



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Р. Левитин, О спектре собственных колебаний оболочки, заполненной вязкой сжимаемой жидкостью, *Докл. АН СССР*, 1987, том 295, номер 6, 1355–1358

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

20 марта 2025 г., 15:10:33



М.Р. ЛЕВИТИН

О СПЕКТРЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧКИ,
ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ*(Представлено академиком П.Я. Кочиной 12 VI 1986)*

1. Рассматривается тонкая упругая оболочка с толщиной h и срединной поверхностью $\Gamma \in C^\infty$. Оболочка ограничивает конечный объем $G \subset R^3$, заполненный вязкой сжимаемой жидкостью. Состояние оболочки описывается вектором перемещений $U(\alpha) = \text{col}(U_1, U_2, U_3)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ — локальные координаты на Γ . Состояние жидкости описывается вектором перемещений $Q(x) = \text{col}(Q_1, Q_2, Q_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ — декартовы координаты в G . Материал оболочки характеризуется плотностью ρ_0 , модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Жидкость характеризуется плотностью $\rho_{\text{ж}}$, скоростью звука $c_{\text{ж}}$ и коэффициентом вязкости $\eta > 0$.

Исследуются линейные свободные колебания системы оболочка — вязкая сжимаемая жидкость. Соответствующая система уравнений имеет вид

- (1) $i\rho_{\text{ж}}\Omega W = \eta\Delta W$, $\text{div } W = 0$, $x \in G$,
- (2) $-\Omega^2\Psi = (c_{\text{ж}}^2 + 4\eta i\Omega/(3\rho_{\text{ж}}))\Delta\Psi$, $x \in G$,
- (3) $Eh \cdot \mathcal{L}U = \rho_0 h\Omega^2 U - T[i\Omega(W + \nabla\Psi)]_{\Gamma} n$, $\alpha \in \Gamma$,
- (4) $(W + \nabla\Psi)|_{\Gamma} = U$, $\alpha \in \Gamma$.

В системе (1)–(4) Ω — собственная частота свободных колебаний; $\mathcal{L} = \|\mathcal{L}_{jk}\|_{j,k=1}^3$ — матричный дифференциальный самосопряженный оператор теории оболочек (см. [1]); $T[V]_{\Gamma}$ — тензор напряжений жидкости на Γ (см. [2]); $V = i\Omega Q = i\Omega(W + \nabla\Psi)$ — скорость точки жидкости, в которой выделен трехмерный соленоидальный вектор W и потенциальный вектор $\nabla\Psi$; n — единичная нормаль к Γ .

Поясним, что (1), (2) представляют собой линеаризованные уравнения малых колебаний вязкой сжимаемой жидкости с учетом уравнений неразрывности и состояния (см. [3]), (3) и (4) — условия динамического и кинематического равновесия на Γ . Система (1)–(4) возникает после отделения в соответствующей линеаризованной динамической системе временного множителя $\exp(i\Omega t)$.

2. Собственные колебания оболочки, заполненной невязкой сжимаемой жидкостью, изучены в [4]. Соответствующая система уравнений имеет вид

- (5) $\Delta\psi + (\omega/c_{\text{ж}})^2\psi = 0$, $x \in G$,
- (6) $Eh\mathcal{L}u = \rho_0 h\omega^2 u - \rho_{\text{ж}} c_{\text{ж}}^2(\Delta\psi)|_{\Gamma} n$, $\alpha \in \Gamma$,
- (7) $\partial\psi/\partial n|_{\Gamma} = u_3$, $\alpha \in \Gamma$,

где ω — собственная частота, $u(\alpha)$ — вектор перемещений срединной поверхности, $\psi(x)$ — потенциал перемещений жидкости. Будем далее, согласно [4], обозначать $f = \text{col}(u_1, u_2, u_3, \psi)$. Уравнения (5), (6) можно записать в виде $Af = \lambda f$, где $A = \|\mathcal{A}_{jk}\|_{j,k=1}^3$ — матричный дифференциальный оператор, $\lambda = \rho_0 h\omega^2$ — новый спектральный параметр.

