

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Я. Белов, Лучисто-кондуктивный перенос тепла
в плоском слое поглощающей и рассеивающей среды,
ТВТ, 1974, том 12, выпуск 5, 1062–1070

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru
подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским согла-
шением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.210.149.218

15 ноября 2024 г., 07:26:58



УДК 536.3

ЛУЧИСТО-КОНДУКТИВНЫЙ ПЕРЕНОС ТЕПЛА В ПЛОСКОМ СЛОЕ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ И РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ *

Г. Я. Белов

Представлен метод приближенного аналитического решения линеаризованного интегро-дифференциального уравнения, описывающего лучисто-кондуктивный теплообмен при одновременном учете объемного рассеяния, селективности оптических свойств, объемных источников тепла и определенной прозрачности границ плоского слоя. Метод основан на аппроксимации распределения температуры полиномом определенной степени. Коэффициенты полинома и результирующая плотность теплового потока определяются по методу коллокаций. Показано, что разработанный метод обладает достаточной точностью в широкой области изменения независимых переменных и в десятки раз уменьшает затраты машинного времени по сравнению с численным методом решения.

В процессе разработки методов исследования отдельных задач лучисто-кондуктивного теплообмена выделились два основных подхода. Первый подход связан с применением численных методов решения исходных интегро-дифференциальных уравнений [2—4]. Численные методы обладают достаточно высокой точностью, однако область их применения ограничена из-за больших вычислительных трудностей, сложности анализа и обобщения полученных результатов. Большое практическое значение имеет второй подход к исследованию, основанный на применении приближенных аналитических методов решения. В этом направлении широкое распространение получили дифференциальные [4, 5] и алгебраические [6—10] методы аппроксимации интегро-дифференциальных уравнений. Эти методы позволяют свести описание задачи к изученному классу дифференциальных либо алгебраических уравнений, решение которых осуществляется по стандартным программам. В настоящей работе представлен приближенный алгебраический метод решения линеаризованного интегро-дифференциального уравнения (11) [1], пригодный для исследования задач комбинированного теплообмена при одновременном учете таких важных и недостаточно изученных факторов, как объемное рассеяние, селективность оптических свойств, объемные источники тепла и определенная прозрачность ограничивающих поверхностей. Эффективность предложенного метода проверена путем сопоставления полученных результатов с численным решением задачи и известными приближенными решениями других авторов.

Интегро-дифференциальное уравнение после линеаризации имеет вид

$$\begin{aligned}
 -N \frac{d\bar{T}(\bar{x})}{d\bar{x}} + \int_0^{\infty} n_{\lambda}^2 \{ Y(\tau_{\lambda}) + H_{\lambda} [L_{2\lambda} z_{1\lambda} + M_{1\lambda} z_{2\lambda}] [D(\tau_{\lambda}) - R(-\tau_{\lambda})] - \\
 - H_{\lambda} [L_{1\lambda} z_{2\lambda} + M_{2\lambda} z_{1\lambda}] [D(-\tau_{\lambda}) - R(\tau_{\lambda})] \} d\lambda = \bar{q}_1(\bar{x}) + \bar{q}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

* Предлагаемая работа является продолжением работы [1].

где

$$Y(\tau_\lambda) = 2 \frac{1 - \rho_\lambda}{1 + \rho_\lambda} \bar{E}'_{0\lambda}(T_0) \left\{ \int_{-\tau_{0\lambda}/2}^{\tau_\lambda} (\bar{T}(\bar{x}') - \bar{T}_0) F(\rho_\lambda, \tau_\lambda, \tau_\lambda') d\tau_\lambda' - \int_{\tau_\lambda}^{\tau_{0\lambda}/2} (\bar{T}(\bar{x}') - \bar{T}_0) F(-\rho_\lambda, \tau_\lambda', \tau_\lambda) d\tau_\lambda' \right\};$$

$$\bar{E}'_{0\lambda}(T_0) = \frac{dE_{0\lambda}(T_0)}{dT_0} \frac{T^0}{q^0};$$

$$L_{i\lambda} = 1 - r_{i\lambda} R_\lambda; \quad M_{i\lambda} = r_{i\lambda} D_\lambda; \quad Z_{i\lambda} = \varepsilon_{i\lambda} \bar{E}'_{0\lambda}(T_0) (\bar{T}_i - \bar{T}_0) - d_{i\lambda} \bar{E}_{0\lambda}(T_0) + (-1)^i r_{i\lambda} Y \left((-1)^i \frac{\tau_{0\lambda}}{2} \right);$$

