И. И. Скрыпник, А. Ф. Тедеев, Локальные оценки решения задачи Коши для квазилинейного параболического уравнения второго порядка. Весовой случай. I,
Сиб. матем. журн., 1997, том 38, номер 1, 193–207

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 1997. Том 38, № 1

УДК 517.956

ЛОКАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ВЕСОВОЙ СЛУЧАЙ. I*)

И. И. Скрыпник, А. Ф. Тедеев

Введение

Пусть $x = (x_1, \dots, x_N) \in R^N$, $N \geqslant 1$. Рассмотрим в области $Q_T = R^N \times (0,T)$ задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(w(x)|\nabla u|^{p-2}u_{x_i}), \quad p > 2, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R^N, \quad u_0 \in L_{1,\mathrm{loc}}(R^N). \tag{2}$$

Будем предполагать, что $w(x)$, $x \in R^N$, — измеримая неотрицательная функция, удовлетворяющая условиям: $w \in L_{1,\mathrm{loc}}(R^N)$ и для любого $\rho > 0$ и некоторого фиксированного $\sigma_0 > 1$

$$\begin{gathered} \int\limits_{B_\rho} w^{-1/(\sigma_0-1)}\,dx < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in B_\rho} w \leqslant c\rho^{N(\sigma_0-1)}\left(\int\limits_{B_\rho} w^{-1/(\sigma_0-1)}\,dx\right)^{1-\sigma_0}. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь и далее через c обозначены положительные постоянные, зависящие лишь от данных задачи, $B_\rho = \{x \in R^N : |x| < \rho\}$. Из (3), в частности, вытекает, что $w \in A_{\sigma_0}$ [1], т. е.

$$\int\limits_{B_\rho} w\,dx \left[\int\limits_{B_\rho} w^{-1/(\sigma_0-1)}\,dx\right]^{\sigma_0-1} \leqslant c\rho^{N\sigma_0}. \tag{4}$$

Отметим также, что из (3) очевидным образом следует оценка

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in B_\rho} w(x) \leqslant c\rho^{-N}\int\limits_{B_\rho} w\,dx. \tag{5}$$

*) Работа частично поддержана ISF (грант U 97000).

Предположим, кроме того, что $w \in D_\mu$ [1], $\mu < 1 + p/N$, т. е.

$$\frac{\omega(B_s)}{\omega(B_h)} \leqslant c\left(\frac{s}{h}\right)^{N\mu} \tag{6}$$

для любых $s \geqslant h > 0$, где

$$\omega(B_s) = \int\limits_{B_s} w(x)\,dx.$$

Ради простоты в дальнейшем будем рассматривать лишь неотрицательные начальные данные $u_0(x)$ и, следовательно, неотрицательные решения задачи (1), (2).

Основной целью работы является получение оптимальных оценок для величин $\|u(\cdot,t)\|_{\infty,B_\rho}$, $\|\nabla u(\cdot,t)\|_{\infty,B_\rho}$ в терминах, характеризующих поведение на бесконечности начальной и весовой функций. Данная работа обобщает некоторые результаты работы [2], полученные для случая $w \equiv 1$.

Пусть $k = N(p-1-\mu)+p$, $r > 0$ — фиксированное число. Введем локальные характеристики для $u(x,t)$ и $u_0(x)$ следующим образом:

$$\varphi(t) \equiv \varphi_r(t) = \sup_{\tau\in(0,t)} \tau^{N/k} \sup_{\rho\geqslant r}\left(\frac{\omega(B_\rho)}{\rho^{N+p}}\right)^{1/(p-2)} \|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,B_\rho},$$

$$|\!|\!| u(\cdot,\tau) |\!|\!|_r = \sup_{\rho\geqslant r} \rho^{-k/(p-2)}\left[\frac{\omega(B_\rho)}{\rho^{N\mu}}\right]^{1/(p-2)} \int\limits_{B_\rho} u(x,\tau)\,dx,$$

$$|\!|\!| u(\cdot,0) |\!|\!|_r \equiv |\!|\!| u_0 |\!|\!|_r.$$

Прежде чем перейти к формулировкам основных результатов работы, введем понятие оптимального решения задачи (1), (2).

Измеримую функцию $u(x,t)$ будем называть *оптимальным решением* задачи (1), (2) в Q_T, если $u \in C(0,T;L_1(\Omega)) \cap L_{p-1}\big(0,T;W^1_{p-1,w}(\Omega)\big)$ для любого открытого подмножества $\Omega \subset R^N$ и для любой функции $\eta(x,t) \in W^1_\infty(0,T;L_\infty(\Omega)) \cap L_\infty\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_\infty(\Omega)\big)$ справедливо тождество

$$\int\limits_\Omega u(x,t)\eta(x,t)\,dx + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega(-u\eta_t + w|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\eta)\,dxd\tau$$
$$= \int\limits_\Omega u_0(x)\eta(x,0)\,dx \quad \forall 0<t<T, \tag{7}$$

где $W^1_{p-1,w}(\Omega)$ — весовое пространство Соболева с конечной нормой

$$\|u\|_{W^1_{p-1,w}(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega w(|\nabla u|^{p-1} + |u|^{p-1})\,dx\right)^{1/(p-1)}.$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть* $|\!|\!| u_0 |\!|\!|_r < \infty$ *для фиксированного* $r > 0$, *и пусть* $u(x,t)$ — *оптимальное решение задачи* (1), (2) *в* Q_T. *Тогда* (а) *если* $w(x)$ *такова, что выполнены условия* (3), (6) *при* $\mu < 1+p/N$, *то существуют* $c_0, c_1, c_2 > 0$ *такие, что*

$$0 < t < c_0 |||u_0|||_r^{-(p-2)}, \tag{8}$$

$$|||u(\cdot,t)|||_r \leqslant c_1 |||u_0|||_r, \tag{9}$$

$$||u(\cdot,t)||_{\infty,B_\rho} \leqslant c_2 t^{-N/k} \left[\frac{\rho^{N+p}}{\omega(B_\rho)}\right] |||u_0|||_r^{(p-N(\mu-1))/k}, \tag{10}$$

(б) *если* w *такова, что выполнены условия* (3), (6), $\mu < 1 + 2/N$, *и, кроме того, если* w *непрерывно дифференцируема в* R^N *и*

$$\sup_{x\in B_\rho} \frac{w^{N(\mu-1)-1}}{|\nabla w|^{N(\mu-1)}} \leqslant c_3 \frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}, \quad \sup_{|x|=\rho} \frac{|\nabla w|^2}{w} \leqslant c_4 \frac{\omega(B_\rho)}{\rho^{N+2}} \quad \forall \rho > 0, \tag{11}$$