В дальнейшем мы существенно используем следующие два утверждения из [4].

Т е о р е м а 1 [4]. *Линейный оператор A , соответствующий задаче (5)–(7), самосопряжен и неотрицателен в гильбертовом пространстве \mathcal{H} столбцов вида*

$f = \text{col}(u, \psi)$ со скалярным произведением

$$(8) \quad (f^{(1)}, f^{(2)})_{\mathcal{H}} = \rho_0 h(u^{(1)}, u^{(2)})_{L_2(\Gamma)} + \rho_{\text{ж}}(\nabla \psi^{(1)}, \nabla \psi^{(2)})_{L_2(\Gamma)}.$$

Теорема 2 [4]. Спектр оператора A дискретен, веществен и неотрицателен, а соответствующие собственным значениям λ собственные векторы $f = \text{col}(u, \psi)$ можно выбрать вещественными.

Всюду далее для определенности $\omega > 0$ – простая собственная частота невязкой задачи (5)–(7).

3. Будем рассматривать $\epsilon = \eta^{1/2}$ как малый параметр. В этом пункте описан итерационный процесс, позволяющий находить собственные частоты Ω и формы колебаний U, Ψ, W вязкой задачи (1)–(4), отправляясь от собственных частот ω и форм колебаний u, ψ невязкой задачи (5)–(7).

Положим $\Omega^{(0)} = \omega, U^{(0)} = u, \Psi^{(0)} = \psi, W^{(0)} = 0$ (верхний индекс – номер итерации). Пусть мы знаем $\Omega^{(r)}, U^{(r)}, \Psi^{(r)}$. Находим $W^{(r+1)}$, решая задачу

$$(9) \quad i\rho_{\text{ж}} \Omega^{(r)} W^{(r+1)} = \epsilon^2 \Delta W^{(r+1)}, \quad \text{div } W^{(r+1)} = 0, \quad x \in G,$$

$$(10) \quad W_{\tau}^{(r+1)}|_{\Gamma} = U_{\tau}^{(r)} - \nabla_{\tau} \Psi^{(r)}|_{\Gamma}, \quad \alpha \in \Gamma;$$

индексом τ здесь и далее обозначаются тангенциальные компоненты векторов и операторов. Задача (9), (10) близка к задаче Стокса, описывающей колебания вязкой несжимаемой жидкости. Разрешимость этой и последующих задач обсуждается ниже, см. п. 4.

Пусть далее $f^{(r)} = \text{col}(U^{(r)}, \Psi^{(r)})$. Подставляя в (2), (3) и в третье граничное условие из (4) неизвестные $\Omega^{(r+1)}, f^{(r+1)}$ и найденный вектор $W^{(r+1)}$, запишем полученную в результате подстановки систему в виде возмущенной невязкой задачи

$$(11) \quad Af^{(r+1)} = \rho_{\text{ж}} h \omega^2 f^{(r+1)} + g^{(r+1)},$$

$$(12) \quad \partial \Psi^{(r+1)} / \partial n|_{\Gamma} = U_3^{(r+1)} - W_3^{(r+1)}|_{\Gamma}.$$

Поясним, что в выражения для компонент столбца $g^{(r+1)}$ входят $\Omega^{(r+1)}, f^{(r+1)}$ и уже найденное $W^{(r+1)}$.

Домножая (11) скалярно в смысле (8) на $f^{(0)} = \text{col}(u, \psi)$ и формально заменяя в полученном уравнении все вхождения $f^{(r+1)}$ в $g^{(r+1)}$ на $f^{(r)}$ (результат замены обозначим в (11) через $g_*^{(r+1)}$), приходим с учетом (12) к равенству

$$(13) \quad (g_*^{(r+1)}, f^{(0)})_{\mathcal{H}} = -\rho_0 h \rho_{\text{ж}} c_{\text{ж}}^2 \iint_{\Gamma} (W_3^{(r+1)} \Delta \psi)|_{\Gamma} dS,$$

которое представляет собой квадратное уравнение относительно $\Omega^{(r+1)}$. Находим $\Omega^{(r+1)}$ с условием $\text{Im } \Omega^{(r+1)} \geq 0$. Теперь, решая задачу (11), (12), где $g^{(r+1)}$ заменено на $g_*^{(r+1)}$, находим $f^{(r+1)}$; поясним, что здесь берется решение, удовлетворяющее условию $(f^{(r+1)}, f^{(0)})_{\mathcal{H}} = (f^{(0)}, f^{(0)})_{\mathcal{H}}$.

