{\parallel}^2 = \frac{\omega^2}{c_l^2}$ ,  $q_2 = \sqrt{k^2 - k_{\perp}^2}$ ,  $k_{\perp}^2 = \frac{\omega^2}{c_t^2}$  получим

$$\begin{aligned} \text{Re } q_1 &= \pm \sqrt{\frac{P_{\parallel} + \sqrt{P_{\parallel}^2 + 4Q_{\parallel}^2}}{2}}, & \text{Im } q_1 &= \frac{Q_{\parallel}}{\text{Re } q_1}, & P_{\parallel} &= (\text{Re } k)^2 - (\text{Im } k)^2 - k_{\parallel}^2, & Q_{\parallel} &= (\text{Re } k)(\text{Im } k); \\ \text{Re } q_2 &= \pm \sqrt{\frac{P_{\perp} + \sqrt{P_{\perp}^2 + 4Q_{\perp}^2}}{2}}, & \text{Im } q_2 &= \frac{Q_{\perp}}{\text{Re } q_2}, & P_{\perp} &= (\text{Re } k)^2 - (\text{Im } k)^2 - k_{\perp}^2, & Q_{\perp} &= (\text{Re } k)(\text{Im } k). \end{aligned}$$

Квадратный корень в выражении  $g = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ ,  $\xi^2 = k_{\parallel}^2 h_2^2 \frac{1 + ih_3^2}{1 + h_3^4}$ , поскольку

$$\text{Re } \xi = \pm h_2 k_{\parallel} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + h_3^4}}{2(1 + h_3^4)}}, \quad \text{Im } \xi = \frac{k_{\parallel}^2 h_2^2 h_3^2}{2(1 + h_3^4) \text{Re } \xi}, \quad (18)$$

извлекается в следующем виде:

$$\text{Re } g = \pm \sqrt{\frac{P + \sqrt{P^2 + 4Q^2}}{2}}, \quad \text{Im } g = \frac{Q}{\text{Re } g},$$

$$P = (\text{Re } k)^2 - (\text{Im } k)^2 - (\text{Re } \xi)^2 + (\text{Im } \xi)^2, \quad Q = (\text{Re } k)(\text{Im } k) - (\text{Re } \xi)(\text{Im } \xi).$$

В формуле (18) необходимо выбрать один из знаков (все равно какой, так как дальнейшие вычисления не зависят от конкретизации знака). По смыслу величина  $\xi$  есть комплексное волновое число плоской чисто термической (т. е. не сопровождающейся деформацией) волны. Поскольку термические волны в чистом виде в термоупругой среде не существуют, то значение  $\xi$  имеет указанный выше смысл только с этой поправкой.

Остается рассмотреть квадратные корни в

$$p_1 = \sqrt{k^2 - \gamma_1^2}, \quad p_2 = \sqrt{k^2 - \gamma_2^2},$$

где

$$\frac{2\gamma_{1,2}^2}{k_{\parallel}^2} = \frac{ih_3^2 - h_1^2 + a_{1,2} + ib_{1,2}}{ih_3^2 - 1},$$



$$a_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2 + \sqrt{(h_1^4 - h_3^4 - 4h_2^2)^2 + 4h_3^4(2h_2^2 - h_1^2)^2}}{2}}, \quad b_{1,2} = \frac{h_3^2(2h_2^2 - h_1^2)}{a_{1,2}}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{k_{\parallel}} \sqrt{1 + h_3^4 \operatorname{Re} \gamma_{1,2}} = \\ & = \pm \sqrt{\frac{h_3^4 + h_3^2 b_{1,2} + h_1^2 - a_{1,2} + \sqrt{(h_3^4 + h_3^2 b_{1,2} + h_1^2 - a_{1,2})^2 + (h_1^2 h_3^2 - a_{1,2} h_3^2 - h_3^2 - b_{1,2})^2}}{2}}, \quad (19) \\ & \frac{\sqrt{2}}{k_{\parallel}} \sqrt{1 + h_3^4 \operatorname{Im} \gamma_{1,2}} = \frac{h_1^2 h_3^2 - a_{1,2} h_3^2 - h_3^2 - b_{1,2}}{2 \frac{\sqrt{2}}{k_{\parallel}} \sqrt{1 + h_3^4 \operatorname{Re} \gamma_{1,2}}}, \end{aligned}$$