то для всех t, *удовлетворяющих условию* (8), *имеет место неравенство*

$$||\nabla u(\cdot,t)||_{\infty,B_\rho} \leqslant c_5 t^{-(N+1)/k} \left[\frac{\rho^{N+2}}{\omega(B_\rho)}\right]^{1/(p-2)} |||u_0|||_r^{(2-N(\mu-1))/k}. \tag{12}$$

Рассмотрим частные случаи теоремы. Пусть $w = |x|^\alpha$, $0 < \alpha < p$. В этом случае $\mu = 1+\alpha/N$ и выполнены условия (3) и (6). Следовательно, (10) примет вид

$$||u(\cdot,t)||_{\infty,B_\rho} \leqslant c t^{-N/k_\alpha} \rho^{(p-\alpha)/(p-2)} \left(|||u_0|||'_r\right)^{(p-\alpha)/k_\alpha}, \tag{13}$$

где

$$|||u_0|||'_r = \sup_{\rho\geqslant r} \rho^{-k_\alpha/(p-2)} \int_{B_\rho} u_0\, dx, \quad k_\alpha = N(p-2) + p - \alpha.$$

Если же $0 < \alpha < 2$, то (12) дает неравенство

$$||\nabla u(\cdot,t)||_{\infty,B_\rho} \leqslant c t^{-(N+1)/k_\alpha} \rho^{(2-\alpha)/(p-2)} \left(|||u_0|||'_r\right)^{(2-\alpha)/k_\alpha}. \tag{14}$$

Очевидно, что (11) для $|x|^\alpha$ выполняется. Оценки (13) и (14) являются точными, что подтверждается следующими классами точных решений:

$$B_\alpha(x,t) = t^{-N/k_\alpha} \left[1 - \left(\frac{p-2}{p-\alpha}\right)\left(\frac{N}{k_\alpha}\right)^{1/(p-1)} \left(\frac{|x|}{t^{1/k_\alpha}}\right)^{(p-\alpha)/(p-1)}\right]_+^{(p-1)/(p-2)},$$
$$k_\alpha = p - \alpha + N(p-2),$$

$$D_\alpha(x,T) = \Bigg\{ A T^{N(p-2)/k_\alpha} (T-t)^{-N(p-2)/(p-1)k_\alpha}$$
$$+ \left(\frac{p-2}{p-\alpha}\right) k_\alpha^{-1/(p-1)} (T-t)^{-1/(p-1)} \rho^{(p-\alpha)/(p-1)} \Bigg\}^{(p-1)/(p-2)}, \quad \alpha < p \ \forall A > 0.$$

Кроме того, оценки (13) и (14) при $\alpha = 0$ ($w \equiv 1$) совпадают с соответствующими оценками $||u(\cdot,t)||_{\infty,B_\rho}$ и $||\nabla u(\cdot,t)||_{\infty,B_\rho}$, полученными в [2]. Отметим еще, что если $u_0 \in L_1(R^N)$, то для любых $t > 0$

$$||u(\cdot,t)||_{\infty,R^N} \leqslant c||u_0||_{1,R^N}^{(p-\alpha)/k_\alpha} t^{-N/k_\alpha}, \quad ||\nabla u(\cdot,t)||_{\infty,R^N} \leqslant c||u_0||_{1,R^N}^{(2-\alpha)/k_\alpha} t^{-(N+1)/k_\alpha}.$$

Эти оценки при $\alpha = 0$ совпадают с соответствующими результатами работ [3, 4]. Что касается результатов о $C^{1,\alpha}$-регулярности, отметим работы [5, 6] и работу [7] одного из авторов данной статьи.

Оценки (9), (10) и (12) являются базовыми для доказательства существования и единственности в классах растущих начальных функций [2]. Этим и другим вопросам качественной теории задачи (1), (2) будет посвящена отдельная работа.

Доказательство теоремы. Доказательство теоремы проведем, комбинируя методики работ [1, 2]. В дальнейшем ради простоты изложения будем считать решение $u(x,t)$ достаточно гладким. Тем самым мы допускаем некоторую формальность в рассуждениях. Однако эти рассуждения можно всегда сделать точными, переходя известным способом (см., например, [8]) к регуляризованной задаче и затем устремляя параметр регуляризации к нулю. В дальнейшем нам потребуются вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $u(x,t)$ — оптимальное решение задачи* (1), (2) *в Q_T и $u_0 \in C_0^\infty(R^N)$. Тогда для любых $0 < t < T$ имеет место оценка*

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,B_\rho} \leqslant c[K(T)]^{(N+p-N(\mu-1))/\lambda} \left[\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}\right]^{N/\lambda} \left[\int\limits_{t/4}^{t}\int\limits_{B_{2\rho}} u^p\,dxd\tau\right]^{(p-N(\mu-1))/\lambda}, \tag{15}$$

где $K(t) = t^{-N(p-2)/k}\varphi^{p-2}(t) + t^{-1}$, $\lambda = N(2p-2-p\mu) + p^2$.

Доказательство. Пусть $T > 0$, $\rho > 0$ фиксированы. Рассмотрим последовательности

$$T_n = \frac{T}{2} - \frac{T}{2^{n+1}}, \quad \rho_n = \rho + \frac{\rho}{2^{n+1}}, \quad \bar\rho_n = \frac{1}{2}(\rho_n + \rho_{n+1}), \ n = 0,1,\ldots.$$

Пусть $B_n = B_{\rho_n}$, $\overline{B}_n = B_{\bar\rho_n}$, $Q_n \equiv B_n \times (T_n, T)$, $\overline{Q}_n \equiv \overline{B}_n \times (T_{n+1}, T)$. Рассмотрим гладкую срезающую функцию $\zeta_n(x,t)$ в Q_n, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\zeta_n = 1, \quad (x,t) \in \overline{Q}_n, \quad |\nabla\zeta_n| \leqslant \frac{2^{n+2}}{\rho}, \quad 0 \leqslant \frac{\partial\zeta_n}{\partial t} \leqslant 2^{n+2}T.$$

Пусть $k > 0$ и $k_n = k - k/2^{n+1}$, $n = 0,1,2,\ldots$.

