В. А. Баранский, Об алгебраических системах, элементарная теория которых совместима с произвольной группой, *Алгебра и логика*, 1983, том 22, номер 6, 599–607

Алгебра и логика, 22, № 6 (1983), 599-607

УДК 512.5

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ КОТОРЫХ СОВМЕСТИМА С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГРУППОЙ

В. А. БАРАНСКИЙ

Под *производными структурами* алгебраической системы $\mathcal{A}$ мы понимаем группу всех автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, решетку всех подалгебр $\mathrm{Sub}(\mathcal{A})$, решетку всех конгруэнций $\mathrm{Con}(\mathcal{A})$, многообразие $\mathrm{Var}(\mathcal{A})$, порожденное $\mathcal{A}$, и т.п. Одним из важных направлений теории алгебраических систем является изучение проблемы независимости пар производных структур для различных классов алгебраических систем. Пусть Φ_1 и Φ_2 – два типа производных структур, а K – некоторый класс алгебраических систем. Будем говорить, что *пара производных структур* Φ_1, Φ_2 *независима в классе* K, если для любых нетривиальных $\mathcal{A},\mathcal{B}\in K$ существует $C\in K$ такое, что $\Phi_1(\mathcal{A})\cong\Phi_1(C)$ и $\Phi_2(\mathcal{B})\cong\Phi_2(C)$. Обзор результатов о независимости некоторых пар производных структур в ряде основных классов алгебраических систем см. в [1]. В [1], в частности, было анонсировано, что пара Aut, Var независима в классе всех решеток (конечно, если в определении независимости пары Φ_1, Φ_2 в классе K в качестве Φ_2 рассматривается Var, то второй из изоморфизмов, фигурирующих в определении, нужно заменить на равенство). Это утверждение можно сформулировать еще в следующей эквивалентной форме:

Пусть G – произвольная группа и S – нетривиальная решетка. Тогда существует решетка L, эквационально эквивалентная S, такая что $G\cong\mathrm{Aut}(L)$.

В связи с этой теоремой возникает вопрос: насколько независимы язык автоморфизмов и язык первого порядка для алгебраических систем? Для более точной формулировки этого вопроса дадим следующие определения. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебраическая система сигнатуры σ , G – некоторая группа и K – некоторый класс алгебраических систем сигнатуры σ . Будем говорить, что элементарная теория алгебраической системы $\mathcal{A}$ совместима с группой G в классе K, если существует алгебраическая система $\mathcal{B} \in K$, элементарно эквивалентная $\mathcal{A}$, такая что $G \cong Aut(\mathcal{B})$. Слова "в классе K " будем опускать, если в качестве K рассматривается класс всех алгебраических систем сигнатуры σ . Через $Aut(\mathcal{A}, \mathfrak{Th})$ будем обозначать класс всех групп G , таких что элементарная теория алгебраической системы $\mathcal{A}$ совместима с G . Известная теорема Эренфойхта-Мостовского (см., например, [2, с. 111]) говорит о том, что класс $Aut(\mathcal{A}, \mathfrak{Th})$ весьма обширен для любой бесконечной алгебраической системы $\mathcal{A}$. Было бы интересно изучить классы групп, представимых в виде $Aut(\mathcal{A}, \mathfrak{Th})$ для подходящих алгебраических систем $\mathcal{A}$ и, в частности, дать ответ на вопрос :

Существуют ли алгебраические системы $\mathcal{A}$, для которых класс $Aut(\mathcal{A}, \mathfrak{Th})$ совпадает с классом всех групп?

Основными результатами работы являются следующие теоремы, которые говорят об относительной независимости языка автоморфизмов и языка первого порядка, а также отвечают на только что сформулированный вопрос.

ТЕОРЕМА 1. Существуют обыкновенные связные графы, элементарная теория которых совместима с любой группой в классе всех обыкновенных связных графов.

ТЕОРЕМА 2. Существуют дистрибутивные алгебраические решетки, элементарная теория которых совместима с любой группой в классе всех алгебраических решеток.

Определение алгебраической решетки см., например, в [3].

Легко видеть, что аналоги этих теорем несправедливы для языка второго порядка.

Прежде чем переходить к доказательству теорем, напомним ряд необходимых определений.