$$d_{i\lambda} = 1 - \varepsilon_{i\lambda} - r_{i\lambda}; \quad i = 1, 2.$$

$$h \int_{\bar{x}} q_0(\bar{x}') d\bar{x}'$$

$$H_\lambda = [L_{1\lambda} L_{2\lambda} - M_{1\lambda} M_{2\lambda}]^{-1}; \quad \bar{q}_1(\bar{x}) = \frac{0}{q^0};$$

$$\bar{x} = \frac{x}{h}; \quad \bar{T} = \frac{T}{T^0}; \quad \bar{q} = \frac{q}{q^0}; \quad \gamma_\lambda = \sqrt{\alpha_\lambda + 2\beta_\lambda \alpha_\lambda};$$

$$\tau_\lambda = \gamma_\lambda \cdot x;$$

$$N = \lambda_T \cdot T^0 / h \cdot q^0; \quad \rho_\lambda = (\gamma_\lambda - \alpha_\lambda) / \gamma_\lambda + \alpha_\lambda;$$

$$\tau_{0\lambda} = \gamma_\lambda \cdot h.$$

Величины D , R , F описываются формулами (7а) работы [1]. Безразмерные величины N , ρ_λ , $\tau_{0\lambda}$, $(\varepsilon_{i\lambda}, r_{i\lambda})$, $d_{i\lambda}$ являются определяющими параметрами задачи, характеризующими роль теплопроводности (N), объемного рассеяния (ρ_λ), оптическую толщину слоя ($\tau_{0\lambda}$), оптические свойства ($\varepsilon_{i\lambda}, r_{i\lambda}$) и прозрачность $d_{i\lambda}$ границ слоя. Названные параметры, кроме N , являются в общем случае функциями длины волны. Лишь для случая серой среды все параметры задачи являются числовыми коэффициентами.

Приближенный аналитический метод решения уравнения (1), позволяющий определить при граничных условиях общего вида результирующую плотность теплового потока \bar{q} , ее составляющие $\bar{q}_T(\bar{x})$, $\bar{q}_L(\bar{x})$ и распределение температуры $\bar{T}(\bar{x})$, основан на аппроксимации функции $\bar{T}(\bar{x})$ полиномом определенной степени

$$\bar{T}(\bar{x}) - \bar{T}_0 = \sum_{j=0}^{k+2} b_j \bar{x}^j.$$

Если потребовать, чтобы заданное этим полиномом распределение температуры удовлетворяло граничным условиям (13) из [1], то два неизвестных коэффициента b можно исключить и получить выражение

$$\bar{T}(\bar{x}) - \bar{T}_0 = \sum_{j=0}^k a_j P_j(\bar{x}); \quad a_0 = 1. \quad (2)$$

Здесь $P_j(\bar{x})$ — известные полиномы, степень которых не выше $k+2$; $a_1, a_2 \dots a_k$ — неизвестные постоянные коэффициенты. \bar{T}_0 — безразмерная температура в некотором сечении \bar{x}_0 , например в центре слоя.

Введем в рассмотрение некоторые функции, которые будут полезны при интегрировании уравнений (1).

Используя свойства интегральных экспонент

$$\frac{d}{dy} E_{n+1}(y) = -E_n(y); \quad E_{n+1}(y) = \frac{1}{n} [e^{-y} - y E_n(y)],$$

способ интегрирования по частям, замену переменных и формулу бинома Ньютона, можно найти следующий интеграл:

$$S_n(\tau) = 2 \frac{1-\rho}{1+\rho} \left[\int_{-\tau_0/2}^{\tau} \left(\frac{\tau'}{\tau_0} \right)^n F(\rho, \tau, \tau') d\tau' - \int_{\tau}^{\tau_0/2} \left(\frac{\tau'}{\tau_0} \right)^n \times \right. \\ \left. \times F(-\rho, \tau', \tau) d\tau' \right] = \frac{2}{\tau_0^n} \frac{1-\rho}{1+\rho} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^n [\Phi_{j,i}(\tau) + (-1)^{n+1} \Phi_{j,i}(-\tau)], \quad (3)$$