Предположим, что

$$f(x,t) \in L_\infty(0,T : L_s(B_\rho)) \cap L_p(0,T; \overset{\circ}{W}{}^1_{p,w}(B_\rho)), \quad s,p > 1.$$

Тогда, пользуясь весовым мультипликативным неравенством работы [1], легко установить неравенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_{B_\rho} |f(x,t)|^q\,dxdt \leqslant c\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\int\limits_{B_\rho}|f|^s\,dx\right)^{(p-N(\mu-1))/N}\int\limits_0^T\int\limits_{B_\rho} w|\nabla f|^p\,dxdt,$$

$$q = p + \frac{s}{N}(p - N(\mu-1)). \tag{16}$$

Возьмем в интегральном тождестве (7) $\eta = (u-k_n)_+^{p-1}\zeta_n^p$. После несложных преобразований [2], пользуясь определением $K(T)$, получим

$$\sup_{T_{n+1}\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\overline{B}_n(t)} v_n^s\,dx + \iint\limits_{\overline{Q}_n} w|\nabla v_n|^p\,dxdt \leqslant c2^{np}K(T)\iint\limits_{Q_n} v_n^s\,dxdt, \tag{17}$$

где $v_n = (u-k_n)_+^{2(p-1)/p}$, $s = p^2/2(p-1)$. Из (17) с помощью неравенства (16) находим

$$\begin{aligned}\iint\limits_{Q_{n+1}} v_{n+1}^q\,dx\,dt &\leqslant \iint\limits_{\overline{Q}_n} |v_{n+1}\zeta_n|^q\,dx\,d\tau \\ &\leqslant c\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}\left\{\iint\limits_{\overline{Q}_n} w|\nabla v_n|^p\,dx\,d\tau + \frac{2^{np}}{\rho^p}\iint\limits_{\overline{Q}_n} wv_n^p\,dx\,d\tau\right\} \\ &\quad\times\left(\sup_{T_{n+1}\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\overline{B}_n(t)} v_n^s\,dx\right)^{(p-N(\mu-1))/N} \\ &\leqslant c\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}[K(T)]^{1+(p-N(\mu-1))/N}\left[\iint\limits_{Q_n} v_n^s\,dx\,d\tau\right]^{1+(p-N(\mu-1))/N}. \end{aligned} \tag{18}$$

Из (18), используя неравенство Гёльдера и оценку

$$\begin{aligned}|A_{n+1}| \equiv \operatorname{meas} A_{n+1} &= \operatorname{meas}\{(x,t)\in Q_{n+1} \mid u(x,t) > k_{n+1}\} \\ &\leqslant k^{-p}2^{-(n+1)p}\iint\limits_{Q_n} v_n^s\,dx\,d\tau,\end{aligned}$$

выводим

$$\begin{aligned}\iint\limits_{Q_{n+1}} v_{n+1}^s\,dx\,d\tau &\leqslant \left(\iint\limits_{Q_{n+1}} v_{n+1}^q\,dx\,d\tau\right)^{s/q}|A_{n+1}|^{1-s/q} \\ &\leqslant c2^{cn}k^{-p(1-s/q)}\left[\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}\right]^{s/q}[K(T)]^{((N+p-N(\mu-1))/N)\cdot(s/q)} \\ &\quad\times\left(\iint\limits_{Q_n} v_s^n\,dx\,d\tau\right)^{(1+(p-N(\mu-1))/N)\cdot(s/q)}.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом [9, с. 98, лемма 4.7] получим, что если

$$k = c\left[\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}\right]^{N/\lambda}[K(T)]^{(N+p-N(\mu-1))/\lambda}\left[\iint\limits_{Q_0} u^p\,dx\,d\tau\right]^{(p-N(\mu-1))/\lambda},$$

то $\sup\limits_{Q_\infty} u(x,t) \leqslant k$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *В условиях леммы* 1

$$\varphi(t) \leqslant c\int_0^t \tau^{-N(p-2)/k}\varphi^{p-1}(\tau)\,d\tau + c\psi(t)^{(p-N(\mu-1))/k}, \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\psi(t) \leqslant c|\!|\!|u_0|\!|\!|_r + c\Bigg(&\int_0^t \tau^{((p+1)/pk)(p-N(\mu-1))-1}\varphi(\tau)^{(p-2)(p+1)/p}\psi(\tau)\,d\tau \\ &+ \int_0^t \tau^{(p-N(\mu-1)/pk)-1}\varphi^{(p-2)/p}(\tau)\psi(\tau)\,d\tau\Bigg),\end{aligned} \tag{20}$$

$$\psi(t)=\psi_r(t)=\sup_{\tau\in(0,t)}|||u(\cdot,\tau)|||_r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим обе части (15) на

$$\left[\frac{\omega(B_\rho)}{\rho^{N+p}}\right]^{1/(p-2)}\tau^{N/k},\quad \tau\in(t/2,t)\quad \forall t>0.$$

Вспоминая определение $K(t)$, получим, что

$$\tau^{N/k}\left[\frac{\omega(B_\rho)}{\rho^{N+p}}\right]^{1/(p-2)}\|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,B_\rho}\leqslant c\left[\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}\right]^{N/\lambda}\tau^{N/k}\left[\frac{\omega(B_\rho)}{\rho^{N+p}}\right]^{1/(p-2)}$$

$$\times\tau^{-N(p-2)/k\cdot(N+p-N(\mu-1))/\lambda}\cdot\varphi^{(p-2)((N+p-N(\mu-1))/\lambda)}\left(\int\limits_{t/4}^{t}\int\limits_{B_{2\rho}}u^p\,dxd\tau\right)^{(p-N(\mu-1))/\lambda}$$

$$+\left[\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}\right]^{N/\lambda}\tau^{N/k}\left[\frac{\omega(B_\rho)}{\rho^{N+p}}\right]^{1/(p-2)}\tau^{-(N+p-N(\mu-1))/\lambda}$$

$$\times\left(\int\limits_{t/4}^{t}\int\limits_{B_{2\rho}}u^p\,dxd\tau\right)^{(p-N(\mu-1))/\lambda}=H_1+H_2.\qquad(21)$$