Под обыкновенным графом мы понимаем симметрический граф без петель и кратных ребер. Пусть x – вершина обыкновенного графа Γ . Через $deg\, x$ будем обозначать степень вершины x , т. е. число вершин, смежных с вершиной x в графе Γ . Будем говорить, что вершина x смежна почти со всеми вершинами множества $X \subseteq \Gamma$, если она смежна с каждой вершиной из X , за исключением, быть может, конечного числа вершин из X. А н т и к л и к о й графа Γ будем называть произвольное подмножество вершин из Γ , состоящее из попарно несмежных вершин. Граф Ω будем называть п о д г р а ф о м графа Γ , если $\Omega \subseteq \Gamma$ и любые две вершины из Ω смежны в Ω тогда и только тогда, когда они смежны в Γ .

Перейдем к доказательству теорем.

Пусть G – произвольная группа. Хорошо известно, что существует обыкновенный связный граф Γ несчетной мощности k такой, что $G \cong \cong \mathrm{Aut}(\Gamma)$ (см., например, [1]). Пусть Ω – обыкновенный связный граф мощности k , такой что $|\mathrm{Aut}(\Omega)| = 1$.

Построим обыкновенный связный граф Γ' . Определим его на множестве $\{a, b\} \cup \Gamma \cup \Omega$, где $a, b \notin \Gamma \cup \Omega$, $a \neq b$ и $\Gamma \cap \Omega = \varnothing$. Зададим отношение смежности σ на указанном множестве, полагая

1) $a \sigma b$,

2) $b \sigma x$ для любого $x \in \Omega$,

3) $x \sigma y$ для любых $x \in \Omega$ и $y \in \Gamma$,

4) $u \sigma v$ для любых u, v таких, что $v \sigma u$ выполняется в силу одного из условий 1)–3), и сохраняя отношение σ , которое имелось на множествах Γ и Ω .

Ясно, что полученный граф Γ' является обыкновенным связным графом мощности k , причем $\deg a = 1$ и $\deg x = k$ для любой вершины $x \in \in \Gamma' \setminus \{a\}$. Используя тот факт, что при любом автоморфизме графа Γ' вершины из $\{a, b\} \cup \Omega$ неподвижны, получаем $G \cong \mathrm{Aut}(\Gamma')$.

Построим теперь обыкновенный связный граф Γ'' . Граф Γ'' получается из графа Γ' добавлением для каждой пары $\{u, v\}$ смежных вершин из Γ' новой вершины w и заменой ребра $\{u, v\}$ на два новых ребра $\{u, w\}$ и $\{w, v\}$. Ясно, что Γ'' является обыкновенным связным графом мощности k , в Γ'' нет треугольников (т. е. трех попарно смежных вершин), $G \cong \mathrm{Aut}(\Gamma'')$ и для любой вершины $x \in \Gamma''$ выполняется либо $\deg x = 1$, либо $\deg x = 2$, либо $\deg x = k$.

Теперь мы индуктивно построим множества $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$, где $A_i \cap A_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$, и обыкновенный связный граф $Gr(\Gamma)$ на множестве $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$.

Положим $A_0 = \Gamma''$ и сохраним на A_0 отношение смежности графа Γ''.

Пусть семейство множеств $A_0, \ldots, A_{n-1}$ и отношение смежности на $A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}$ уже построены, где $n > 0$. Через A_n обозначим множество всех подмножеств $x \subsetneq A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}$ таких, что выполняется $|A_0 \cap x| = n+2$ и $(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \setminus x$ является конечным множеством. Определим отношение смежности σ на множестве $A_0 \cup \ldots \cup A_n$, сохраняя отношение смежности на $A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}$ и полагая $y\sigma x$, $x\sigma y$ для любых $y \in A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}$ и $x \in A_n$ тогда и только тогда, когда $y \in x$.

Отношение смежности на графе $Gr(\Gamma)$ будем считать равным объединению всех отношений смежности на графах $A_0 \cup \ldots \cup A_n$, где n пробегает множество всех натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Ясно, что граф $Gr(\Gamma)$ обладает следующими свойствами:

1) $|A_n| = k$ для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2) Для любого $n \in \mathbb{N}$ каждый автоморфизм графа $A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}$ индуцирует естественным образом автоморфизм графа $A_0 \cup \ldots \cup A_n$.