где

$$\Phi_{j,i}(\tau) = (-1)^i C_n^i \rho^{2j} \{ [2j\tau_0 + \tau]^{n-i} [U_i((2j+0,5)\tau_0 + \tau) - U_i(2j\tau_0)] + \rho [2(j+1)\tau_0 - \tau]^{n-i} [U_i((2j+1,5)\tau_0 - \tau) - U_i((2j+0,5)\tau_0 - \tau)] + \rho^2 [2(j+1)\tau_0 + \tau]^{n-i} \times \\ \times [U_i(2(j+1)\tau_0) - U_i((2j+1,5)\tau_0 + \tau)] \};$$

$$U_i(z) = \int_0^z y^i E_2(y) dy = \frac{1}{i+2} [i! - e^{-z} (iz^{i-1} + i(i-1)z^{i-2} +$$

$$+ i(i-1)(i-2)z^{i-3} + \dots + i!) - 2z^i E_3(z)].$$

C_n^i — число сочетаний из числа n по i . Функция $S_n(\tau)$ является четной, если число n — нечетное и наоборот, т. е.

$$S_n(\tau) = (-1)^{n+1} S_n(-\tau). \quad (4)$$

Так как в рассматриваемой задаче оптические свойства полагаются постоянными по глубине слоя, справедливы следующие соотношения:

$$\bar{x}' = \frac{x'}{h} = \frac{\gamma \cdot x'}{\gamma \cdot h} = \frac{\tau'}{\tau_0}; \quad P(\bar{x}') \equiv P\left(\frac{\tau'}{\tau_0}\right),$$

$$2 \frac{1-\rho}{1+\rho} \left[\int_{-\tau_0/2}^{\tau} P(\bar{x}') F(\rho, \tau, \tau') d\tau' - \int_{\tau}^{\tau_0/2} P(\bar{x}') F(-\rho, \tau', \tau) d\tau' \right] = P(S(\tau)). \quad (5)$$

Таким образом, интегрирование некоторого полинома $P(\bar{x})$, которое определяется левой частью последнего равенства, сводится к формальной замене в полиноме соответствующей степени \bar{x}^j на функцию $S_j(\tau)$.

Выполнив с учетом соотношений (2) и (5) интегрирование и дифференцирование в уравнении (1) и собрав в левой части полученного алгебраического равенства члены с неизвестными коэффициентами, будем иметь

$$\bar{q} + \sum_{j=1}^k a_j [NP_j'(\bar{x}) - A_j(\bar{x})] = -NP_0'(\bar{x}) + B(\bar{x}) + \bar{q}_1(\bar{x}), \quad (6)$$

$$P_j'(\bar{x}) = \frac{d}{d\bar{x}} P_j(\bar{x}); \quad A_j(\bar{x}) = \int_0^{\bar{x}} n_\lambda^2 E_{0\lambda}'(T_0) \{P_j(S(\tau_\lambda)) + H_\lambda [L_{2\lambda} Z_{j\lambda}^* +$$

$$+M_{1\lambda}Z_{j\lambda}^{**}][D(\tau_\lambda) - R(-\tau_\lambda)] - H_\lambda[L_{1\lambda}Z_{j\lambda}^{**} + M_{2\lambda}Z_{j\lambda}^*][D(-\tau_\lambda) - R(\tau_\lambda)]\}d\lambda;$$

$$z_{j\lambda}^* = \varepsilon_{1\lambda}P_j(-1/2) - r_{1\lambda}P_j(S(-\tau_{0\lambda}/2));$$

$$Z_{j\lambda}^{**} = \varepsilon_{2\lambda}P_j(1/2) + r_{2\lambda}P_j\left(S\left(\frac{\tau_{0\lambda}}{2}\right)\right); \quad j=0, 1, 2, \dots, k; \quad (7)$$

$$B(\bar{x}) = A_0(\bar{x}) - \int_0^\infty n_\lambda^2 \bar{E}_{0\lambda}(T_0) H_\lambda \{ [d_{1\lambda}L_{2\lambda} + d_{2\lambda}M_{1\lambda}][D(\tau_\lambda) - R(-\tau_\lambda)] - [d_{2\lambda}L_{1\lambda} + d_{1\lambda}M_{2\lambda}][D(-\tau_\lambda) - R(\tau_\lambda)] \} d\lambda.$$

