И. Л. Гуревич, Капиллярные волны на поверхности осесимметричной струи,
Тр. сем. по краев. задачам, 1991, выпуск 26, 103–109

И.Л.Гуревич

КАПИЛЛЯРНЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТРУИ

Капиллярные и гравитационно-капиллярные волны на поверхности плоских потоков исследовались многими авторами (см. [I]). В осесимметричном случае число строгих результатов весьма невелико (отметим работу [2]). В настоящей статье с помощью принципа сжатых отображений доказывается существование капиллярных периодических волн на поверхности осесимметричной струи.

Введем обозначения: x , r , ψ – координаты и функция тока в меридиональной плоскости струи; λ – длина волны; φ – потенциал скорости; ρ , C – плотность жидкости и константа Бернулли; V , θ , V^r, V^x – модуль, аргумент и проекции вектора скорости; k_1 – кривизна граничной линии тока в меридиональном сечении; $k_2=-\cos\theta/r$ – вторая главная кривизна свободной поверхности; σ – коэффициент поверхностного натяжения. Исходные уравнения для осесимметричных течений имеют вид

$$V^x=\frac{1}{r}\psi_r=\varphi_x\ ,\quad V^r=-\frac{1}{r}\psi_x=\varphi_r\ . \tag{I}$$

Поскольку область в плоскости (x , r), отвечающая одному периоду течения, неизвестна, перейдем к искомой функции φ (x , ψ) в прямоугольнике $0<x<\lambda$, $0<\psi<\psi_0$. Справедливы граничные условия $\varphi(0,\psi)=0$, $\varphi(\lambda,\psi)=0$, $\varphi_\psi(x,0)=0$ и соотношения

$$V^r=r\varphi_\psi\varphi_x/(1+r^2\varphi_\psi^2)\ ,\quad V^x=\varphi_x/(1+r^2\varphi_\psi^2)\ , \tag{2}$$

$$r_\psi=r\varphi_\psi^2/\varphi_x+1/(r\varphi_x)\ , \tag{3}$$

$$\varphi_{\psi\psi}-2\varphi_{x\psi}\varphi_\psi/\varphi_x+\varphi_{xx}(1+r^2\varphi_\psi^2)/(r^2\varphi_x^2)+2\varphi_\psi/(r^2\varphi_x)=0. \tag{4}$$

При фиксированном x равенство (3) есть дифференциальное уравнение Бернулли относительно $r(x,\psi)$ с начальным условием $r(x,0)=0$, то есть

$$r=\left[2\int_0^\psi exp\left(-2\int_0^\psi\frac{\varphi_\psi^2}{\varphi_x}d\psi\right)\frac{d\psi}{\varphi_x}\right]^{1/2}. \tag{5}$$

При $\psi=\psi_0$ имеем условие равновесия элемента свободной границы [2]

$$\sigma(k_1+k_2)=2C+\rho V^2\ . \tag{6}$$

Учитывая (I) – (3) и то, что $\theta = 0$ при $z = 0$, λ, получим

$$k_1 = r(\varphi_{z\varphi} + \varphi_\varphi^2)(1 + r^2\varphi_\varphi^2)^{-3/2}, \quad k_2 = -r^{-1}(1 + r^2\varphi_\varphi^2)^{1/2}, \quad \int_0^1 k_1\, dz = 0 \quad . \tag{7}$$

Перейдем к безразмерным величинам ξ, η, $W(\xi,\eta), R(\xi,\eta)$ по формулам $z = \lambda\xi$, $\psi = \varphi_0 \lambda \eta^2/2$, $r = \lambda\eta R$, $\varphi = \varphi_0(\xi + W)$. Тогда из (4), (5) имеем при $0 < \xi < 1$, $0 < \eta < H = \sqrt{2\psi_0/(\varphi_0\lambda)}$ (в области $\mathcal{D}$):

$$W_{\eta\eta} - W_{\xi\eta}\frac{W_\eta}{1 + W_\xi} + W_{\xi\xi}\frac{1 + R^2W_\eta^2}{R^2(1 + W_\xi)^2} + \frac{W_\eta[2 - R^2(1 + W_\xi)]}{\eta R^2(1 + W_\xi)} = 0, \tag{8}$$

$$R = \frac{1}{\eta}\left[2\int_0^\eta \exp\left(-\int_0^\eta \frac{W_\eta^2}{\eta(1 + W_\xi)}\,d\eta\right)\frac{\eta\, d\eta}{1 + W_\xi}\right]^{1/2} . \tag{9}$$

