П. Н. Вабищевич, Разностные схемы сквозного счета для некоторых задач математической физики, *Дифференц. уравнения*, 1988, том 24, номер 7, 1161–1166

УДК 519.63

П. Н. ВАБИЩЕВИЧ

# РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ СКВОЗНОГО СЧЕТА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В настоящее время в теории разностных методов решения краевых задач математической физики складывается новое направление исследований, связанных с решением задач с обобщенными решениями. Основные результаты этих работ подытожены в монографии [1]. Расширение класса решаемых разностными методами задач открывает новые возможности при прикладном математическом моделировании. В данной работе рассмотрены некоторые вопросы построения на основе результатов [1] разностных схем сквозного счета для некоторых задач математической физики. Вычислительные алгоритмы сквозного счета имеют ряд неоспоримых преимуществ перед другими методами, например, в части их программной реализации. При изложении результатов мы ограничимся краевыми задачами для эллиптических уравнений второго порядка. Переход к другим задачам математической физики часто не встречает затруднений и носит редакционный характер.

В работе рассматриваются неоднородные задачи сопряжения на поверхности, лежащей внутри расчетной области. С помощью обобщенной формулировки задачи строятся разностные схемы сквозного счета для различных условий скачка при переходе поверхности. Одномерные задачи, а также задачи с плоской поверхностью скачка рассмотрены в работах [2—4].

При приближенном решении краевых задач в сложных расчетных областях используется метод фиктивных областей [5]. Полученные на его основе разностные схемы также относятся к классу схем сквозного счета. Рассматриваются некоторые классы задач со свободными границами. Разностные схемы сквозного счета строятся на основе обобщенной формулировки задачи. Такой подход используется при численном решении задач типа Стефана, начиная с классических работ [6, 7].

**1. Задачи сопряжения.** В ограниченной односвязной области $D$ пространства $R^m$ с достаточно гладкой границей $\partial D$ определим эллиптический оператор второго порядка $L$ соотношением

$$Lu\equiv \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} - c(x) u$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами $a_{ij}(x)>0$, $c(x)\geqslant 0$. В $D$ выделим гладкую поверхность $\Gamma$ без самопересечений. Будем считать, что $\Gamma$ разбивает $D$ на две подобласти $D_1$ и $D_2$: $\Gamma=\partial D_1\cap\partial D_2$. Пусть в каждой из этих подобластей функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$Lu=-f(x),\quad x\in D_1\cup D_2 \tag{1}$$

и некоторым граничным условиям

$$lu=g(x),\quad x\in\partial D. \tag{2}$$

Для однозначного определения $u(x)$ на границе $\Gamma$ ставятся граничные условия сопряжения

$$[u]=\varphi(x),\quad x\in\Gamma, \tag{3}$$

$$[\partial u/\partial\nu]=\psi(x),\quad x\in\Gamma. \tag{4}$$

В (4) $\partial u/\partial\nu$ определяется выражением

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}=\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(n, x_i),$$

где $n$ — направление нормали, для определенности внешней по отношению к области $D_1$. В (3), (4) через $[\cdot]$ обозначен скачок $[p]=p_1(x)-p_2(x)$, $x\in\Gamma$, где $p_i(x)=\lim\limits_{x'\to x\in\Gamma} p(x')$, $x'\in D_i$, $i=1, 2$.

Для построения вычислительных алгоритмов сквозного счета (решения задачи во всей области $D$) необходимо прежде всего перейти к однородному условию сопряжения для $u(x)$. С этой целью определим функцию $\varphi(x)$ во всей области $D_1$, например, гладким продолжением с $\Gamma$ в $D_1$. Вводя новую неизвестную функцию $v(x)$ соотношением

$$v(x)=\begin{cases} u(x)+\varphi(x), & x\in D_1,\\ u(x), & x\in D_2,\end{cases}$$

избавимся от наиболее неприятного неоднородного условия (3). Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\varphi(x)=0$.

Легко проверяется, что решение задачи (1)—(4) при $\varphi(x)=0$ эквивалентно решению уравнения

$$Lu+\delta_\Gamma(x)\psi(x)=-f(x),\quad x\in D \tag{5}$$

во всей области $D$ с граничным условием (2). В уравнении (5) через $\delta_\Gamma(x)$ обозначена поверхностная $\delta$-функция [8], для которой

$$\int\limits_D \delta_\Gamma(x)\eta(x)\,dx=\int\limits_\Gamma \eta(x)\,dx. \tag{6}$$

Используя обобщенную формулировку (2), (5), строим разностные схемы сквозного счета. Не останавливаясь на особенностях решения краевых задач в нерегулярных областях, примем, что $D$—$m$-мерный параллелепипед. В $D$ введем равномерную по каждому направлению $x_i$, $i=1, 2, \ldots, m$, сетку $\bar\omega_h=\omega_h+\gamma_h$, где $\omega_h$ — множество внутренних, а $\gamma_h$ — граничных узлов. Шаги сетки обозначим $h_i$, $i=1, 2, \ldots, m$, соответственно.