Для определения неизвестных величин \bar{q} , a_1, a_2, \dots, a_k используем метод коллокаций, согласно которому уравнение записывается применительно к ряду точек в слое, число которых равно числу неизвестных. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\bar{q} + \sum_{j=1}^k a_j [NP_j'(\bar{x}_m) - A_j(\bar{x}_m)] = -NP_0'(\bar{x}_m) + B(\bar{x}_m) - \bar{q}_1(\bar{x}_m),$$

$$m=1, 2, \dots, k, k+1. \quad (8)$$

Решая систему уравнений (8), находим безразмерную плотность результирующего потока \bar{q} и коэффициенты a_j , определяющие температурное поле в слое. Локальные $\bar{q}_n(\bar{x})$, $\bar{q}_T(\bar{x})$ и средние по слою $\langle \bar{q}_n \rangle$, $\langle \bar{q}_T \rangle$ значения безразмерных лучистой и кондуктивной составляющих плотности теплового потока определяются соотношениями

$$\bar{q}_n(\bar{x}) = B(\bar{x}) + \sum_{j=1}^k a_j A_j(\bar{x}); \quad \langle \bar{q}_n \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} \bar{q}_n(\bar{x}) d\bar{x} = \bar{q} - \langle \bar{q}_T \rangle,$$

$$\bar{q}_T(\bar{x}) = \bar{q} - \bar{q}_n(\bar{x}) \simeq -N \sum_{j=0}^k a_j P_j'(\bar{x}); \quad \langle \bar{q}_T \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} \bar{q}_T(\bar{x}) d\bar{x} =$$

$$= \bar{q} - \langle \bar{q}_n \rangle \simeq -N \sum_{j=0}^k a_j [P_j(1/2) - P_j(-1/2)]. \quad (9)$$

Точность предложенного метода зависит от степени полинома (2) и выбора точек коллокаций \bar{x}_m . Однако на примере решения конкретных задач установлено, что данный метод обеспечивает достаточную точность в широкой области изменения независимых параметров даже при невысоких степенях аппроксимирующих полиномов и равномерном распределении точек коллокаций и существенно сокращает вычислительные трудности по сравнению с численным методом решения исходного уравнения.

Рассмотрим случай, когда в материале отсутствуют объемные источники тепла и слои ограничены непрозрачными стенками с одинаковыми оптическими свойствами и известными температурами

$$\bar{q}_1(\bar{x}) = 0; \quad \varepsilon_{1\lambda} = \varepsilon_{2\lambda} = \varepsilon_\lambda; \quad r_{1\lambda} = r_{2\lambda} = r_\lambda;$$

$$d_{1\lambda} = d_{2\lambda} = 0;$$

$$\bar{T}(-0,5) = \bar{T}_1; \quad \bar{T}(0,5) = \bar{T}_2; \quad \bar{T}_1 > \bar{T}_2. \quad (10)$$

Рассматриваемый случай часто встречается в теплофизической практике, например при опытном определении коэффициентов теплопроводности полупрозрачных материалов, его в упрощенной постановке рассматривали многие авторы [2-10]. Анализ четности функций в уравнении (1) с

учетом (10) показывает, что в этом случае профиль температуры должен быть антисимметричным относительно центра слоя. Вследствие этого температура в центре $\bar{T}_0 = 1/2(\bar{T}_1 + \bar{T}_2)$, а полином (15) не должен иметь четных степеней \bar{x} . Если принять за единицу температуры перепад по слою ($T^\circ = T_1 - T_2$) и ограничиться для $\bar{T}(\bar{x})$ полиномом третьей степени, то выражение (2) примет вид

$$\bar{T}(\bar{x}) - \bar{T}_0 = -\bar{x} + a(\bar{x} - 4\bar{x}^3). \quad (11)$$

С учетом (11) из соотношения (6) получим

$$\bar{q} + a[N(1 - 12\bar{x}^2) - A_1(\bar{x})] = N + A_0(\bar{x}). \quad (12)$$

Значения $A_0(\bar{x})$ и $A_1(\bar{x})$ определяются из соотношений (7), в которых следует положить при $j=0$ и 1

$$P_0(\bar{x}) = -\bar{x}; \quad P_0(S(\tau)) = -S_1(\tau); \quad P_1(\bar{x}) = \bar{x} - 4\bar{x}^3;$$

$$P_1(S(\tau)) = S_1(\tau) - 4S_3(\tau)_0.$$

Функции $A_0(\bar{x})$ и $A_1(\bar{x})$ согласно (4) являются четными. Записав уравнение (11) применительно к двум точкам $\bar{x}_1=0$, $\bar{x}_2=0,5$ и решив полученную систему уравнений, найдем

$$a = \frac{A_0(0) - A_0(0,5)}{3N + A_1(0,5) - A_1(0)}; \quad \bar{q} = N + A_0(0) - a[N - A_1(0)]. \quad (13)$$