На границе

$$W(0,\eta) = W(1,\eta) = W_\eta(\xi, 0) = 0 \quad , \tag{10}$$

что вместе с уравнением (8) дает

$$W_{\xi\xi}(0,\eta) = W_{\xi\xi}(1,\eta) = 0 \quad , \tag{11}$$

а при $\eta = H$ (на отрезке Γ) в силу (6)

$$\frac{R(W_{\xi\eta}/2 + W_\eta^2/H)}{(1 + R^2W_\eta^2)^{3/2}} - \frac{1}{HR(1 + R^2W_\eta^2)^{1/2}} = \alpha + \frac{\beta}{2}\,\frac{(1 + W_\xi)^2}{1 + R^2W_\eta^2}, \tag{12}$$

где $\alpha = 2C\lambda/\sigma$, $\beta = 2\rho\varphi_0^2/(\lambda\sigma)$. Из (12) и последнего равенства в (7)

$$\alpha = -\int_0^1 \frac{d\xi}{HR(1 + R^2W_\eta^2)^{1/2}} - \frac{\beta}{2}\int_0^1 \frac{(1 + W_\xi)^2}{1 + R^2W_\eta^2}\,d\xi \tag{13}$$

(здесь R, W_ξ, W_η взяты при $\eta = H$).

Нелинейная краевая задача (8) – (13) допускает при любом β тривиальное решение $W = 0$, $R = 1$, $\alpha = -1/H - \beta/2$. Цель работы – доказать существование при некоторых $\beta > 0$ нетривиальных малых решений.

Выделим в (8), (9), (11), (12) члены, линейные относительно W и ее производных

$$L(W) = \Phi(W) \quad \text{в} \quad \mathcal{D} \quad , \tag{14}$$

$$T(W) - \beta\, W_\xi[1 + F_1(W)] = F_2(W) \quad \text{на} \quad \Gamma \quad , \tag{15}$$

где $L(W) = W_{\xi\xi} + W_{\eta\eta} + W_\eta/\eta$ – оператор Лапласа для осесимметричной функции W,

$$T(W) = W_{\xi\eta}/2 - H^{-3}\int_0^H \eta\, W_\xi\, d\eta \ ,$$

а Φ , F_1 , F_2 – нелинейные интегродифференциальные операторы, включающие производные второго порядка; соответствующие аналитические выражения не будем выписывать ввиду их сложности, ограничившись описанием свойств этих операторов.

Введем банаховы пространства $E_1 = C_\nu(\Gamma)$, $E_2 = C_\nu(\bar{\mathcal{D}})$ гёльдеровых с показателем ν функций соответственно на Γ и в $\bar{\mathcal{D}}$; нормы в них обозначим $\| u \|_1$, $\| u \|_2$. Пусть E_3 состоит из функций $u(\xi)$ с конечной нормой $\| u \|_3 = \| u\|_1 + \| u_\xi \|_1 + \| u_{\xi\xi} \|_1$, E_4 – из функций $u(\xi,\eta)$ с нормой $\| u \|_4 = \| u\|_2 + \| u_\xi\|_2 + \| u_\eta\|_2 + \| u_\eta/\eta \|_2 + \| u_{\xi\xi} \|_2 + \| u_{\xi\eta}\|_2 + \| u_{\eta\eta}\|_2$. Пусть функции из $E_{1,2}$, равные нулю при $\xi = 0$ и $\xi = 1$, образуют подпространства $E^0_{1,2}$, а функции из E_4 , удовлетворяющие (I0), (II), – подпространство E^0_4 . Приведем без доказательства следующее утверждение:

<u>Лемма I</u>. Пусть W , W_1 , $W_2 \in E^0_4$, $\|W\|_4 < M < 1$, $\| W_{1,2} \|_4 < M$, $\|W_1 - W_2 \|_4 < \delta$. Тогда $\Phi(W) \in E^0_2$, $F_{1,2} \in E_1$, и верны оценки $\| \Phi(W)\|_2 < N_1 M^2$, $\| F_{1,2}(W)\|_1 < N_2 M^2$, $\| \Phi(W_1) - \Phi(W_2)\|_2 < N_3 M\delta$, $\| F_{1,2}(W_1) - F_{1,2}(W_2)\|_1 < N_4 M\delta$ (здесь и ниже N_k – известные положительные числа, зависящие лишь от ν и H).