3) Для любых $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таких, что $n < m$, каждый элемент из A_n смежен с k элементами из A_m.

4) Для любого $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ каждый элемент из A_n смежен почти со всеми элементами из $A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}$.

Из свойств 3) и 4) вытекает следующее свойство:

5) Для любого $n \in \mathbb{N}$ множество A_n является максимальной антикликой графа $Gr(\Gamma)$.

Пусть x – произвольный элемент из A_n, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Обозначим через B множество всех вершин, смежных с x в графе $Gr(\Gamma)$. Определим разбиение множества B:

$$B = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_m \cup \ldots,$$

полагая $B_m = B \cap A_m$ для любого $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, если $n = 0$, и $B_i = B \cap A_i$, $B_j = B \cap A_{j+1}$ для любых $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ и $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, \ldots, n-1\}$, если $n \neq 0$.

Справедлива следующая

ЛЕММА 1. 1) Если $n = 0$, то либо $|B_0| = 1$, либо $|B_0| = 2$, либо $|B_0| = k$.

2) Если $n > 0$, то $|B_0| = n+2$.

3) $|B_m| = k$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

4) Для любых $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таких, что $i < j$, каждый элемент из B_i смежен с k элементами из B_j.

5) Для любого $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ каждый элемент из

B_m смежен почти со всеми элементами из $B_1 \cup \ldots \cup B_{m-1}$.

6) Для любого $m \in \mathbb{N}$ множество B_m является максимальной антикликой в B.

7) Если $n = 0$, то B_0 является антикликой в B.

ЛЕММА 2. Пусть $|B_0| \neq k$ и $B = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_m \cup \ldots$ – такое разбиение множества B, что

1) либо множество C_0 конечно и непусто, либо множество C_0 является антикликой мощности k в B;

2) для любого $m \in \mathbb{N}$ множество C_m является максимальной антикликой мощности k в B;

3) для любых $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таких, что $i < j$, каждый элемент из C_i смежен с k элементами из C_j.

Тогда $B_0 = C_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что существует последовательность $i_1, i_2, \ldots, i_m, \ldots$ попарно различных чисел из $\mathbb{N} \cup \{0\}$ таких, что для любого $m \in \mathbb{N}$ выполняется условие

($*$) либо $i_m \neq 0$ и $C_{i_m} = B_m$, либо $i_m = 0$, $C_0 \subseteq B_m$ и $B_m \setminus C_0$ не более чем счетно.

Пусть числа $i_1, \ldots, i_{m-1}$ с указанными свойствами уже построены. Построим число i_m, где $m \in \mathbb{N}$.

Ясно, что $B_m = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} (B_m \cap C_i)$. Поскольку множество B_m несчетно, то существует $i_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такое, что $B_m \cap C_{i_m}$ несчетно. Ясно, что $i_m \notin \{i_1, \ldots, i_{m-1}\}$, так как $B_m \cap \bigcup\limits_{i=1}^{m-1} B_i = \emptyset$. Очевидно, C_{i_m} несчетно, откуда в силу условий леммы C_{i_m} является антикликой мощности k в B.

Пусть $C_{i_m} \cap \bigcup\limits_{i=m+1}^{\infty} B_i \neq \emptyset$. Возьмем $y \in C_{i_m} \cap \bigcup\limits_{i=m+1}^{\infty} B_i$. Тогда в силу утверждения 5) леммы 1 элемент y смежен почти со всеми элементами из B_m, следовательно, y смежен почти со всеми элементами из $B_m \cap C_{i_m}$, что невозможно, так как C_{i_m} является антикликой.

Таким образом, $C_{i_m} \subseteq B_0 \cup \ldots \cup B_m$.

Покажем теперь, что $B_m \setminus C_{i_m}$ не более чем счетно.