При найденных значениях a и \bar{q} уравнение (11) ввиду четности $A_0(\bar{x})$ и $A_1(\bar{x})$ удовлетворяется строго в трех точках: $\bar{x}_1=0$; $\bar{x}_{2,3}=\pm 0,5$. В промежуточных точках равенство (12) будет выполняться приближенно. Соотношения (9) в этом случае принимают вид

$$\bar{q}_n(\bar{x}) = A_0(\bar{x}) + aA_1(\bar{x}); \quad \langle \bar{q}_n \rangle = \bar{q} - N; \quad (14)$$

$$\bar{q}_T(\bar{x}) = \bar{q} - \bar{q}_n(\bar{x}) \approx N[1 - a(1 - 12\bar{x}^2)]; \quad \langle \bar{q}_T \rangle = N.$$

Соотношения (11) - (14) завершают приближенное решение рассматриваемой задачи. Остановимся на результатах расчета для случая независимых от длины волны оптических свойств материала (приближение серой среды). Этот случай наиболее прост для вычисления и его рассмотрение позволит проверить эффективность разработанного метода и оценить влияние отдельных независимых параметров (N , ρ , ϵ , τ_0) на комбинированный теплообмен. В этом случае за единицу плотности теплового потока целесообразно выбрать величину $q^\circ = n^2 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$. При этом коэффициент преломления материала n из расчетов непосредственно исключается и входит лишь множителем в величину q° . В табл. 1 представлены результаты расчета по соотношениям (13), (14) значений a , \bar{q} и $\langle \bar{q}_n \rangle$ при различных сочетаниях параметров N , ρ , ϵ , τ_0 . Анализ представленных результатов показывает, что температурный профиль, определяемый коэффициентом a , существенно зависит от величины параметров N , ρ , ϵ . Увеличение этих параметров ведет к уменьшению a , т. е. приближает профиль $\bar{T}(\bar{x})$ к линейному. Зависимость профиля температуры от оптической толщины слоя τ_0 носит немонотонный характер. При $\tau_0 = 2 \div 3$ наблюдается наибольшее отклонение профиля температуры от линейного. При малых и больших τ_0 профиль приближается к линейному. Средняя лучистая составляющая $\langle \bar{q}_n \rangle = \bar{q} - N$ практически не зависит от величины параметра N . Это указывает на определенную консервативность $\langle \bar{q}_n \rangle$, а следовательно, и результирующей плотности \bar{q} к закладываемому в расчет профилю температуры на возможность их надежного вычисления данным методом при аппроксимации $\bar{T}(\bar{x})$ полиномом невысокой степени.

Эффективность приближенного метода решения проверялась путем сопоставления полученных на его основе результатов с результатами числен-

Таблица 1

ε	τ_0		$\rho=0$			$\rho=0,25$			$\rho=0,5$			
			N			N			N			
			0,25	1	2	0,25	1	2	0,25	1	2	
1	0,1	a	0,053	0,013	0,007	0,030	0,008	0,004	0,015	0,004	0,002	
		\bar{q}	1,192	1,943	2,943	1,135	1,885	2,885	1,048	1,798	2,798	
		$\langle \bar{q}_n \rangle$	0,942	0,943	0,943	0,885	0,885	0,885	0,798	0,798	0,798	
		a	0,195	0,057	0,029	0,100	0,028	0,014	0,041	0,011	0,006	
		\bar{q}	0,847	1,610	2,610	0,697	1,450	2,451	0,554	1,304	2,304	
		$\langle \bar{q}_n \rangle$	0,597	0,608	0,609	0,447	0,450	0,451	0,304	0,304	0,304	
	1	5	a	0,120	0,037	0,019	0,060	0,017	0,009	0,024	0,006	0,003
			\bar{q}	0,455	1,212	2,213	0,384	1,136	2,136	0,330	1,080	2,080
			$\langle \bar{q}_n \rangle$	0,205	0,212	0,213	0,134	0,136	0,136	0,080	0,080	0,080
			a	0,055	0,014	0,007	0,033	0,008	0,004	0,018	0,004	0,002
			\bar{q}	0,600	1,350	2,350	0,582	1,332	2,332	0,563	1,313	2,313
			$\langle \bar{q}_n \rangle$	0,350	0,350	0,350	0,332	0,332	0,332	0,313	0,313	0,313
0,5	0,1	a	0,276	0,080	0,041	0,160	0,044	0,022	0,078	0,021	0,011	
		\bar{q}	0,616	1,384	2,387	0,534	1,290	2,291	0,458	1,210	2,210	
		$\langle \bar{q}_n \rangle$	0,366	0,384	0,387	0,284	0,290	0,291	0,208	0,209	0,209	
		a	0,190	0,057	0,030	0,106	0,030	0,015	0,049	0,013	0,007	
		\bar{q}	0,431	1,184	2,187	0,365	1,119	2,120	0,321	1,071	2,072	
		$\langle \bar{q}_n \rangle$	0,181	0,184	0,187	0,115	0,119	0,120	0,071	0,072	0,072	
0,5	5	a	0,057	0,015	0,007	0,034	0,009	0,004	0,019	0,005	0,002	
		\bar{q}	0,279	1,029	2,029	0,267	1,017	2,017	0,260	1,010	2,010	
		$\langle \bar{q}_n \rangle$	0,029	0,029	0,029	0,017	0,017	0,017	0,010	0,010	0,010	
		a	0,344	0,100	0,051	0,224	0,061	0,031	0,133	0,035	0,018	
		\bar{q}	0,432	1,198	2,203	0,372	1,123	2,125	0,316	1,070	2,070	
		$\langle \bar{q}_n \rangle$	0,182	0,198	0,203	0,122	0,123	0,125	0,066	0,070	0,071	
0	1	a	0,268	0,078	0,040	0,174	0,049	0,024	0,102	0,027	0,014	
		\bar{q}	0,384	1,155	2,160	0,337	1,096	2,097	0,301	1,054	2,055	
		$\langle \bar{q}_n \rangle$	0,134	0,156	0,160	0,087	0,096	0,097	0,051	0,054	0,055	
		a										
		\bar{q}										
		$\langle \bar{q}_n \rangle$										