4. Теорема 3. При достаточно малом ϵ для любого $r = 0, 1, 2, \dots$ существуют единственные решения $W^{(r)} \in H_2(G), \Omega^{(r)}, \text{Im } \Omega^{(r)} \geq 0, U^{(r)} \in H_{2,2,4}(\Gamma), \Psi^{(r)} \in H_3(G)$, и имеют место оценки

$$(14) \quad \|W^{(r+1)} - W^{(r)}\|_{H_{\sigma}(G)} \leq C_{\sigma} \epsilon^{r+1/2-\sigma}, \quad \sigma \in [0, 2],$$

$$(15) \quad |\Omega^{(r+1)} - \Omega^{(r)}| \leq C_3 \epsilon^{r+1},$$

$$(16) \quad \|U^{(r+1)} - U^{(r)}\|_{H_{2,2,4}(\Gamma)} \leq C_4 \epsilon^{r+1},$$

$$(17) \quad \|\Psi^{(r+1)} - \Psi^{(r)}\|_{H_3(G)} \leq C_5 \epsilon^{r+1},$$

где $H_1(G, \Gamma)$ – пространства Соболева, а C_σ, C_l – константы, не зависящие от ϵ и r . Таким образом, при достаточно малой вязкости $\eta = \epsilon^2$ итерационный процесс сходится при $r \rightarrow +\infty$.

Доказательство теоремы 3 проводится по индукции и существенно опирается на работы [5] и [4]. Оно нетривиально, и его подробное изложение выходит за рамки настоящей работы.

5. Справедлива следующая

Теорема 4. При $\epsilon \rightarrow +0$ имеют место следующие сходящиеся разложения:

$$(18) \quad \Omega = \sum_{k=0}^s \epsilon^k \omega_k + O(\epsilon^{s+1}),$$

$$(19) \quad U(\alpha) = \sum_{k=0}^s \epsilon^k u_k(\alpha) + O(\epsilon^{s+1}), \quad \alpha \in \Gamma,$$

$$(20) \quad \Psi(x) = \sum_{k=0}^s \epsilon^k \psi_k(x) + O(\epsilon^{s+1}), \quad x \in G,$$

а также асимптотические разложения в некоторой окрестности S_Γ поверхности Γ

$$(21) \quad W(\alpha, \gamma) = \left(\sum_{k=0}^s \epsilon^k w_k(\alpha, \gamma) + O(\epsilon^{s+1}) \right) \exp \left(-\frac{\sqrt{i\rho_{\text{ж}} \omega}}{\epsilon} \gamma \right), \quad \alpha \in \Gamma.$$

Здесь $\gamma \geq 0$ – расстояние до оболочки по направлению внешней нормали n , $\omega_0 = \omega$, $u_0 = u$, $\psi_0 = \psi$. Оценки O -членов равномерны в (19) по $\alpha \in \Gamma$, в (20) по $x \in G$, в (21) по $x = \alpha - n\gamma \in S_\Gamma$ и выдерживают дифференцирование. При $x \in G \setminus S_\Gamma$ вектор-функция $W(x)$ и все ее производные асимптотически удовлетворяют оценке $O(\epsilon^{+\infty})$.