Имеем

$$H_1\leqslant[\varphi(t)]^{(p-2)(N+p-N(\mu-1))/\lambda}\left(\int\limits_0^t\tau^{-N(p-2)/k}\varphi^p(\tau)\,d\tau\right)^{(p-N(\mu-1))/\lambda}$$

$$\leqslant[\varphi(t)]^{((p-2)N+(p-1)(p-N(\mu-1)))/\lambda}\left(\int\limits_0^t\tau^{-N(p-2)/k}\varphi^{p-1}(\tau)\,d\tau\right)^{(p-N(\mu-1))/\lambda}$$

$$\leqslant\frac14\varphi(t)+c\left(\int\limits_0^t\tau^{-N(p-2)/k}\varphi^{p-1}(\tau)\,d\tau\right),\qquad(22)$$

$$H_2\leqslant c[\varphi(t)]^{(p-1)(p-N(\mu-1))/\lambda}[\psi(t)]^{(p-N(\mu-1))/\lambda}$$

$$\leqslant\frac14\varphi(t)+[\psi(t)]^{(p-N(\mu-1))/k}.\qquad(23)$$

Объединяя оценки (21)–(23), приходим к (19). Докажем неравенство (20). Начнем с оценки интеграла J:

$$J=\int\limits_0^t\int\limits_{B_{2\rho}}w|\nabla u|^{p-1}\zeta^{p-1}\,dxd\tau\leqslant\left(\int\limits_0^t\int\limits_{B_{2\rho}}w\tau^{1/p}|\nabla u|^pu^{-2/p}\zeta^p\,dxd\tau\right)^{(p-1)/p}$$

$$\times\left(\int\limits_0^t\int\limits_{B_{2\rho}}w\tau^{-(p-1)/p}u^{2(p-1)/p}\,dxd\tau\right)^{1/p}=J_1^{(p-1)/p}J_2^{1/p},\qquad(24)$$

где $\zeta = \zeta(x)$ — гладкая срезающая функция шара $B_{2\rho}$. Взяв в (7) $\eta = \tau^{1/p}u^{1-2/p}\zeta^p$, оценим J_1:

$$J_1 = \int_0^t \int_{B_{2\rho}} w\tau^{1/p}|\nabla u|^p u^{-2/p}\zeta^p \, dxd\tau \leqslant \frac{c}{\rho^p}\int_0^t \int_{B_{2\rho}} w\tau^{1/p}u^{p-2/p}\, dxd\tau$$
$$+ c\int_0^t \int_{B_{2\rho}} \tau^{1/p-1}u^{2(p-1)/p}\, dxd\tau \equiv L_1 + L_2, \quad (25)$$

$$L_1 \leqslant \frac{\omega(B_{2\rho})}{\rho^{N+p}}\int_0^t \int_{B_{2\rho}} \tau^{1/p}u^{p-2/p}\, dxd\tau$$
$$\leqslant c\left(\frac{\omega(B_\rho)}{\rho^N}\right)^{-1/p}\left(\frac{\omega(B_\rho)}{\rho^{N\mu}}\right)^{-1/(p-2)}\rho^{1+k/(p-2)}$$
$$\times \int_0^t \tau^{((p+1)/pk)(p-N(\mu-1))-1}[\varphi(\tau)]^{(p-2)(p+1)/p}\psi(\tau)\, d\tau, \quad (26)$$

$$L_2 \leqslant \left(\frac{\omega(B_\rho)}{\rho^N}\right)^{-1/p}\left(\frac{\omega(B_\rho)}{\rho^{N\mu}}\right)^{-1/(p-2)}\rho^{1+k/(p-2)}$$
$$\times \left(\int_0^t \tau^{(p-N(\mu-1))/pk-1}\varphi(\tau)^{(p-2)/p}\psi(\tau)\, d\tau\right). \quad (27)$$

Кроме того,

$$J_2 \leqslant c\frac{\omega(B_\rho)}{\rho^N} L_2. \quad (28)$$

Следовательно, объединяя (24)–(28), получим, что

$$J \leqslant c\left(\frac{\omega(B_\rho)}{\rho^{N\mu}}\right)^{-1/(p-2)}\rho^{1+k/(p-2)}\left[\int_0^t \tau^{((p+1)/pk)(p-N(\mu-1))-1}\right.$$
$$\left.\times\varphi(\tau)^{(p-2)(p+1)/p}\psi(\tau)\, d\tau + \int_0^t \tau^{(p-N(\mu-1))/pk-1}\varphi^{(p-2)/2}(\tau)\psi(\tau)\, d\tau\right]^{(p-1)/p}$$
$$\times\left[\int_0^t \tau^{(p-N(\mu-1))/pk-1}\varphi^{(p-2)/p}(\tau)\psi(\tau)\, d\tau\right]^{1/p}. \quad (29)$$

Далее, взяв в (7) $\eta = \zeta^p(x)$, будем иметь

$$\int_{B_\rho} u(x,t)\, dx \leqslant \int_{B_{2\rho}} u_0(x)\, dx + \frac{c}{\rho}\int_0^t \int_{B_{2\rho}} w|\nabla u|^{p-1}\zeta^{p-1}\, dxd\tau.$$

Умножая обе части этого неравенства на

$$\rho^{-k/(p-2)}\left(\frac{\omega(B_\rho)}{\rho^{N\mu}}\right)^{1/(p-2)}$$

и пользуясь (29), находим

$$\psi(t)\leqslant c|||u_0|||_r+c\left(\int_0^t\tau^{((p+1)/pk)(p-N(\mu-1))-1}\varphi(\tau)^{(p-2)(p+1)/p}\psi(\tau)\,d\tau\right.$$
$$\left.+\int_0^t\tau^{-(p-N(\mu-1))/pk-1}\varphi^{(p-2)/p}(\tau)\psi(\tau)\,d\tau\right).$$

Лемма 2 доказана.

Из леммы 2, повторяя рассуждения работы [2], приходим к утверждению (а) теоремы.

Перейдем к доказательству утверждения (б) теоремы.