ного решения линейного (1) и нелинейного уравнений (11) из [1]. Численный метод решения основан на последовательном уточнении температурного профиля в следующей конечно-разностной схеме расчета:

$$\bar{q}_T^{(k+1)}(\bar{x}_m) = \bar{q}^{(k)} - \bar{q}_n^{(k)}(\bar{x}_m); \quad \bar{q}^{(k)} = \langle \bar{q}_T \rangle + \langle \bar{q}_n^{(k)} \rangle;$$

$$\bar{T}^{(k+1)}(\bar{x}_m) = \bar{T}^{(k+1)}(\bar{x}_{m-1}) - \frac{1}{2N \cdot M} [\bar{q}_T^{(k+1)}(\bar{x}_m) + \bar{q}_T^{(k+1)}(\bar{x}_{m-1})], \quad (15)$$

$$m=1, 2, \dots, M, M+1; \quad \bar{T}(\bar{x}_0) = \bar{T}_1; \quad \bar{T}(\bar{x}_{M+1}) = \bar{T}_2.$$

Количество участков M , на которое разбивался весь слой, выбиралось настолько большим, чтобы его удвоение не сказывалось на конечном результате. При расчете лучистой составляющей теплового потока на каждом шаге итерационного процесса температура каждого участка принималась постоянной и равной среднearифметическому значению температур на границах этого участка. Итерационный процесс заканчивался, когда $(k+1)$ -е приближение температуры на каждом участке отличалось от (k) -го приближения не более чем на 0,1%. За нулевое приближение тем-

Таблица 2

Метод решения уравнения (1)	τ_0	$\rho=0$ ($\beta=0$)			$\rho=0,5$ ($\beta=4\alpha$)		
		0,1	1	5	0,1	1	5
Аналитический	\bar{q}	0,5998	0,6157	0,4314	0,5649	0,4602	0,3302
	$l, \text{сек}$	$\sim 0,5$	$\sim 0,5$	$\sim 0,5$	$\sim 1,5$	$\sim 1,5$	$\sim 1,5$
Численный	\bar{q}	0,5976	0,6150	0,4482	0,5652	0,4663	0,3350
	$l, \text{сек}$	15	36	45	58	115	143

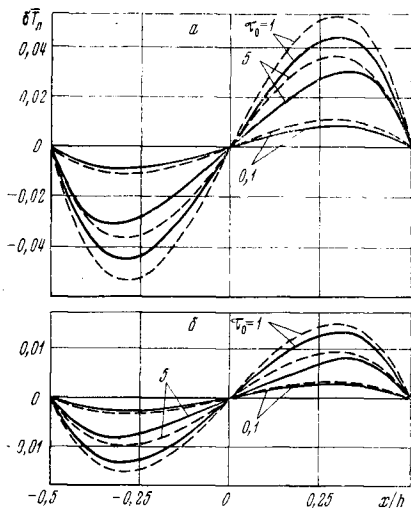


Рис. 1

Рис. 1. Отклонение температуры от линейного закона, рассчитанное на основании численного (сплошные линии) и приближенного аналитического (пунктирные линии) методов решения уравнения (1) для случаев $N=0,25$; $\epsilon=0,5$; $\tau_0=0,1$; 1; 5:

а — нерассеивающая среда $\rho=0$ ($\beta=0$); б — рассеивающая среда $\rho=0,5$ ($\beta/\alpha=4$)

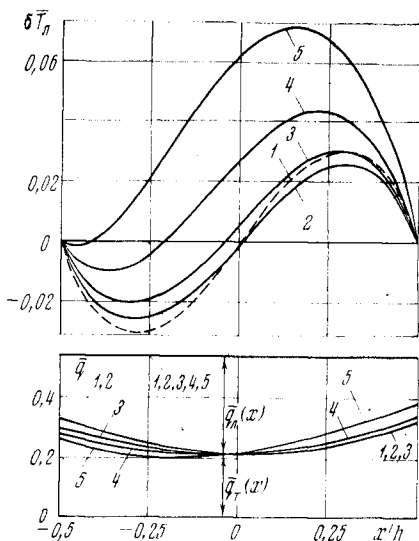


Рис. 2

Рис. 2. Отклонение температуры от линейного закона $\delta \bar{T}(x)$ и зависимость от глубины слоя лучистой $\bar{q}_n(x)$ и кондуктивной $\bar{q}_\tau(x)$ составляющих безразмерной плотности теплового потока \bar{q} для случая $N=0,25$; $\epsilon=0,5$; $\rho=0,25$; $\tau_0=1$:

1 — приближенное аналитическое решение уравнения (1); 2 — численное решение уравнения (1); 3, 4, 5 — численное решение нелинейного уравнения (11) из [1] для случаев $(T_1-T_2)/T_0=0,1$; 0,25; 0,5

пературы принято линейное распределение по глубине слоя. Получено хорошее согласие результатов аналитического и численного решений линейного уравнения (1) как по температурному профилю (величине отклонения температуры от линейного закона δT_n , рис. 1), так и по результирующей плотности теплового потока (табл. 2). Расчеты указанных в табл. 2 вариантов задачи, проведенные с помощью ЭВМ БЭСМ-6, показывают, что применение приближенного метода в десятки раз снижает затраты машинного времени по сравнению с численным решением. Это особенно важно в случае рассеивающих сред, так как учет рассеяния примерно в три раза увеличивает время счета.

Сопоставление (рис. 2) результатов расчета по формулам (11)–(14) с результатами численного решения нелинейного уравнения (11) из [1] показывает, что аналитический метод дает хорошие результаты по температурному профилю $\bar{T}(x)$ и локальным значениям составляющих $\bar{q}_\tau(x)$, $\bar{q}_n(x)$ при перепаде $(T_1-T_2)/T_0 \leq 0,1$. Увеличение перепада нарушает асимметричность профиля $\bar{T}(x)$ и симметричность распределения $\bar{q}_\tau(x)$, $\bar{q}_n(x)$ относительно центра и сдвигает максимальное значение лучистой составляющей от центра в сторону горячей стенки. При прочих равных условиях безразмерная результирующая плотность теплового потока $\bar{q} = q/q^0$, а следовательно, и величина $\langle \bar{q}_n \rangle = \bar{q} - N$ практически не зависят от закладываемого в расчет перепада температуры. Это объясняется, по-видимому, тем, что размерные значения q и q^0 увеличиваются с ростом перепада температуры в одинаковое число раз.

Таким образом, при соответствующем выборе масштаба q^0 расчет безразмерных значений \bar{q} и $\langle \bar{q}_n \rangle$ можно проводить на основании линеаризованного уравнения (2) и представленного метода его решения. Безразмер-

