

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Аксентьев, О конформном отображении много-
связных областей,
Тр. сем. по краев. задачам, 1968, выпуск 5, 5–11

<https://www.mathnet.ru/kukz554>

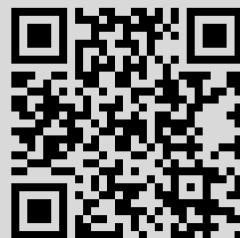
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.85

19 мая 2025 г., 21:10:12



О КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Л. А. Аксентьев

Данная статья примыкает к циклу статей [1] по применению симметрии к оператору Шварца.

В первой части исследуются отображения круговых многосвязных областей на канонические области. Все отображающие функции представлены через группу симметрии.

Во второй части проводится геометрическое описание результатов Лери [2] для круговых областей.

1. Пусть круговая область D является внешностью окружностей C_m ($|z - a_m| = R_m$), $m = 1, \dots, n$, которые находятся вне друг друга. Образует симметричное преобразование относительно окружности C_m

$$S_m(\bar{z}) = \frac{R_m^2}{\bar{z} - \bar{a}_m} + a_m = \frac{a_m \bar{z} + b_m}{\bar{z} - \bar{a}_m},$$

где $b_m = R_m^2 - |a_m|^2$. Всевозможные суперпозиции функций $S_m(\bar{z})$ дают группу симметрии для области D . Группа симметрии содержит бесконечное количество преобразований, зависящих от z и от \bar{z} :

$$\{T_k(z), T_k[S_1(\bar{z})]\}.$$

Функция

$$f(\bar{z}, z) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{z} - T_k(z)}{\bar{z} - T_k[S_1(\bar{z})]} \quad (1)$$

будет отображать область D на круг с концентрическими разрезами (при абсолютной сходимости бесконечного произведения). Докажем это иначе, чем в [1].

Преобразуем выражение для $f[S_m(\bar{z}), z]$. Предварительно обозначим $S_m T_k S_1 = U_k$. Так как преобразования S_m , $m = 1, \dots, n$, входят в группу симметрии, то группа $\{U_k(z)\}$

будет совпадать с группой $\{T_k(z)\}$. Если воспользоваться еще тем, что $S_m^2 = 1$, то получим

$$f[S_m(\bar{\zeta}), z] = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{S_m(\bar{\zeta}) - S_m\{U_k[S_1(\bar{z})]\}}{S_m(\bar{\zeta}) - S_m[U_k(z)]}. \quad (2)$$

Подставим в (2) результат нетрудных вычислений

$$S_m(\bar{\zeta}) - S_m(\bar{u}) = -R_m^2 \frac{\bar{\zeta} - \bar{u}}{(\bar{\zeta} - \bar{a}_m)(\bar{u} - \bar{a}_m)}.$$

Тогда

$$f[S_m(\bar{\zeta}), z] = \frac{H_m(z)}{f(\zeta, z)}, \quad (3)$$

где

$$H_m(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{a}_m - \overline{U_k(z)}}{\bar{a}_m - U_k[S_1(\bar{z})]} = \overline{f(a_m, z)}.$$

(Сходимость бесконечного произведения предполагается абсолютной, поэтому члены произведения можно переставлять местами.)

При стремлении ζ к $t \in C_m$ получим $S_m(\bar{t}) = t$ и из (3)

$$|f(t, z)|^2 = H_m(z). \quad (4)$$

Поэтому $H_m(z) > 0$ и $H_m(z) = f(a_m, z)$. Из (4) следует, что функция (1) будет преобразовывать окружность C_m в дугу окружности с радиусом $\sqrt{H_m(z)}$ и с центром в начале координат.

Точки z и $S_1(\bar{z})$ расположены по разные стороны от окружности C_1 . Все остальные точки $T_k(z)$, $T_k[S_1(\bar{z})]$ (для каждого фиксированного k) расположены по одну сторону от любой окружности C_m , $m = 1, \dots, n$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \text{изм}_{t \in C_m} \arg \frac{t - T_k(z)}{t - T_k[S_1(\bar{z})]} = \\ & = \begin{cases} 2\pi & \text{при } k = 0 \text{ и } m = 1 (T_0(z) = z), \\ 0 & \text{при } k \neq 0 \text{ для } m = 1 \text{ и} \\ & \text{при любом } k \text{ для } m \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что окружность C_1 переходит в окружность \tilde{C}_1 (обходимую один раз при однократном обходе C_1) и что окружности C_2, \dots, C_n будут переходить в концентрические разрезы. Если A — точка вне окружности \tilde{C}_1 , то $\text{изм}_{\zeta \in C=C_1+\dots+C_n} \arg [f(\zeta, z) - A] = 0$ и, значит, $f(\zeta, z) \neq A$ в D . Если