Продифференцируем обе части уравнения (1) по x_i, $i=1,\dots,N$:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_{x_i}-\operatorname{div}\left\{\left[w|\nabla u|^{p-2}\nabla u_{x_i}+(p-2)w|\nabla u|^{p-3}\frac{\partial}{\partial x_i}|\nabla u|\nabla u\right]+w_{x_i}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right\}=0. \tag{30}$$

Умножим обе части (30) на $\eta_n=2u_{x_i}(v-k)_+^\alpha\zeta_n^2$, $\alpha>0$, $v=|\nabla u|^2$, и результат проинтегрируем по Q_n. Здесь ζ_n и Q_n те же, что и при доказательстве утверждения (а) теоремы. Имеем

$$2\int_{T_n}^t\int_{B_n}\frac{\partial}{\partial t}u_{x_i}u_{x_i}(v-k)_+^\alpha\zeta_n^2\,dxd\tau=\frac{1}{\alpha+1}\int_{T_n}^t\int_{B_n}\frac{\partial}{\partial t}(v-k)_+^{\alpha+1}\zeta_n^2\,dxd\tau$$
$$\geqslant\frac{1}{\alpha+1}\int_{\overline{B}_n(t)}(v-k)_+^{\alpha+1}\,dx-\frac{2}{\alpha+1}\iint_{Q_n}(v-k)_+^{\alpha+1}\zeta_n\zeta_{nt}\,dxd\tau\quad\forall T_{n+1}<t<T. \tag{31}$$

Здесь и далее проводится суммирование по повторяющимся индексам. Кроме того, интегрируя по частям, получим [2], что

$$-\iint_{Q_n}\operatorname{div}\left\{w\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u_{x_i}+(p-2)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial}{\partial x_i}|\nabla u|\nabla u\right)\right\}\eta_n\,dxd\tau$$
$$=\iint_{Q_n\cap\{v>k\}}w|\nabla u|^{p-2}\left\{\alpha|\nabla v|^2(v-k)_+^{\alpha-1}\zeta_n^2\right.$$
$$\left.+2\sum_{i=1}^N|\nabla u_{x_i}|^2(v-k)_+^\alpha\zeta_n^2+2\nabla v(v-k)_+^\alpha\zeta_n\nabla\zeta_n\right\}dxd\tau$$
$$+(p-2)\iint_{Q_n}w|\nabla u|^{p-2}\sum_{i=1}^N|\nabla u_{x_i}|^2(v-k)_+^\alpha\zeta_n^2\,dxd\tau$$
$$+2\alpha(p-2)\iint_{Q_n\cap\{v>k\}}w|\nabla u|^{p-2}|\nabla(|\nabla u|)\nabla u|^2(v-k)^{\alpha-1}\zeta_n^2\,dxd\tau$$
$$+4(p-2)\iint_{Q_n\cap\{v>k\}}w|\nabla u|^{p-3}(\nabla(|\nabla u|)\nabla u)(v-k)^\alpha\nabla u\nabla\zeta_n\zeta_n\,dxd\tau$$

$$\geqslant \frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2} \iint\limits_{\overline{Q}_n} w|\nabla u|^{p-2}|\nabla(v-k)^{(\alpha+1)/2}|^2\, dxd\tau$$

$$- c\frac{2^{2n}}{\rho^2} \iint\limits_{Q_n} w|\nabla u|^{p-2}(v-k)_+^{\alpha+1}\, dxd\tau. \quad (32)$$

Оценим выражение

$$\iint\limits_{Q_n} \operatorname{div}\{w_{x_i}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\} 2u_{x_i}(v-k)_+^{\alpha}\zeta_n^2\, dxd\tau$$

$$= \iint\limits_{Q_n} w_{x_i}|\nabla u|^{p-2}u_{x_j}2u_{x_ix_j}(v-k)_+^{\alpha}\zeta_n^2\, dxd\tau$$

$$- \iint\limits_{Q_n} w_{x_i}|\nabla u|^{p-2}u_{x_i}2u_{x_i}\alpha(v-k)_+^{\alpha-1}v_{x_j}\zeta_n^2\, dxd\tau$$

$$- \iint\limits_{Q_n} w_{x_i}|\nabla u|^{p-2}u_{x_j}2u_{x_i}(v-k)_+^{\alpha}2\zeta_n\zeta_{n_{x_j}}\, dxd\tau \equiv A_1 + A_2 + A_3. \quad (33)$$

Применяя неравенство Юнга, получим

$$A_1 \leqslant \iint\limits_{Q_n} |\nabla w|\, |\nabla u|^{p-2}\big|(u_{x_j}^2)_{x_i}\big|(v-k)_+^{\alpha}\zeta_n^2\, dxd\tau$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon_1}{2} \iint\limits_{Q_n} w|\nabla u|^{p-2}\big|(u_{x_j}^2)_{x_i}\big|^2(v-k)_+^{\alpha-1}\zeta_n^2\, dxd\tau$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon_1} \iint\limits_{Q_n} \frac{|\nabla w|^2}{w}|\nabla u|^{p-2}(v-k)_+^{\alpha+1}\zeta_n^2\, dxd\tau; \quad (34)$$

$$A_2 \leqslant 2\alpha \iint\limits_{Q_n} |\nabla w|\, |\nabla u|^{p-2}|\nabla u|(v-k)_+^{\alpha-1}|\nabla(|\nabla u|^2)|\zeta_n^2\, dxd\tau$$

$$\leqslant \varepsilon_2\alpha \iint\limits_{Q_n} w|\nabla u|^{p-2}|\nabla v|^2(v-k)_+^{\alpha-1}\zeta_n^2\, dxd\tau$$

$$+ \frac{\alpha}{\varepsilon_2} \iint\limits_{Q_n} \frac{|\nabla w|^2}{w}|\nabla u|^{p-2}v^2(v-k)_+^{\alpha-1}\zeta_n^2\, dxd\tau; \quad (35)$$

$$A_3 \leqslant c\frac{2^n}{\rho} \iint\limits_{Q_n} |\nabla w|\, |\nabla u|^{p-2}v(v-k)_+^{\alpha}\, dxd\tau$$

$$\leqslant c2^n \iint\limits_{Q_n} \frac{|\nabla w|^2}{w}|\nabla u|^{p-2}v(v-k)_+^{\alpha}\, dxd\tau. \quad (36)$$

При выводе (36) мы воспользовались неравенством

$$\frac{|\nabla w|}{\rho} \leqslant c\frac{|\nabla w|^2}{w},$$

которое следует из неравенств (5) и (11). Объединяя неравенства (31)–(36), выводим

$$\sup_{T_{n+1}\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\overline{B}_n(t)}(v-k)_+^{\alpha+1}\,dx+\iint\limits_{\overline{Q}_n}w|\nabla u|^{p-2}|\nabla(v-k)_+^{(\alpha+1)/2}|^2\,dxd\tau$$
$$\leqslant c2^{2n}\left\{\frac{1}{T}\iint\limits_{Q_n}(v-k)_+^{\alpha+1}\,dxdt+\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{Q_n}w|\nabla u|^{p-2}(v-k)_+^{\alpha+1}\,dxdt\right.$$
$$\left.+\iint\limits_{Q_n}\frac{|\nabla w|^2}{w}|\nabla u|^{p-2}(v-k)_+^{\alpha-1}v^2\,dxd\tau\right\}\leqslant c2^{2n}\left\{\frac{1}{T}\iint\limits_{Q_n}(v-k)_+^{\alpha+1}\,dxdt\right.$$
$$\left.+\iint\limits_{Q_n}\frac{|\nabla w|^2}{w}|\nabla u|^{p-2}v^2(v-k)_+^{\alpha-1}\,dxdt\right\}. \tag{37}$$