В соответствии с [1] строим разностную схему для задачи (2), (5), используя осредняющий оператор $S=\prod\limits_{i=1}^m S_i$, где

$$S_i u(x)=\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_i-0,5h_i}^{x_i+0,5h_i} u(x_1, \ldots, \xi_i, \ldots, x_m)\,d\xi_i.$$

Обозначим через $L_h$ разностный аналог дифференциального оператора $L$. Для уравнения (5) получим разностную схему

$$L_h y+S(\delta_\Gamma(x)\psi(x))=-S(f(x)),\quad x\in\omega_h. \tag{7}$$

С учетом определения (6) для достаточно гладкой функции $\psi(x)$ имеем

$$S(\delta_\Gamma(x)\psi(x))\approx\psi(x)\,\frac{\Gamma_G(x)}{\operatorname{mes} G(x)}, \tag{8}$$

где $\Gamma_G(x)$ — площадь части поверхности $\Gamma$, заключенной внутри параллелепипеда

$$G(x)=\{\xi\,|\,\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m),$$
$$x_i-0,5h_i<\xi_i<x_i+0,5h_i,\ i=1, 2, \ldots, m\}.$$

Из (7), (8) получим

$$L_h y+\psi(x)\,\frac{\Gamma_G(x)}{\operatorname{mes} G(x)}=-S(f(x)),\quad x\in\omega_h. \tag{9}$$

Разностная схема (9) при $L=\Delta$ приведена в работе [9]. Отметим некоторые возможности построения разностных схем сквозного счета в более общих задачах. Прежде всего значительный интерес вызывают задачи сопряжения, в которых величина скачка потоков ($\psi(x)$) зависит от решения. Простейшая такая ситуация моделируется условием

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu}\right] = -\alpha(x)(u - g(x)), \quad x \in \Gamma. \tag{10}$$

В качестве примера отметим задачи дифракции электромагнитных волн на теле вращения [10].

В случае (10) функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$Lu - \alpha(x)\delta_\Gamma(x)(u - g(x)) = -f(x), \quad x \in D, \tag{11}$$

для которого разностная схема строится аналогично (9), и она имеет вид

$$L_h y - \alpha(x)\frac{\Gamma_G(x)}{\mathrm{mes}\, G(x)}(y - g(x)) = -S(f(x)), \quad x \in \omega_h$$

при достаточно гладких $\alpha(x)$ и $g(x)$.

**2. Краевые задачи.** Выше описан подход к построению разностных схем для задач с неоднородными условиями сопряжения. В методе фиктивных областей [5] исходная нерегулярная расчетная область $D_1$ погружается в выбранную регулярную область $D$, целиком содержащую $D_1$. В настоящее время существуют различные варианты метода фиктивных областей для приближенного решения основных краевых задач математической физики (применительно к эллиптическим уравнениям они описаны в [11]). Реализация тех или иных граничных условий в методе фиктивных областей может рассматриваться с точки зрения задания соответствующих условий сопряжения на общей границе областей $D$ и $D_1$. На этом пути могут быть получены новые варианты метода фиктивных областей.

Пусть в области $D_1$ решается уравнение

$$Lv = -f(x), \quad x \in D_1 \tag{12}$$

с граничными условиями первого рода

$$v(x) = g(x), \quad x \in \partial D_1. \tag{13}$$

Область $D_1$ дополним до некоторой регулярной области $D$ ($D_2 = D \setminus D_1$), и пусть $\Gamma = \partial D_1 \cap \partial D_2$. В расширенной области $D$ решается краевая задача для уравнения (1) с условиями

$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial D \tag{14}$$

при гладком продолжении $g(x)$ с $\partial D_1$ на $\partial D$ и правой части $f(x)$ из $D_1$ во всю область $D$. На $\Gamma$ зададим условия сопряжения (3) и (10) при $\varphi(x) = 0$. Пусть теперь $\alpha(x) = \varepsilon^{-2}$, где $\varepsilon$ достаточно малое. Из (10) следует, что в этом случае будет выполнено приближенное равенство $u(x) \approx g(x)$ на $\Gamma$. В силу (1) и (12)—(14) получим, что при $\varepsilon \to 0$ $u(x) \to v(x)$, $x \in D_1$, т. е. краевая задача (11), (14) при $\alpha(x) = \varepsilon^{-2}$ и $\varepsilon \to 0$ дает приближенное решение исходной краевой задачи (12), (13).