A — точка внутри окружности \tilde{C}_1 (но вне разрезов), то $\frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in C} \arg [f(\zeta, z) - A] = 1$. Поэтому все внутренние точки круга с концентрическими разрезами функция $f(\zeta, z)$ принимает только один раз. Итак, \tilde{D} (образ области D) является однолистной областью с внешней граничной окружностью \tilde{C}_1 , которая, следовательно, имеет наибольший радиус $\sqrt{H_1(z)}$. Принцип аргумента применяется в приведенном доказательстве точно так же, как в [3], с. 240.

Аналогично исследуются функции

$$f_m(\zeta, z) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta - T_k(z)}{\zeta - T_k[S_m(\bar{z})]}.$$

В этом случае внешней окружностью будет образ окружности C_m . Легко проверить, что функция $\frac{f_m(\zeta, z_0)}{f_m(\zeta, z_1)} = f(\zeta; z_0, z_1)$ отображает область D на плоскость с концентрическими разрезами и что $\frac{f_m(\zeta, z)}{f_p(\zeta, z)} = f_{mp}(\zeta)$ отображает D на кольцо (между концентрическими окружностями) с концентрическими разрезами.

Найдем еще несколько отображающих функций: на плоскость с радиальными разрезами, на плоскость с параллельными разрезами, на внешность выпуклых кривых.

Функция, отображающая область D на плоскость с радиальными разрезами, имеет вид

$$F(\zeta; z_0, z_1) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{[\zeta - T_k(z_0)] [\zeta - T_k[S_1(\bar{z}_0)]]}{[\zeta - T_k(z_1)] [\zeta - T_k[S_1(\bar{z}_1)]]},$$

где $z_0, z_1 \in D$. В самом деле, аналогично соотношению (3) получим

$$F[S_m(\bar{\zeta}); z_0, z_1] = \overline{F(\zeta; z_0, z_1)} / \overline{F(a_m; z_0, z_1)}.$$

Отсюда

$$\arg F(t; z_0, z_1) = \frac{\arg F(a_m; z_0, z_1)}{2}, \quad t \in C_m.$$

Для доказательства однолистности образа области D нужно применить принцип аргумента.

Если z_0 и z_1 (по отдельности или одновременно) попадают на одну и ту же или разные граничные кривые, то получаются частные виды отображающих функций. Отметим функцию, которая получается, когда t_0, t_1 находятся на

окружности C_1 , $F(\zeta; t_0, t_1) = \prod_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\zeta - T_k(t_0)}{\zeta - T_k(t_1)} \right]^2$. Разрез, в который отображается окружность C_1 , проходит вдоль луча из 0 в ∞ . Функция

$$\tilde{F}(\zeta; t_0, t_1) = \sqrt{F(\zeta; t_0, t_1)} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta - T_k(t_0)}{\zeta - T_k(t_1)}$$

отображает область D на полуплоскость с радиальными разрезами. Функция $\ln \tilde{F}(\zeta; t_0, t_1)$ переводит область D в полосу с параллельными разрезами.

Следуя М. Шифферу ([3], с. 241—243), можно по $f(\zeta, z)$ построить функцию $\varphi_z(\zeta, z)$, отображающую область D на плоскость с разрезами, параллельными заданному направлению $e^{i\alpha}$. Вычет функции $\varphi_z(\zeta, z)$ в полюсе первого порядка (при $\zeta = z$) должен быть равен 1. Выпишем формулу для

$$\varphi_z(\zeta, z) = -\frac{\partial}{\partial z} \ln f(\zeta, z) \quad (5)$$

(где $z = re^{-i\alpha}$ с фиксированным α) через группу симметрии

$$\varphi_z(\zeta, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{T'_k(z)}{\zeta - T_k(z)} + \frac{T'_k[S_1(\bar{z})] e^{i2\alpha}}{\zeta - T_k[S_1(\bar{z})]} \right). \quad (6)$$

Отметим еще функцию

$$\varphi(\zeta, z) = \frac{1}{2} [\varphi_0(\zeta, z) + \varphi_{\frac{\pi}{2}}(\zeta, z)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T'_k(z)}{\zeta - T_k(z)}, \quad (7)$$

которая отображает область D на внешность выпуклых кривых. Дополнение этого образа области D до полной плоскости имеет наибольшую возможную площадь среди площадей, соответствующих функциям, однолиственным в D и имеющим в $\zeta = z$ полюс с вычетом 1 ([3], с. 272).