Возможны два случая:

$$\rho^{1/(N+2)}\omega(B_\rho)\leqslant c\frac{|\nabla w|^2}{w}\equiv w_1(x),\quad x\in B_\rho, \tag{38}$$
$$\rho^{1/(N+2)}\omega(B_\rho)>cw_1(x),\quad x\in B_\rho. \tag{39}$$

Мы ограничимся рассмотрением первого случая, второй рассматривается аналогично с некоторыми упрощениями. Введем следующие характеристики:

$$\begin{gathered}F(t)=\sup_{\tau\in(0,t)}\tau^{(N+1)/k}\sup_{\rho\geqslant r>0}\left\|w_1^{1/(p-2)}\nabla u\right\|_{\infty,B_\rho},\\ H(t)=\frac{1}{t}+t^{-((N+1)/k)(p-2)}[F(t)]^{p-2}.\end{gathered} \tag{40}$$

Пусть $k_n=k-k/2^{n+1}$, $n=0,1,2,\ldots,k>0$,

$$A_n\equiv\{(x,t)\in Q_n\mid v(x,t)>k_n\}.$$

Очевидно, что

$$\begin{gathered}|A_n|\leqslant 2^{(\alpha+1)n}k^{-(\alpha+1)}\iint\limits_{Q_{n-1}}(v-k_{n-1})_+^{\alpha+1}\,dxdt,\\ |\nabla u|^{p-2}\frac{|\nabla w|^2}{w}\leqslant ct^{-(N+1)(p-2)/k}[H(t)]^{p-2},\\ |\nabla u|^{p-2}\geqslant\left(\frac{1}{2}k\right)^{(p-2)/2}.\end{gathered} \tag{41}$$

Далее, имеем

$$\iint\limits_{Q_n}v^2(v-k_n)_+^{\alpha-1}\,dxdt\leqslant 2\iint\limits_{Q_n}(v-k_n)_+^{\alpha+1}\,dxdt+2k_n^2\iint\limits_{Q_n}(v-k_n)_+^{\alpha-1}\,dxdt. \tag{42}$$

Учитывая неравенство Гёльдера и (41), получим соотношение

$$\iint\limits_{Q_n}(v-k_n)_+^{\alpha-1}\,dxd\tau\leqslant|A_n|^{2/(\alpha+1)}\left(\iint\limits_{Q_n}(v-k_n)_+^{\alpha+1}\,dxd\tau\right)^{(\alpha-1)/(\alpha+1)}$$
$$\leqslant 2^{(\alpha+1)n/(\alpha+1)}k^{-2}\iint\limits_{Q_{n-1}}(v-k_{n-1})^{\alpha+1}\,dxd\tau. \tag{43}$$

Из (37) с учетом (37), (40)–(43) находим

$$\sup_{T_{n+1}\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\overline{B}_n(t)}(v-k_n)_+^{\alpha+1}\,dx+k^{(p-2)/2}\iint\limits_{\overline{Q}_n(t)}w\big|\nabla(v-k_n)^{(\alpha+1)/2}\big|_+^2\,dxd\tau$$
$$\leqslant c2^{3n}H(T)\iint\limits_{Q_{n-1}}(v-k_{n-1})_+^{\alpha+1}\,dxd\tau. \quad (44)$$

Пусть $v_n=(v-k_n)_+^{(\alpha+1)/2}$. Воспользуемся мультипликативным неравенством (16) при $q=2\frac{2+N-N(\mu-1)}{N}$; тогда

$$\iint\limits_{Q_{n+1}}v_n^{2(2+N-N(\mu-1))/N}\,dxd\tau\leqslant c\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}\Bigg[\iint\limits_{\overline{Q}_n}w|\nabla v_n|^2\,dxdt$$
$$+\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{\overline{Q}_n}wv_n^2\,dxdt\Bigg]\Bigg[\sup_{T_{n+1}\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\overline{B}_\rho(t)}v_n^2\,dx\Bigg]^{(2-N(\mu-1))/N}. \quad (45)$$

Выбирая k из соотношения

$$0<k<\left[\frac{\rho^{N+2}}{\omega(B_\rho)}\right]^{2/(p-2)}T^{-2(N+1)/k}F^2(T), \quad (46)$$

получим, что

$$\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{\overline{Q}_n}wv_n^2\,dxd\tau\leqslant c\frac{k^{(p-2)/2}\omega(B_\rho)}{\rho^{N+2}k^{(p-2)/2}}\iint\limits_{\overline{Q}_n}v_n^2\,dxdt\leqslant c\frac{H(T)}{k^{(p-2)/2}}\iint\limits_{\overline{Q}_n}v_n^2\,dxdt. \quad (47)$$

Применяя неравенство Гёльдера и учитывая (44), (41), (45), (47), имеем

$$\iint\limits_{Q_{n+1}}v_{n+1}^{2(2+N-N(\mu-1))/N}\,dxdt$$
$$\leqslant c\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}H(T)^{(N+2-N(\mu-1))/N}k^{-(p-2)/2}\Bigg[\iint\limits_{Q_n}v_n^2\,dxdt\Bigg]^{(N+2-N(\mu-1))/N},$$

$$\iint\limits_{Q_{n+1}}v_{n+1}^2\,dxdt\leqslant c\left[\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}\right]^{N/(N+2-N(\mu-1))}$$
$$\times H(T)k^{-(p-2)/2\cdot N/(N+2-N(\mu-1))-(\alpha+1)(2-N(\mu-1))/(N+2-N(\mu-1))}$$
$$\times\Bigg[\iint\limits_{Q_{n-1}}v_{n-1}^2\,dxdt\Bigg]^{1+(2-N(\mu-1))/(N+2-N(\mu-1))}. \quad (48)$$