Будем искать W в виде суммы функций u , $v \in E^0_4$, таких, что

$$L(u) = \Phi(u+v) \quad \text{в } \mathcal{D}, \quad u = 0 \quad \text{на } \Gamma \ , \qquad \text{(I6)}$$

$$L(v) = 0 \quad \text{в } \mathcal{D} \ , \quad T(v) - \beta v_\xi [1 + F_1(u+v)] = F_2(u+v) - T(u) \quad \text{на } \Gamma \qquad \text{(I7)}$$

Исследуем сначала две вспомогательные краевые задачи.

<u>Лемма 2.</u> Пусть $g(\xi) \in E^0_1$, $f(\xi,\eta) \in E^0_2$, а $\varphi(\xi,\eta) \in E^0_4$ – решение линейной краевой задачи $L(\varphi) = f$, $\varphi/_\Gamma = g$. Тогда

$$\varphi = A_1(f) + A_2(g) \ , \qquad \text{(I8)}$$

$$A_1(f) = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{nk}}{\lambda_{nk}} \iint_{\mathcal{D}} \eta f \varphi_{nk}\, d\xi\, d\eta \Big/ \iint_{\mathcal{D}} \eta\, \varphi^2_{nk}\, d\xi\, d\eta , \qquad \text{(I9)}$$

$$A_2(g) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{I_0(2\pi n H)} \int_0^1 g \sin 2\pi n\xi\, d\xi \ , \qquad \text{(20)}$$

где $\lambda_{nk} = (2\pi n)^2 + (\mu_k/H)^2$, $\varphi_{nk} = \sin 2\pi n\xi\, J_0(\mu_k \eta/H)$, $\varphi_n = \sin 2\pi n\xi\, I_0(2\pi n\eta)$,

I_0 и J_0 (а ниже и I_1) – функции Бесселя, μ_k – корни $J_0(t)$. Кроме того, имеют место оценки

$$\|\varphi\|_4 \le N_5 \|f\|_2 + N_6 \|g\|_1 . \tag{21}$$

Формулы (19), (20) выводятся достаточно стандартным путем с использованием собственных функций краевой задачи $L(\varphi)+\lambda\varphi=0$, $\varphi|_\Gamma=0$. Для доказательства (21) воспользуемся известными оценками Шаудера для решений равномерно эллиптических уравнений [3]. Уравнение $L(\varphi)=f$ вырождается при $\eta=0$, и непосредственно эти оценки неприменимы.

Рассмотрим прямоугольник $\mathcal{D}$ как половину меридионального сечения цилиндра Λ ($\eta=x^2+y^2<H$, $0<\xi<1$) в прямоугольной системе координат (x, y, ξ). Пусть ψ (x, y, ξ) – осесимметричное решение в Λ уравнения Пуассона $\psi_{xx}+\psi_{yy}+\psi_{\xi\xi}=f(\xi,\eta)$, удовлетворяющее граничным условиям $\psi(x,y,0)=\psi(x,y,1)=0$, $\psi=g(\xi)$ при $\eta=H$. Очевидно, $\psi(x,y,\xi)=\varphi(\xi,\eta)$.

Сначала оценим сверху $max|\psi|$ с помощью неравенства (I.9) на с. 147 [3]. Но применить затем основную оценку Шаудера (I.II) [3] нельзя, так как граница Λ негладкая, поэтому продолжим f, g, ψ нечетным образом с сохранением гладкости через оба основания цилиндра Λ в цилиндр Λ_1 ($\eta<H$, $-1<\xi<2$). Затем применим неравенство (I.13) [3], в котором положим: $\alpha=\nu$; $\ell=2$; $\Omega=\Lambda_1$; S – поверхность Λ_1; S_1 – часть S, где $\xi<-1/2$ или $\xi>3/2$; ζ – достаточно гладкая функция, $\zeta=0$ при $\xi<-1/4$ и при $\xi>5/4$, $\zeta=1$ при $-1/8<\xi<9/8$. В результате получим (21). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь нелинейную задачу нахождения параметра β и функции $\varphi\in \overset{0}{E}_4$, удовлетворяющей уравнению $L(\varphi)=0$ и краевому условию $T(\varphi)-\beta[\varphi_\xi+p(\xi)]=q(\xi)$ на Γ при заданных функциях p, $q\in E_1$ и параметре ε,

$$\varepsilon=b_1 , \quad b_n=2\int_0^1 \varphi(\xi,H)\, \sin 2\pi n\xi \, d\xi . \tag{22}$$

Пусть неизвестная функция разложена в ряд Фурье:

$$g(\xi)=\varphi(\xi,H)=b_1 \sin 2\pi\xi+\mu(\xi), \quad \mu(\xi)=\sum_{n=2}^{\infty} b_n \sin 2\pi n\xi . \tag{23}$$