Вычисляя явно первую поправку $W^{(1)}$ из (9), (10) в виде отрезка ряда (21), находим

$$w_{\tau,0} = \frac{u_\tau - \nabla_\tau \psi|_\Gamma}{\sqrt{1 - 2H\gamma + K\gamma^2}},$$

$$w_{3,0} = 0, \quad w_{3,1} = -\frac{\text{div}_\tau(u_\tau - \nabla_\tau \psi|_\Gamma)}{\sqrt{1 - 2H\gamma + K\gamma^2}},$$

где $H(\alpha)$, $K(\alpha)$ – средняя и гауссова кривизны оболочки. Согласно процедуре пункта 3 определяем

$$(22) \quad \Omega - \omega = \epsilon \omega_1 + O(\epsilon^2) =$$

$$= \frac{i^{3/2} \rho_{\text{ж}}^{1/2} \omega^{1/2} \|u_\tau - \nabla_\tau \psi|_\Gamma\|_{L_2(\Gamma)}^2}{2(\rho_0 h \|u\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \rho_{\text{ж}} \|\nabla \psi\|_{L_2(G)}^2)} \sqrt{\eta} + O(\eta).$$

Формула (22) показывает, что при введении вязкости точки спектра сдвигаются в комплексную область под углом 135° , а величина сдвига пропорциональна корню из вязкости и в значительной мере зависит от формы и характера рассматриваемого невязкого колебания.

В случае сферической оболочки задача (1)–(4) допускает точное решение, поскольку переменные разделяются [3]. Приведем значения величины относительного сдвига $\delta = (\Omega - \omega)/\omega$ первой квазитангенциальной собственной частоты (см. [6])

осесимметричных колебаний дюралюминиевой сферы с различными заполнителями (индекс 1 соответствует точному решению, индекс 2 — асимптотике (22)).

Вода:

$$\delta_1 = (-3,200 + i \cdot 3,198) \cdot 10^{-4},$$

$$\delta_2 = (-3,200 + i \cdot 3,200) \cdot 10^{-4}.$$

Глицерин:

$$\delta_1 = (-1,816 + i \cdot 1,756) \cdot 10^{-2},$$

$$\delta_2 = (-1,817 + i \cdot 1,817) \cdot 10^{-2}.$$

Численные результаты подтверждают высокую эффективность формулы (22).

Автор искренне благодарит В.Б. Лидского и Д.Г. Васильева за постановку задачи и большую помощь в работе.

Московский физико-технический институт

Поступило
9 VII 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. М.: Наука, 1986, т. 6. 736 с.
3. Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Методы расчета оболочек. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. Киев, 1982, т. 5. 400 с.
4. Асланян А.Г., Васильев Д.Г., Лидский В.Б. — Функц. анализ и его прилож., 1981, т. 15, вып. 3, с. 1–9.
5. Агранович М.С., Вишик М.И. — УМН, 1964, т. 19, вып. 3, с. 53–161.
6. Васильев Д.Г., Симонов И.В. Препринт № 186 Ин-та пробл. механики АН СССР. М.: ИПМ АН СССР, 1981. 69 с.

УДК 517.946 : 535.42

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А.Е. ПОЕДИНЧУК, Ю.А. ТУЧКИН,
академик АН УССР В.П. ШЕСТОПАЛОВ

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ВОЛНОВОГО РАССЕЯНИЯ НА НЕЗАМКНУТЫХ ЭКРАНАХ

Предлагается метод исследования двумерных спектральных краевых задач для уравнения Гельмгольца, возникающих в (стационарной) теории дифракции электромагнитных и акустических волн на тонких экранах, где роль спектрального параметра играет частота. Развитый подход принципиально отличается от известных [1–6] и основывается на процедуре регуляризации [7] оператора краевой задачи. Он применим как к гладким телам (замкнутым экранам), так и к бесконечно тонким незамкнутым экранам. Предлагаемый метод иллюстрируется на примере бесконечного и однородного в продольном направлении цилиндрического экрана произвольного гладкого профиля с граничным условием Дирихле (двухмерная задача дифракции), но развитый подход допускает обобщение как на граничные условия второго и третьего рода, так и на трехмерные краевые задачи для уравнений Гельмгольца и Максвелла.

Идея использования процедуры регуляризации при анализе спектральных краевых задач почерпнута нами из работы [8], в которой исследуется случай экра-