Согласно [9, с. 98, лемма 4.7] из (48) выводим, что если

$$\iint\limits_{Q_0}\left(v-\frac{k}{2}\right)_+^{\alpha+1}dxdt$$
$$\leqslant c\left[\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}\right]^{-N/(2-N(\mu-1))}[H(T)]^{-(N+2-N(\mu-1))/(2-N(\mu-1))}k^{\sigma/2(2-N(\mu-1))}, \quad (49)$$

$$\sigma = N(p-2) + 2(\alpha+1)[2 - N(\mu-1)],$$

то $\sup\limits_{Q_\infty} v \leqslant k$. Следовательно, если положить

$$k = \left[\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}\right]^{2N/\sigma} [H(T)]^{2/\sigma(N+2-N(\mu-1))} \left(\int\limits_{T/4}^{T}\int\limits_{B_{2\rho}} |\nabla u|^{2(\alpha+1)}\, dxdt\right)^{2/\sigma(2-N(\mu-1))},$$

то будет

$$\|\nabla u\|_{\infty,B_\rho} \leqslant c[H(T)]^{(N+2-N(\mu-1))/\sigma} \left[\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}\right]^{N/\sigma} \times \left(\int\limits_{T/4}^{T}\int\limits_{B_{2\rho}} |\nabla u|^{2(\alpha+1)}\, dxdt\right)^{(2-N(\mu-1))/\sigma}. \quad (50)$$

Если k не удовлетворяет условию (46), то

$$\left[\frac{\rho^{N+2}}{\omega(B_\rho)}\right]^{1/(p-2)} T^{-(N+1)/k} F(T) \leqslant \left[\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}\right]^{N/\sigma} [H(T)]^{(N+2-N(\mu-1))/\sigma} \times \left[\int\limits_{T/4}^{T}\int\limits_{B_{2\rho}} |\nabla u|^{2(\alpha+1)}\, dxdt\right]^{(2-N(\mu-1))/\sigma}. \quad (51)$$

Вспоминая определение $F(T)$ и используя условие (38), из (51) вновь получаем (50).

Выберем $\alpha = \frac{p-2}{2-N(\mu-1)}$, $2(\alpha+1) = 2\left(\frac{p-N(\mu-1)}{2-N(\mu-1)}\right)$. Тогда

$$\int\limits_{T/4}^{T}\int\limits_{B_{2\rho}} |\nabla u|^{2(\alpha+1)}\, dxdt = \int\limits_{T/4}^{T}\int\limits_{B_{2\rho}} w|\nabla u|^p w^{-1} |\nabla u|^{(p-2)N(\mu-1)/(2-N(\mu-1))}\, dxdt$$

$$\leqslant c\int\limits_{T/4}^{T}\int\limits_{B_{2\rho}} w|\nabla u|^p \left(\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}\right)^{2/(2-N(\mu-1))} [w_1^{1/(p-2)}|\nabla u|]^{(p-2)N(\mu-1)/(2-N(\mu-1))}\, dxdt$$

$$\leqslant c[H(T)]^{N(\mu-1)/(2-N(\mu-1))} \left(\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}\right)^{2/(2-N(\mu-1))} \int\limits_{T/4}^{T}\int\limits_{B_{2\rho}} w|\nabla u|^p\, dxdt. \quad (52)$$

При выводе (52) мы воспользовались свойством (11), из которого вытекает, что

$$\frac{w^{-1} w^{N(\mu-1)/(2-N(\mu-1))}}{|\nabla w|^{2N(\mu-1)/(2-N(\mu-1))}} \leqslant c\left(\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}\right)^{2/(2-N(\mu-1))}.$$

Следовательно, неравенство (50) влечет соотношение

$$\|\nabla u\|_{\infty,B_\rho} \leqslant c\left[\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}\right]^{(N+2)/\sigma} [H(T)]^{(N+2)/\sigma} \left[\int\limits_{T/4}^{T}\int\limits_{B_{2\rho}} w|\nabla u|^p\, dxdt\right]^{(2-N(\mu-1))/\sigma}. \quad (53)$$

Пусть $\widehat{T} = \sup\{t\}$ для любых t, $0 < t \leqslant \widehat{T}$, таких, что

$$[F(t)]^{p-2} t^{-((N+1)/k)(p-2)} \leqslant \frac{1}{t}. \tag{54}$$

Для этих t из (53) получим, что

$$\|\nabla u\|_{\infty, B_\rho} \leqslant c \left[\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}\right]^{(N+2)/\sigma} \left(\frac{1}{t}\right)^{(N+2)/\sigma} \left[\int\limits_{t/4}^{t} \int\limits_{B_{2\rho}} w|\nabla u|^p \, dx d\tau\right]^{(2-N(\mu-1))/\sigma}. \tag{55}$$

Для оценки интеграла в правой части (55) возьмем в интегральном тождестве (7) $\Omega = B_{4\rho}$, $\eta = \zeta^p u$, где $\zeta(x,t)$ — гладкая срезающая функция в $B_{4\rho} \times (t/8, t)$, равная единице на $B_{2\rho} \times (t/4, t)$ и такая, что $|\nabla\zeta| \leqslant 4/\rho$, $0 \leqslant \zeta_t \leqslant 8/3 \cdot t$. После стандартных преобразований получим

$$\int\limits_{t/4}^{t} \int\limits_{B_{2\rho}} w|\nabla u|^p \, dx d\tau \leqslant \frac{c}{\rho^p} \int\limits_{t/8}^{t} \int\limits_{B_{4\rho}} w u^p \, dx d\tau + \frac{c}{t} \int\limits_{t/8}^{t} \int\limits_{B_{4\rho}} u^2 \, dx d\tau.$$

Умножая обе части неравенства (55) на

$$\tau^{(N+1)/k} \left[\frac{\omega(B_\rho)}{\rho^{N+2}}\right]^{1/(p-2)},$$

с учетом последнего неравенства запишем

$$\begin{aligned}
\tau^{(N+1)/k} &\left[\frac{\omega(B_\rho)}{\rho^{N+2}}\right]^{1/(p-2)} \|\nabla u(\cdot, \tau)\|_{\infty, B_\rho} \\
&\leqslant c\tau^{(N+1)/k-(N+2)/\sigma} \left[\frac{\omega(B_\rho)}{\rho^{N+2}}\right]^{1/(p-2)} \left[\frac{\rho^{N\mu}}{\omega(B_\rho)}\right]^{(N+2)/\sigma} \\
\times &\left[\frac{1}{t} \int\limits_{t/8}^{t} \int\limits_{B_{4\rho}} u^2 \, dx dt + \frac{\omega(B_\rho)}{\rho^{N+p}} \int\limits_{t/8}^{t} \int\limits_{B_{4\rho}} u^p \, dx d\tau\right]^{(2-N(\mu-1))/\sigma} \equiv G_1 + G_2.
\end{aligned} \tag{56}$$