Пусть множество $B_m \setminus C_{i_m}$ несчетно. Тогда, используя равенство

$$B_m \setminus C_{i_m} = \bigcup_{j=0}^{\infty} (B_m \setminus C_{i_m}) \cap C_j$$

и рассуждая, как раньше, найдем такое $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что $(B_m \setminus C_{i_m}) \cap$ $\cap C_j$ несчетно и $C_j \subseteq B_0 \cup \ldots \cup B_m$. Ясно, что $j \notin \{i_1, \ldots$ $\ldots, i_m\}$ и, в силу условия $(*)$, множество $(B_0 \cup \ldots \cup B_{m-1}) \setminus (C_{i_1} \cup \ldots$ $\ldots \cup C_{i_{m-1}})$ не более чем счетно. Тогда в силу условия 3) леммы найдется пара смежных вершин, одна из которых лежит в $B_m \cap C_{i_m}$, другая – в $(B_m \setminus C_{i_m}) \cap C_j$, что невозможно, так как B_m является антикликой.

Таким образом, $B_m \setminus C_{i_m}$ не более чем счетно.

Пусть $C_{i_m} \cap (B_0 \cup \ldots \cup B_{m-1}) \neq \emptyset$. Возьмем $y \in C_{i_m} \cap (B_0 \cup \ldots \cup B_{m-1})$. В силу утверждения 4) леммы 1 элемент y смежен с k вершинами из B_m. Ясно, что все эти k элементов лежат в $B_m \setminus C_{i_m}$, так как C_{i_m} является антикликой. Следовательно, $B_m \setminus C_{i_m}$ несчетно, что невозможно.

Таким образом, $C_{i_m} \cap (B_0 \cup \ldots \cup B_{m-1}) = \emptyset$, т. е. $C_{i_m} \subseteq B_m$.

Если $i_m \neq 0$, то в силу максимальности антиклики C_{i_m} в B имеем $C_{i_m} = B_m$. Если $i_m = 0$, то $C_0 \subseteq B_m$ и $B_m \setminus C_0$ не более чем счетно.

Таким образом, для m выполняется условие $(*)$.

Итак, пусть $i_1, \ldots, i_m, \ldots$ – последовательность попарно различных чисел из $\mathbb{N} \cup \{0\}$, удовлетворяющая условию $(*)$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

Возможны два случая:

1) Существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $i_m = 0$.

Тогда в силу равенства $B_1 \cup \ldots \cup B_{m-1} \cup B_{m+1} \cup \ldots = C_{i_1} \cup \ldots$ $\ldots \cup C_{i_{m-1}} \cup C_{i_{m+1}} \cup \ldots$ получаем $B_0 \cup (B_m \setminus C_0) = \bigcup \{C_j \mid j \in \mathbb{N} \setminus$ $\setminus \{i_1, i_2, \ldots\}\}$, что невозможно, так как множество $B_0 \cup (B_m \setminus$ $\setminus C_0)$ есть непустое, не более чем счетное множество, а множество $\bigcup \{C_j \mid$ $j \in \mathbb{N} \setminus \{i_1, i_2, \ldots\}\}$ пусто или несчетно.

2) Для любого $m \in \mathbb{N}$ выполняется $i_m \neq 0$.

Тогда имеем $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_{i_m}$, откуда $B_0 = C_0 \cup \bigcup \{C_j \mid j \in \mathbb{N} \setminus$ $\setminus \{i_1, i_2, \ldots\}\}$. Так как множество B_0 конечно, отсюда $\mathbb{N} = \{i_1,$ $i_2, \ldots\}$, т. е. $B_0 = C_0$.

Лемма 2 доказана.

Из лемм 1 и 2 вытекает

ЛЕММА 3. Пусть Φ – автоморфизм графа $Gr(\Gamma)$. Тогда $\Phi(A_n) = A_n$ для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ЛЕММА 4. Каждый автоморфизм графа $Gr(\Gamma)$

индуцируется единственным автоморфизмом графа Γ'', и, обратно, каждый автоморфизм графа Γ'' индуцирует автоморфизм графа $Gr(\Gamma)$. Следовательно, $G \cong Aut(Gr(\Gamma))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Φ – автоморфизм графа $Gr(\Gamma)$. В силу леммы 3, имеем $\Phi(A_0) = A_0$. Через φ обозначим ограничение $\Phi \restriction A_0$ автоморфизма Φ на A_0. Ясно, что $\varphi \in Aut(\Gamma'')$. В силу леммы 3 и определения графа $Gr(\Gamma)$, отображение φ индуцирует $\Phi \restriction A_0 \cup A_1$, отображение $\Phi \restriction A_0 \cup A_1$ индуцирует $\Phi \restriction A_0 \cup A_1 \cup A_2$ и т. д. Следовательно, автоморфизм φ индуцирует Φ.