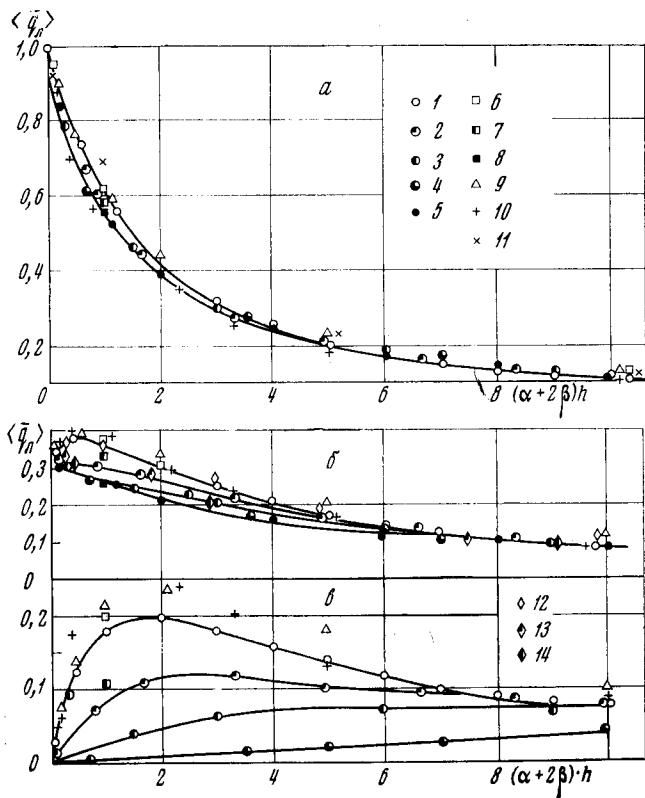


Рис. 3. Зависимость средней по слою безразмерной плотности лучистого потока от приведенной оптической толщины слоя:

$a - \varepsilon=1$; $b - \varepsilon=0,5$; $\varepsilon - \varepsilon=0$; 1, 2, 3, 4, 5 — расчеты по формулам при $\rho=0; 0,25; 0,5; 0,75$; 1, 6, 7, 8 — численное решение [2] с учетом изотропного рассеяния ($B=0,5\beta\rho$) при $\beta\rho/(\alpha+\beta\rho)=0; 0,5; 1$; 9, 10, 11 — приближенные решения для нерассеивающей среды ($\beta=\rho=0$) [4], [6], [7]; 12, 13, 14 — численное решение исходного уравнения (11) из [1] при $\rho=0; 0,25; 0,5$

ная величина средней лучистой составляющей, которая практически не зависит от значения теплопроводности (параметра N) и перепада температуры, является удобным критерием для оценки роли прозрачности и объемных процессов излучения в комбинированном теплопереносе. По величине $\langle \bar{q}_n \rangle$ удобно сопоставлять решения различных авторов, полученные при разных значениях N и $(T_1 - T_2)$.

На рис. 3 представлены результаты расчета величины $\langle \bar{q}_n \rangle$ в зависимости от значений ε , ρ и приведенной оптической толщины слоя $\tau_{np} = (\alpha + 2\beta)h$, полученные в данной работе, и другими авторами [4, 6, 7]. В области $\varepsilon > 0,5$ величина $\langle \bar{q}_n \rangle$ нечувствительна к изменению параметра ρ . При низких значениях степени черноты $\varepsilon \sim 0$ величина $\langle \bar{q}_n \rangle$ заметно уменьшается с ростом параметра рассеяния ρ . Уменьшение степени черноты приводит при прочих равных условиях к уменьшению $\langle \bar{q}_n \rangle$. Результаты расчета величины $\langle \bar{q}_n \rangle$ по соотношениям (13), (14) хорошо согласуются с численным решением исходного уравнения (11) [1], с численным решением [2] для изотропно-рассеивающей среды ($\beta = 1/2\beta\rho$) и занимают промежуточное положение среди приближенных решений, которые получены в [4] (методом разложения в ряд интенсивностей излучения), [6] (на основании линейной аппроксимации температуры по глубине слоя), [7] (методом конечных итераций).

На примере рассмотренной задачи можно заключить, что разработанный метод расчета лучисто-кондуктивного теплообмена позволяет учесть

такой важный фактор, как объемное рассеяние, приводит к достоверным результатам в широкой области независимых переменных и не требует значительных затрат времени при вычислениях.

Автор выражает благодарность Л. П. Филиппову за внимание к работе.

Москва

Поступила в редакцию
28 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Я. Белов. Теплофизика высоких температур, II, № 4, 1973.
2. Р. Висканга. Теплопередача, СЗ7, № 1, 1965.
3. Н. А. Рубцов, Ф. А. Кузнецова, А. Л. Бурка. Сб. Тепломассоперенос, 1. «Энергия», 1968.
4. Тейтл, Хартнетт. Ракетная техника и космонавтика, № 1, 1968.
5. Р. К. Конаков. Intern. J. Heat Mass Transfer., 2, № 1-2, 136, 1961.
6. Н. Poltz. Intern. J. Heat Mass Transfer., 8, № 4, 1965.
7. В. Н. Адрианов. Сб. Тепломассоперенос, 2, стр. 92, Минск, 1965.
8. Л. П. Филиппов. Вестник МГУ, Физика, № 2, 1954.
9. Л. А. Пигальская. Теплофизика высоких температур, 7, № 4, 1969.
10. В. Н. Адрианов. Основы радиационного и сложного теплообмена. «Энергия» 1972.