Учитывая равенства

$$\frac{N+1}{k} - \frac{N+2}{\sigma} = \frac{N(2-N(\mu-1))}{\sigma k},$$

$$\frac{1}{p-2} - \frac{N+2}{\sigma} - \frac{2}{p-2} \frac{2-N(\mu-1)}{\sigma} = 0,$$

$$-\frac{N+2}{p-2} + N\mu\frac{(N+2)}{\sigma} + \frac{N+p+k+N\mu}{p-2} \frac{2-N(\mu-1)}{\sigma} = 0,$$

получим, что

$$G_1 \leqslant c \left[\int\limits_{t/8}^{t} \tau^{-1} \varphi(\tau)\psi(\tau) \, d\tau\right]^{(2-N(\mu-1))/\sigma},$$

$$G_2 \leqslant c \left[\int\limits_{t/8}^{t} \tau^{-N(p-2)/k} (\varphi(\tau))^{p-1} \psi(\tau) \, d\tau\right]^{(2-N(\mu-1))/\sigma}.$$

Следовательно, из (56) имеем

$$t^{(N+1)/k}\|\nabla u(\cdot,t)\|_{\infty,B_\rho}\left(\frac{\omega(B_\rho)}{\rho^{N+2}}\right)^{1/(p-2)}\leqslant c\left[\int\limits_{t/8}^{t}\tau^{-1}\varphi(\tau)\psi(\tau)\,d\tau\right]^{(2-N(\mu-1))/\sigma}$$
$$+c\left[\int\limits_{t/8}^{t}\tau^{-N(p-2)/k}\varphi^{p-1}(\tau)\psi(\tau)\,d\tau\right]^{(2-N(\mu-1))/\sigma}\leqslant c|||u_0|||_r^{(2-N(\mu-1))/k}.$$

Здесь мы воспользовались также неравенствами (9) и (10) для $\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$. Таким образом, неравенство (12) доказано для всех t, удовлетворяющих условию (54). Осталось показать, что (12) справедливо для всех t, удовлетворяющих неравенству (8). Отметим, во-первых, что из условия (54) для $0<t<\widehat{T}$ вытекает неравенство

$$\frac{|\nabla w|^2}{w}|\nabla u|^{p-2}t\leqslant 1. \tag{57}$$

С другой стороны, по определению $F(t)$ и $\widehat{T}$ существуют $(x_0,\bar{t})$, $|x_0|=\bar{\rho}$ такие, что

$$\frac{|\nabla w(x_0)|}{w(x_0)}|\nabla u(x_0,\bar{t})|^{p-2}\bar{t}\geqslant\frac{1}{2}, \tag{58}$$

причем $0<\bar{t}<\widehat{T}$ (напомним, что мы всегда предполагаем решение $u(x,t)$ достаточно гладким).

Пусть $\widetilde{w}_1(\rho)=\sup\limits_{|x|=\rho}w_1(x)$. Для всех $0<t<\widehat{T}$ с учетом (11) имеем

$$\begin{aligned}\widetilde{w}_1(\rho)t\|\nabla u\|_{\infty,B_\rho}^{p-2}&\leqslant ct^{(2-N(\mu-1))/k}\left[\frac{\rho^{N+2}}{\omega(B_\rho)}\right]\widetilde{w}_1(\rho)|||u_0|||_r^{(p-2)(2-N(\mu-1))/k}\\&\leqslant ct^{(2-N(\mu-1)/k}|||u_0|||_r^{(p-2)(2-N(\mu-1))/k},\end{aligned} \tag{59}$$

где $\widetilde{w}_1(\rho)=\sup\limits_{|x|=\rho}\frac{|\nabla w|^2}{w}$. Выберем t^* из условия

$$\frac{1}{t^*}=\theta|||u_0|||_r^{p-2}, \tag{60}$$

где $\theta>0$ выбирается так, что

$$\widetilde{w}_1(\rho)t^*\|\nabla u\|_{\infty,B_\rho}^{p-2}\leqslant\frac{1}{4}\quad\forall\rho>0.$$

Тогда очевидно, что $0<t^*<\bar{t}$, в противном случае при $\rho=\bar{\rho}$, $t=\bar{t}$ мы пришли бы к противоречию с неравенством (57). Следовательно, для всех $0<t<t^*$ выполнено неравенство (54). Теперь, выбирая постоянную c_0 в (8) подходящим образом (очевидно, что c_0 не зависит от T, ρ, $|||u_0|||_r$, а зависит только от данных задачи), получим, что при всех t, удовлетворяющих условию (8), выполнены (57) и, следовательно, оценка (12). Теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chanillo S., Wheeden R. L.* Weighted Poincaré and Sobolev inequalities and estimates for weighted Peano maximal functions // Amer. J. Math. 1985. V. 107. N. 5. P. 1191–1226.
2. *Di Benedetto E., Herrero M. A.* On the Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equation // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 314, N 1. P. 187–224.
3. *Alikakos N. D., Rostamian R.* Gradient estimates for degenerate diffusion equations. II // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1981/82. V. 91, N 3–4. P. 335–346.
4. *Herrero M. A., Vazquez J. L.* Asymptotic behavior of the solutions of a strongly nonlinear parabolic problem // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5). 1981. V. 3, N 2. P. 113–127.
5. *Di Benedetto E., Friedman A.* Regularity of solutions of nonlinear degenerate parabolic systems // J. Reine Angew. Math. 1984. V. 349. P. 83–128.
6. *Alikakos N. D., Evans L. C.* Continuity of the gradient for weak solutions of a degenerate parabolic equation // J. Math. Pures Appl. (9). 1983. V. 62. P. 253–268.
7. *Скрыпник И. И.* Регулярность решений вырождающихся квазилинейных параболических уравнений (весовой случай) // Укр. мат. журн. 1995. Т. 47, № 11. С. 1590–1605.
8. *Alikakos N. D., Rostamian R.* Gradient estimates for degenerate diffusion equations // Math. Ann. 1982. V. 259, N 1. P. 53–70.
9. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1973.

г. Донецк *Статья поступила 30 мая 1995 г.*