Обратное утверждение леммы очевидно.

ЛЕММА 5. Пусть X_1, X_2 – такие конечные подмножества графа $Gr(\Gamma)$, что $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Тогда существует элемент $x \in Gr(\Gamma) \setminus (X_1 \cup X_2)$ такой, что x смежен с каждым элементом из X_1 и не смежен с каждым элементом из X_2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу конечности $X_1 \cup X_2$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $X_1 \cup X_2 \subseteq A_0 \cup \ldots \cup A_m$. Возьмем такие $Y \subseteq A_0$ и $n > m$, что $|Y| = n+2$, $X_1 \cap A_0 \subseteq Y$ и $Y \cap X_2 = \emptyset$. Положим

$$x = Y \cup [(A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \setminus X_2].$$

Ясно, что x – искомый элемент.

ЛЕММА 6. Пусть Γ_1, Γ_2 – несчетные обыкновенные связные графы, X – конечный подграф из $Gr(\Gamma_1)$, φ – изоморфизм из X на подграф Y графа $Gr(\Gamma_2)$ и $a \in Gr(\Gamma_1)$. Тогда существуют $b \in Gr(\Gamma_2)$ и изоморфизм ψ подграфа $X \cup \{a\}$ из $Gr(\Gamma_1)$ на подграф $Y \cup \{b\}$ из $Gr(\Gamma_2)$ такие, что $\psi(a) = b$ и $\psi \restriction X = \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через X_1 обозначим множество всех вершин из X, смежных с a, а через X_2 – не смежных с a. В силу леммы 5, существует $b \in Gr(\Gamma_2)$, который смежен со всеми элементами из $\varphi(X_1)$ и не смежен со всеми элементами из $\varphi(X_2)$. Положим $\psi(a) = b$ и $\psi \restriction X = \varphi$. Ясно, что ψ – искомый изоморфизм.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любых двух несчетных обыкновенных связных графов Γ_1 и Γ_2 графы $Gr(\Gamma_1)$ и $Gr(\Gamma_2)$ элементарно эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через S обозначим множество всех изоморфизмов конечных подграфов из $Gr(\Gamma_1)$ на подграфы из $Gr(\Gamma_2)$. Положим $S_n = S$ для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Теперь осталось воспользоваться леммой 6 и предложением 2 из [4, с. 26].

Пусть Ω - обыкновенный граф и $\Omega^0 = \{\{x,y\} \mid x,y$ - смежные вершины из $\Omega\}$ - множество всех ребер графа Ω. Подмножество $H \subseteq \Omega \cup \Omega^0$ будем называть *наследственным*, если для любого ребра $\{x,y\}$ графа Ω из условия $\{x,y\} \in H$ вытекает x, $y \in H$. Через $\mathcal{L}t(\Omega)$ обозначим совокупность, состоящую из всех конечных наследственных подмножеств из $\Omega \cup \Omega^0$ и множества $\Omega \cup \Omega^0$. Ясно, что $\mathcal{L}t(\Omega)$ является дистрибутивной алгебраической решеткой относительно $\subseteq$, причем $\Omega \cup \Omega^0$ и $\varnothing$ - соответственно наибольший и наименьший элементы этой решетки.

ЛЕММА 7. *Пусть Ω_1, Ω_2 - обыкновенные графы. Тогда каждый изоморфизм решетки $\mathcal{L}t(\Omega_1)$ на решетку $\mathcal{L}t(\Omega_2)$ индуцируется единственным изоморфизмом графа Ω_1 на граф Ω_2, и, обратно, каждый изоморфизм графа Ω_1 на граф Ω_2 индуцирует изоморфизм решетки $\mathcal{L}t(\Omega_1)$ на решетку $\mathcal{L}t(\Omega_2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Φ - изоморфизм решетки $\mathcal{L}t(\Omega_1)$ на решетку $\mathcal{L}t(\Omega_2)$. Атомами решетки $\mathcal{L}t(\Omega_1)$ являются наследственные подмножества вида $\{x\}$, где $x \in \Omega_1$, и только они. Следовательно, существует биекция φ из Ω_1 на Ω_2 такая, что $\Phi(\{x\}) = \{\varphi(x)\}$ для любого $x \in \Omega_1$. Пусть $\{x,y\}$ - ребро графа Ω_1. Тогда $\Phi(\{x,y,\{x,y\}\})$ содержит точно два атома: $\{\varphi(x)\}$ и $\{\varphi(y)\}$. Множество $\{x,y,\{x,y\}\}$ содержит точно пять наследственных подмножеств, а множество $\{x,y\}$ - точно четыре наследственных подмножества. Следовательно, $\Phi(\{x,y,\{x,y\}\}) = \{\varphi(x), \varphi(y), \{\varphi(x), \varphi(y)\}\}$, т. е. $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ смежны. Аналогично проверяется, что из смежности вершин $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ следует смежность вершин x и y. Таким образом, φ - изоморфизм графа Ω_1 на граф Ω_2.