значения  $p_1, p_2$  вычисляются как

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} p_1 &= \pm \sqrt{\frac{P_1 + \sqrt{P_1^2 + 4Q_1^2}}{2}}, & \operatorname{Im} p_1 &= \frac{Q_1}{\operatorname{Re} p_1}, \\ P_1 &= (\operatorname{Re} k)^2 - (\operatorname{Im} k)^2 - (\operatorname{Re} \gamma_1)^2 + (\operatorname{Im} \gamma_1)^2, & Q_1 &= (\operatorname{Re} k)(\operatorname{Im} k) - (\operatorname{Re} \gamma_1)(\operatorname{Im} \gamma_1); \\ \operatorname{Re} p_2 &= \pm \sqrt{\frac{P_2 + \sqrt{P_2^2 + 4Q_2^2}}{2}}, & \operatorname{Im} p_2 &= \frac{Q_2}{\operatorname{Re} p_2}, \\ P_2 &= (\operatorname{Re} k)^2 - (\operatorname{Im} k)^2 - (\operatorname{Re} \gamma_2)^2 + (\operatorname{Im} \gamma_2)^2, & Q_2 &= (\operatorname{Re} k)(\operatorname{Im} k) - (\operatorname{Re} \gamma_2)(\operatorname{Im} \gamma_2). \end{aligned}$$

В формуле (19) также необходимо указать один из знаков (все равно какой, так как интересующие нас вычисления не зависят от того, какой именно знак выбран). Заметим, что постоянные  $\gamma_1, \gamma_2$  — скорости распространения плоских связанных GNIII-термоупругих волн.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00184-а).*

### Библиографический список

1. Maxwell, J.C. On the Dynamical Theory of Gases / J.C. Maxwell // Phil. Trans. Royal Soc. London. 1867. Vol. 157. P. 49–88.
2. Biot, M.A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics / M.A. Biot // J. Appl. Phys. 1956. Vol. 127. P. 240–253.
3. McNelly, T.F. Heat pulses in NaF: Onset of second sound / T.F. McNelly [et al.] // Phys. Reviews. 1970. Vol. 24(3). P. 100–102.
4. Jackson, H.E. Second sound in NaF / H.E. Jackson, C.T. Walker, T.F. McNelly // Phys. Reviews. 1970. Vol. 25(1). P. 26–28.
5. Rogers, S.J. Transport of heat and approach to second sound in some isotopically pure Alkali-Halide crystals / S.J. Rogers // Phys. Reviews. 1971. Vol. 3(4). P. 1440–1457.
6. Pohl, D.W. Observation of second sound in NaF by means of light scattering / D.W. Pohl, V. Irniger // Phys. Review Letters. 1976. Vol. 36(9). P. 480–483.
7. Hardy, R.J. Velocity of second sound in NaF / R.J. Hardy, S.S. Jaswal // Phys. Review. 1971. B. 3(12). P. 4385–4387.
8. Narayanamurti, V. Observation of second sound in Bismuth / V. Narayanamurti, R.C. Dynes // Phys. Reviews. 1972. Vol. 28. P. 1461–1464.
9. Lord, H. A generalized dynamical theory of thermoelasticity / H. Lord, Y. Shulman // J. Mech. Phys. Solid. 1967. Vol. 15. P. 299–309.
10. Green, A.E. Thermoelasticity / A.E. Green, K.A. Lindsay // J. Elasticity. 1972. Vol. 2. P. 1–7.
11. Green, A.E. On undamped heat waves in an elastic solid / A.E. Green, P.M. Naghdi // J. Thermal Stresses. 1992. Vol. 15. P. 253–264.
12. Green, A.E. Thermoelasticity without energy dissipation / A.E. Green, P.M. Naghdi // J. Elasticity. 1993. Vol. 31. P. 189–208.
13. Puri, P. On the propagation of plane waves in type-III thermoelastic media / P. Puri, P.M. Jordan // Proceedings of the Royal Society of London. 2004. A 460. P. 3203–3221.
14. Ковалев, В.А. Волновые числа плоских GNIII-термоупругих волн и неравенства, обеспечивающие их нормальность / В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2010. Т. 10. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 46–53.
15. Dhaliwal, R.S. Thermoelastic waves in an infinite solid caused by a line heat source / S.R. Dhaliwal, R.S. Majumdar, W. Jun // Intern. J. Math. & Math. Sci. 1997. Vol. 20, № 2. P. 323–334.



16. Ковалев, В.А. Волновые задачи теории поля и термомеханика / В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.

17. Ковалев, В.А. Распространение связанных GНИИ-термоупругих волн в длинном цилиндрическом волноводе / В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). С. 207–255.