Тогда в силу (20) и известных соотношений между I_0 и I_1

$$\varphi = A_2(q) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n I_0^{-1}(2\pi n H),\ T(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n h_n X(2\pi n H)\cos 2\pi n \xi ,$$

где $h_n = 2(\pi n)^2 - H^{-2},\ X(t) = I_1(t) I_0^{-1}(t)$. Из краевого условия имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n [\, h_n X(2\pi n H) - 2\pi n \beta\,] \cos 2\pi n \xi = \beta p + q \ . \tag{24}$$

Из (22) - (24) вытекает:

$$\beta = \frac{1}{\pi}\left[\frac{h_1}{2} X(2\pi H) - \varepsilon \int_0^1 \frac{q}{\varepsilon^2}\cos 2\pi\xi\, d\xi\right]\left(1 + \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^1 \frac{p}{\varepsilon^2}\cos 2\pi\xi\, d\xi\right)^{-1}, \tag{25}$$

$$b_n = \frac{2\varepsilon^2 \int_0^1 \left(\beta \frac{p}{\varepsilon^2} + \frac{q}{\varepsilon^2}\right)\cos 2\pi n\xi\, d\xi}{h_n X(2\pi n H) - n h_1 X(2\pi H) + \varepsilon n \int_0^1 \left(\beta\frac{p}{\varepsilon^2} + \frac{q}{\varepsilon^2}\right)\cos 2\pi\xi\, d\xi} , \tag{26}$$

где $n > 1$. Итак, построен нелинейный оператор

$$\mu(\xi) = \varepsilon^2 A_3(p, q) \ . \tag{27}$$

<u>Лемма 3</u>. Пусть $\| p_{1,2} \|_1 < \varepsilon^2 M$, $\| q_{1,2} \|_1 < \varepsilon^2 M$, $\| p_1 - p_2 \|_1 < \varepsilon^2 \delta$, $\| q_1 - q_2 \|_1 < \varepsilon^2 \delta$, и выполняется условие $m = H - (\pi\sqrt{2})^{-1} > 0$. Тогда существует такое $N_7 > 0$, что при $|\varepsilon| M < N_7$ выполняются неравенства

$$\| A_3(p_{1,2}, q_{1,2}) \|_3 < N_8 M \ , \ \| A_3(p_1, q_1) - A_3(p_2, q_2) \|_3 \le N_9 \delta \ , \tag{28}$$

где $N_k = N_k(\nu, m)$ при $k \geqslant 7$.

Сначала докажем, что при $m > 0$ и достаточно малых $|\varepsilon|$ знаменатель в (26) положителен и возрастает как n^2 . Из известных свойств $I_0(t)$, $I_1(t)$ ([4], гл. УП, § 3; [5], 8.45I) можно получить, что $I_{0,1} > 0$, $I'_{01} > 0$, $X(t)$ обращается в 0 при $t = 0$ и в 1 при $t = +\infty$ и удовлетворяет уравнению $X'' + X'(t^{-1} + 2X) - X t^{-2} I_0^{-1} = 0$. Отсюда вытекает возрастание $X(t)$, а значит, положительность (при $t > \sqrt{2}$) и возрастание функции $(t - 2/t) X(t)$. Взяв $t = 2\pi n H$, получим положительность и возрастание знаменателя в (26) при $|\varepsilon| M < N_7$.

Далее, из той же асимптотики 8.45I [5] имеем $X(t) = 1 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \ldots$ при $t \to \infty$. В итоге получим при $n > 1$:

$$b_n = \varepsilon^2 \int_0^1 \left[\left(\frac{d_1}{n^2} + \frac{d_2}{n^3} + \frac{d_3}{n^4}\right) A_4(p, q) + G_n(p, q)\right] \cos 2\pi n \xi\, d\xi \ , \tag{29}$$

$$\| A_4(p_{1,2}, q_{1,2})\|_1 < N_{10} M, \quad \| A_4(p_1,q_1) - A_4(p_2,q_2)\|_1 < N_{11}\delta,$$
$$\| G_n(p_{1,2}, q_{1,2})\|_1 < N_{12} M n^{-5}, \quad \| G_n(p_1,q_1) - G_n(p_2,q_2)\|_1 < N_{13}\delta n^{-5}. \tag{30}$$