Покажем, что φ индуцирует Φ. Пусть $H = \{x_1, \ldots, x_n, \{x_{i_1}, x_{j_1}\}, \ldots, \{x_{i_m}, x_{j_m}\}\}$ - наследственное подмножество из $\Omega_1 \cup \Omega_1^0$, содержащее n вершин и m ребер. Поскольку H содержит точно n атомов $\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}$, имеем $\Phi(H) \cap \Omega_2 = \{\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)\}$. Так как $\{x_{i_k}, x_{j_k}, \{x_{i_k}, x_{j_k}\}\} \subseteq H$ для любого $k = 1, \ldots, m$, в силу предыдущего, получаем $\{\varphi(x_{i_k}), \varphi(x_{j_k}), \{\varphi(x_{i_k}), \varphi(x_{j_k})\}\} \subseteq \Phi(H)$, т. е. $\{\varphi(x_{i_k}), \varphi(x_{j_k})\} \in$

$\in \Phi(H)$. Ясно, что других ребер в $\Phi(H)$ нет. Следовательно, $\Phi(H) = \{\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n), \{\varphi(x_{i_1}), \varphi(x_{j_1})\}, \ldots, \{\varphi(x_{i_m}), \varphi(x_{j_m})\}\}$, т. е. φ индуцирует Φ .

Обратное утверждение леммы очевидно.

Из леммы 7 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть Ω - обыкновенный граф. Тогда $Aut(\Omega) \cong Aut(\mathcal{L}t(\Omega))$.*

Пусть Γ - несчетный обыкновенный связный граф. Подрешетку решетки $\mathcal{L}t(Gr(\Gamma))$ будем называть *специальной*, если существует конечный подграф X графа $Gr(\Gamma)$ такой, что L состоит из следующих элементов: 1) $Gr(\Gamma) \cup (Gr(\Gamma))^0$, 2) H, где H пробегает все наследственные подмножества из $Gr(\Gamma) \cup (Gr(\Gamma))^0$, удовлетворяющие условию $H \cap Gr(\Gamma) \subseteq X$.

ЛЕММА 8. *Для любых двух несчетных обыкновенных связных графов Γ_1 и Γ_2 решетки $\mathcal{L}t(Gr(\Gamma_1))$ и $\mathcal{L}t(Gr(\Gamma_2))$ элементарно эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через S обозначим множество всех изоморфизмов специальных подрешеток из $\mathcal{L}t(Gr(\Gamma_1))$ на специальные подрешетки из $\mathcal{L}t(Gr(\Gamma_2))$. Положим $S_n = S$ для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Теперь осталось воспользоваться леммами 7, 6 и предложением 2 из [4, с. 26].

Заметим теперь, что теорема 1 вытекает из леммы 4 и следствия 1, а теорема 2 - из леммы 4, следствия 2 и леммы 8 с использованием того факта, что любая группа представима в виде группы всех автоморфизмов обыкновенного связного графа несчетной мощности.

Литература

1. В. А. БАРАНСКИЙ, О независимости производных структур алгебраических систем, Изв. вузов. Матем., № 11 (1982), 75-77.

2. Б. И. ПЛОТКИН, Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., Наука, 1966.

3. Г. ГРЕТЦЕР, Общая теория решеток, М., Мир, 1981.

4. Ю. Л. ЕРШОВ, Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М., Наука, 1980.

Поступило 12 апреля 1983 г.