Предложенный вариант метода фиктивных областей особенно удобен при решении задачи Дирихле в области с разрезами. Применительно к краевым задачам напорной фильтрации под гидротехническим сооружением он использовался в работе [12].

Для приближенного решения однородных второй и третьей краевых задач варианты метода фиктивных областей строятся [13, 14] на основе разрывного продолжения коэффициентов при старших производных. Пусть $v(x)$ определяется из уравнения (12) и граничного условия

$$\partial v / \partial \nu = \psi(x), \quad x \in \partial D_1. \tag{15}$$

В расширенной области $D$ (для простоты будем считать, что $\bar{D}_1 \subset D$) решается уравнение (1) с условиями на границе

$$u(x)=0, \quad x \in \partial D. \tag{16}$$

Оператор $L$ определяется в $D_2$ следующим образом: $a_{ij}=\delta_{ij}\varepsilon^2$, $c(x)=0$, $f(x)=0$, $x \in D_2$, где $\delta_{ij}$— символ Кронекера. Будем считать, что на $\Gamma$ выполнены условия (3), (4) при $\varphi(x)=0$. Благодаря тому, что $\varepsilon$ достаточно малое, из этих условий сопряжения и вытекает приближенное выполнение граничного условия (15), так как $\partial u/\partial \nu$ в $D_2$ мало. Далее выписывается обобщенная формулировка задачи (5), (16) и строится разностная схема типа (9).

Аналогично рассматривается более общая третья краевая задача. Вместо (15) задается условие

$$\partial v/\partial \nu = -\alpha(x)(v-g(x)), \quad x \in \partial D_1. \tag{17}$$

Для задачи (12), (17) задача в расширенной области $D$ будет такой же, как и для задачи (12), (15), но на $\Gamma$ условия сопряжения будут иметь вид (3), (10) при $\varphi(x)=0$. Обобщенная формулировка приводит к уравнению (11), для которого разностная схема выписана выше.

В работе [14] сформулирована задача сопряжения при $g(x)=0$ и $\psi(x)=0$, а в работе [13] фактически получено уравнение (11) при специальной аппроксимации $\delta_\Gamma(x)$, согласованной с параметром продолжения $\varepsilon$.

**3. Задачи со свободной границей.** Методы сквозного счета представляют особый интерес при рассмотрении задач со свободными (неизвестными) границами. В качестве примера отметим, что такой подход является практически единственным при приближенном решении многомерных классических задач Стефана [6, 7]. Здесь в развитие работы [9] мы построим обобщенные формулировки новых задач со свободной границей.

Ограничимся более узким классом задач для эллиптического оператора $\mathcal{L}$ вида

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} a(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - c(x)u,$$

где $a(x)$ предполагается непрерывным. Будем считать, что свободная граница $\Gamma$ разбивает область $D$ на две подобласти $D_1$ и $D_2$. Она определяется из условия

$$u(x)=0, \quad x \in \Gamma, \tag{18}$$

и пусть $u(x)<0$ в $D_1$, $u(x)>0$ в $D_2$. Функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}u = -f(x), \quad x \in D_1 \cup D_2 \tag{19}$$

и некоторым граничным условиям (2). Сначала рассмотрим случай, когда на $\Gamma$ выполняются условия сопряжения (3), (4) при $\varphi(x)=0$. Для сформулированной задачи (2)—(4), (18), (19) обобщенная формулировка с учетом результатов п. 1 приводит к уравнению

$$\mathcal{L}u + \delta_\Gamma(x)\psi(x) = -f(x), \quad x \in D. \tag{20}$$

Нетрудно убедиться, что с учетом (18)

$$\delta_\Gamma(x) = \delta(u)\frac{\partial u}{\partial n}, \tag{21}$$

принимая во внимание то, что на $\Gamma$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_2\right). \tag{22}$$

Для построения разностной схемы сквозного счета заменим $\partial u/\partial n$ с учетом (18) на $|\nabla u| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2}$, что вместо (20) дает уравнение

$$\mathcal{L}u + \delta(u)\psi(x)\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2} = -f(x),\ x\in D. \tag{23}$$

Разностная схема для задачи (12), (23) строится на основе аппроксимации $\delta(u)$. Например, с этой целью можно использовать [6, 7] функцию

$$\delta_\eta(u) = \begin{cases} 1/2\eta \text{ при } |u|<\eta, \\ 0 \text{ при } |u|>\eta. \end{cases}$$

Значительный интерес представляют задачи со свободной границей Г, на которой вместо (4) задано условие сопряжения следующего вида:

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2\right] = \theta(x),\ x\in\Gamma. \tag{24}$$

В качестве примеров прикладных задач отметим задачи о стационарном течении двухслойной идеальной жидкости [15] и краевые задачи МГД равновесия с поверхностным током [16]. Из (24) имеем

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_1^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_2^2 = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_1 - \right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_2\right)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_2\right).$$

С учетом (4), (21), (22) получаем, что условие (24) соответствует условию сопряжения (4) с

$$\psi(x) = \theta(x)/2a(x)\ \frac{\partial u}{\partial n},\quad x\in\Gamma.$$

Подстановка $\psi(x)$ в (23) дает следующее уравнение:

$$\mathcal{L}u + \theta(x)\delta(u)/2a(x) = -f(x),\ x\in D,$$

которое с граничными условиями (2) позволяет легко построить разностную схему сквозного счета для решения задачи со свободной границей (2), (3), (18), (19), (24), аппроксимируя $\delta(u)$, например, функцией $\delta_\eta(u)$. При приближенном решении однофазных задач со свободной границей этот подход комбинируется с методом фиктивных областей.

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Самарскому за постоянное внимание к работе.

## Литература

1. Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М., 1987.
2. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1983.
3. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные схемы для эллиптических уравнений. М., 1976.
4. Ляшко И. И., Демченко В. Ф. Обобщенные формулировки задач тепло- и массопереноса в слоистых средах. Киев, 1987. (Препринт / Ин-т кибернетики АН УССР: 14).
5. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М., 1977.
6. Самарский А. А., Моисеенко Б. Д. // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1965. Т. 5, № 5. С. 816—827.
7. Будак Б. М., Соловьева Е. Н., Успенский А. Б. // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1965. Т. 5, № 5. С. 828—840.
8. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М., 1976.

9. Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач со свободной границей. М., 1987.
10. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М., 1987.
11. Бугров А. Н., Коновалов А. Н., Крамаренко В. И. // Аэромеханика. 1976. С. 275—1282.
12. Вабищевич П. Н., Гассиев Р. В. // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1987. Т. 27, № 10. С. 1580—1584.
13. Руховец Л. А. // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 4. С. 698—701.
14. Копченов В. Д. // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1974. Т. 131. С. 119—127.
15. Киселев О. М. // Тр. сем. по краев. зад. Казань, 1970. Вып. 7. С. 135—141.
16. Вабищевич П. Н., Дегтярев Л. М., Пошехонов Ю. Ю. // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1980. Т. 20, № 2. С. 491—500.

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

*Поступила в редакцию 11 февраля 1988 г.*

*УДК 519.632*

П. Н. ВАБИЩЕВИЧ, С. И. ПУЛАТОВ

# ИНТЕГРО-ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Основные краевые задачи для эллиптических уравнений могут быть переформулированы в виде интегральных уравнений. Интегральная формулировка задач может быть очень удобной для численного решения [1]. Например, преимущества метода граничных интегральных уравнений особенно явны по сравнению с методом конечных элементов и разностными методами при решении внешних краевых задач. Недостатки такого подхода также хорошо известны и связаны в основном с узостью области применимости метода граничных интегральных уравнений и его вариантом, известным под названием «метод граничных элементов» [2, 3].

Численное решение интегральных уравнений математической физики проводится различными методами (см., например, [4, 5]). Отдельно отметим итерационные методы решения интегральных уравнений. Для решения задачи Дирихле такой подход рассматривался в [6]. Метод последовательных приближений для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода описан в [7]. В данной работе рассматривается интегро-итерационный метод решения основных краевых задач для уравнения Лапласа, который базируется на результатах [8], где указанный подход применяется для исследования однозначной разрешимости краевых задач. Основная цель работы состоит в доказательстве работоспособности такого вычислительного алгоритма при решении различных краевых задач. В отличие от традиционных методов решения интегральных уравнений он предъявляет минимальные требования к памяти, требует меньшей вычислительной работы.

**1. Задача Робена.** Всюду в дальнейшем под $D$ будем понимать ограниченную односвязную область на плоскости с ляпуновской границей $\partial D$. Задача Робена (основная задача электростатики) [8] состоит в определении гармонической функции $U(x)$, $x=(x_1, x_2)\in\overline{D}$, представимой потенциалом простого слоя

$$U(x)=\int\limits_{\partial D}\rho(y)\,G(x,\ y)\,dy,\quad x\in\overline{D},\tag{1}$$

при условии, что на границе выполнено условие

$$U(x)\equiv\text{const},\quad x\in\partial D.\tag{2}$$

Постоянная в (2) определяется из дополнительного условия

$$\int\limits_{\partial D}\rho(y)\,dy=M.\tag{3}$$