Подставим (29) в (23), учтем (27) и найдем μ'', используя формулы I.44I и I.443 [5]:

$$\mu''(t) = 4\pi^2\varepsilon^2 \Big\{ \int_0^1 \Big[(d_1+d_2+d_3)\sin 2\pi t \cos 2\pi\xi + d_2\pi(t-1/2) - \tag{31}$$
$$- d_3 4^{-1} \int_0^1 \ln 4 \,|\cos 2\pi\xi - \cos 2\pi t|\, dt \Big] A_4\, d\xi +$$
$$+ \frac{d_1}{4}\int_0^1 \frac{\sin 2\pi t}{\cos 2\pi\xi - \cos 2\pi t} A_4\, d\xi - \sum_{n=2}^{\infty} \sin 2\pi n t \int_0^1 n^2 G_n \cos 2\pi n\xi\, d\xi \Big\}.$$

Второй интеграл есть сингулярный оператор Гильберта от A_4, непрерывный в E_1. У остальных слагаемых нетрудно оценить производные.

Используя (28) - (3I), теперь уже легко доказать справедливость леммы.

Теорема. Если $m = H - (\pi\sqrt{2})^{-1} > 0$ и ε (первый коэффициент Фурье функции $W(\xi, H)$) достаточно мал, то исходная краевая задача (8) - (I3) имеет нетривиальные решения.

Эта задача равносильна системе задач (I6), (I7), которую сведем к операторному уравнению. Пусть Q – такое множество элементов $x = (u(\xi,\eta), \mu(\xi))$ пространства $E = E_4^0 \times E_3^0$ с нормой $\|x\| = max(\|u\|_4, \|\mu\|_3)$, что $\|x\| < |\varepsilon|$ при $x \in Q$. Введем преобразование $\bar{x} = \mathcal{A}(x)$ при $x \in Q$ следующим образом: находим $g = \varepsilon \sin 2\pi\xi + \mu$, $v = \mathcal{A}_2(g)$ из (20), $\Phi(u+v)$, $F_{1,2}(u+v)$, $\bar{u} = \mathcal{A}_1(\Phi)$ из (I9), $T(\bar{u})$, $p = F_1$, $q = F_2 - T$, $\bar{\mu} = \varepsilon^2 \mathcal{A}_3(p,q)$. Легко видеть, что $\bar{x} \in E$. Используя леммы I - 3, будем иметь $\|\bar{x}\| < N_{15}\varepsilon^2$. Аналогично можно получить $\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| < N_{16}|\varepsilon|\delta$, если $\|x_{1,2}\| < |\varepsilon|$, $\|x_1 - x_2\| < \delta$.

Итак, при $|\varepsilon| < \varepsilon_0 = min(1/N_{15}, 1/N_{16})$ к оператору $\mathcal{A}(x)$ можно применять в Q принцип сжатых отображений, и уравнение $x = \mathcal{A}(x)$ в Q однозначно разрешимо. Его решению отвечает нетривиальное решение задачи (8) - (I3).

Необходимо отметить, что естественное условие $\beta > 0$ будет выполняться (в силу (25)) лишь при дополнительном ограничении $|\varepsilon| < \mathcal{E}_1$, где $\mathcal{E}_1$, как и $\mathcal{E}_0$, зависит от ν и m ($m > 0$).

В заключение дадим уравнение свободной границы с точностью до членов I-го порядка по ε:

$$r = \lambda\left(H - 2\pi\varepsilon X(2\pi H)\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

Литература

1. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М., 1977. – 815 с.

2. Щербаков В. А. Вариационный метод в задаче об осесимметричном кавитационном течении с учетом сил поверхностного натяжения // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1979. – Вып.40. – С. 99 – 113.

3. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения Эллиптического типа. М., 1973. – 576 с.

4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1973. – 736 с.

5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962. – 1100 с.

6. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., 1965. – Т. I. – 615 с.

Доложено на семинаре 3 июня 1988 г.

И.Л.Гуревич, В.П.Житников

ОБТЕКАНИЕ ВЕСОМОЙ ГИБКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЛОСКИМ ПОТОКОМ

В [1] доказана разрешимость плоской задачи обтекания несжимаемой идеальной жидкостью замкнутой гибкой невесомой оболочки при $-\frac{\pi}{2} < \varkappa \leq \frac{\pi}{2}$, где $\varkappa$ – безразмерная кривизна в критической точке. В [2] получено численное решение этой задачи. Ниже аналогичные исследования проводятся в случае весомой оболочки.

В плоскости $z = x + iy$ рассматривается течение с вектором скорости $(v_0, 0)$ в бесконечно удаленной точке A, ограниченное снизу отрезками AB и $B'A$ оси x и гибкой оболочкой (гладкой симметричной относительно оси y кривой BCB', где $x(C)=$