18. Ковалев, В.А. Прохождение теплового GНИИ-волнового сигнала с высокой окружной гармоникой через цилиндрический волновод / В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев, А.Е. Романов // Актуальные проблемы приклад-

ной математики, информатики и механики: сб. трудов междунар. конф., посвящ. 80-летию проф. Д.Д. Ивлева. Воронеж: Изд. центр Воронеж. гос. ун-та, 2010. С. 173–180.

19. Ковалев, В.А. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты / В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев. М.: Физматлит, 2009. 156 с.

20. Ковалев, В.А. Волновые задачи теории поля и термомеханика / В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев // Математическая физика и ее приложения: материалы междунар. конф. / под ред. чл.-кор. РАН И.В. Воловича и проф. Ю.Н. Радаева. Самара: Книга, 2010. С. 165–166.

УДК 539.375

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧАСТИЧНОГО ЗАКРЫТИЯ ТРЕЩИНОВИДНЫХ ПОЛОСТЕЙ В ГОРЯЩЕМ ТВЕРДОМ ТОПЛИВЕ ПРИ ДЕЙСТВИИ ОБЪЕМНЫХ СИЛ

**В.М. Мирсалимов, Б.Э. Рустамов**

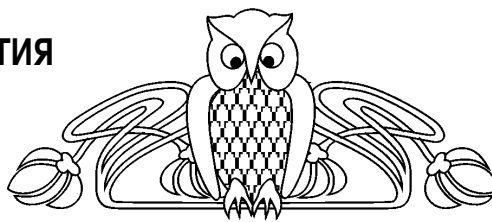
Азербайджанский технический университет, Баку, кафедра сопротивления материалов  
E-mail: mir-vagif@mail.ru

На основе методов теории упругости проведено математическое описание модели закрытия трещиновидных полостей с концевыми зонами, в которых действуют силы сцепления материала, в твердом горящем топливе. Принято, что взаимодействие поверхностей трещиновидных полостей под действием объемных и поверхностных нагрузок приводит к возникновению зон налегания их поверхностей. Определение неизвестных параметров, характеризующих закрытие трещиновидных полостей, сводится к решению системы сингулярных интегродифференциальных уравнений. С помощью процедуры алгебраизации интегральные уравнения сводятся к системе нелинейных алгебраических уравнений, которая решается методом последовательных приближений. Находятся нормальные и касательные контактные напряжения, усилия в связях между берегами трещиновидных полостей, значения размеров концевых контактных зон, где берега трещиновидных полостей смыкаются.

**Ключевые слова:** горящее твердое топливо, трещиновидные полости с концевыми зонами, силы сцепления, объемные силы, контактные напряжения.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Потребности современной оборонной техники, в частности установок на твердом топливе и ствольных артиллерийских систем, приводят к совершенствованию способов моделирования и разработки новых методов расчета, наиболее полно и адекватно учитывающих механические свойства реальных материалов. При работе двигателей на твердом топливе иногда происходит выход на нерасчетный режим [1, 2], который приводит к взрыву. Наиболее распространенная причина этого явления заключается в том, что в топливе имелись недопустимо большие трещиноподобные полости, возникшие, как правило, при технологическом процессе. Для повышения безопасной работы двигателя на траектории необходимо на стадии проектирования изделий проводить предельный анализ горящего твердого топлива, чтобы установить, что предполагаемые исходные трещиновидные полости, расположенные самым неблагоприятным образом, не будут расти до критических размеров и не вызовут разрушения



**Simulation of Partial Closure Crack-Visible Cavities in Burning Solid Fuel Under the Influence of Body Forces**

**V.M. Mirsalimov, B.E. Rustamov**

Azerbaijan Technical University, Baku,  
Chair of Strength of Materials  
E-mail: mir-vagif@mail.ru

On the basis of the theory of elasticity mathematical description of the model for the covering crack-visible cavities with end zones in which cohesive forces of material act, in the burning solid-fuel has been performed. It is accepted that the interaction of crack-visible cavity surfaces under the influence of body and surface loads leads to the appearance of overlap zones of their surfaces. The determination of the unknown parameters that characterize the closure crack-visible cavities, is reduced to the solving of the system of singular integrodifferential equations. Using the procedure of algebraization integral equations are reduced to the system of nonlinear algebraic equations which is solved by successive approximations. Normal and tangential contact stresses, the tractions in the bonds, the values of the size of the end contact zones, where the faces of the crack-visible cavities are closed, have been found.

**Key words:** burning solid fuel, crack-visible cavity with end zones, cohesive forces, body forces, contact stresses.