Сходимость рядов (6), (7) будет обеспечена, если сойдется ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |T_k(z) - T_k[S_1(\bar{z})]|$ или эквивалентный ему ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |T'_k(z)|.$$

2. Дадим геометрическое толкование результатов Г. Лери [2] для круговой многосвязной области D . В соответствии с замечанием на стр. 115 работы [2], комплексная функция Грина для области D имеет вид

$$G(\zeta, z) + iG_1(\zeta, z) \equiv g(\zeta, z) = -\ln F(\zeta, z),$$

где

$$F(\zeta, z) = R_0(z) \prod_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{T_k(\zeta) - z}{T_k[S_1(\bar{\zeta}) - \bar{z}] - \bar{z}} \times \left(\frac{\overline{T_k[S_1(\bar{\zeta}) - \bar{a}_1]}{T_k(\zeta) - a_1} \right)^{\frac{h_1}{2}} \dots \left(\frac{\overline{T_k[S_1(\bar{\zeta}) - \bar{a}_n]}{T_k(\zeta) - a_n} \right)^{\frac{h_n}{2}} \right\}. \quad (8)$$

Здесь a_m , $m=1, \dots, n$, — центры окружностей C_m ; $R_0(z) > 0$;

$$|F(t, z)|_{C_j} = 1, \quad j=1, \dots, n; \quad (9)$$

вещественные величины $h_m = h_m(z)$, $m=1, \dots, n$, определяются единственным образом из системы линейных алгебраических уравнений.

Функция $F(\zeta, z)$ является многозначной функцией по ζ , поэтому многослойная область D будет отображаться этой функцией на риманову поверхность. От этой римановой поверхности легко перейти к римановой поверхности, которая является образом D при отображении комплексной функцией Грина $g(\zeta, z)$. Построением римановой поверхности, связанной с функцией $g(\zeta, z)$, занималась Л. М. Леонидова [4].

Дадим другое толкование функции $F(\zeta, z)$ — по частям. Однако в чистом виде каждая из частей $F(\zeta, z)$ не будет всегда представлять собой сходящееся произведение. Поэтому нужно воспользоваться корректирующим множителем. Именно, бесконечное произведение

$$\prod_{k=0}^{\infty} \frac{T_k(\zeta) - z}{T_k[S_1(\bar{\zeta}) - \bar{z}] - \bar{z}} \frac{\overline{T_k[S_1(\bar{t}_0)] - \bar{z}}}{T_k(t_0) - z} = \Phi(\zeta, z),$$

где $t_0 \in C_1$, будет сходиться при условии сходимости ряда

$\sum_{k=0}^{\infty} |T_k(z) - T_k(u)|$, в частности, для фуксовой группы второго рода. Область D отображается этой функцией на плоскость с концентрическими (с центром в начале координат) разрезами и с нормировкой $\Phi(z, z) = 0$, $\Phi(\infty, z) = \infty$. Эту же функцию можно по-другому представить через функции вида (1):

$$\Phi(\zeta, z) = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{f(\zeta, z)}{f(\zeta, w)} \sqrt{H_1(w)} e^{i\alpha(z)}$$

(с точностью до поворота, который задается величиной $\alpha(z)$).

В окрестности a_m функция $\Phi(\zeta, a_m)$ будет вести себя, как $(\zeta - a_m)^2$, в окрестности ∞ — как ζ^2 . Функция

$$\sqrt{\Phi(\zeta, a_m)} = \sqrt{\prod_{k=0}^{\infty} \frac{T_k(\zeta) - a_m}{T_k[S_1(\bar{\zeta})] - \bar{a}_m} \frac{T_k[S_1(\bar{t}_0)] - \bar{a}_m}{T_k(t_0) - a_m}}$$

переводит окружность C_m в полную окружность C_m^* , область D — во внешность C_m^* с разрезами, которые концентричны с окружностью C_m^* .

Теперь видно, что (8) можно переписать так:

$$F(\zeta, z) = F_0(z) \Phi(\zeta, z) \prod_{m=1}^n (\sqrt{\Phi(\zeta, a_m)})^{-hm}, \quad (10)$$

причем в $F_0(z)$ входит $R_0(z)$ и произведение корректирующих множителей в степени (-1) . Обозначим $|F_0(z)| = r_0(z)$, $|\Phi(\zeta, z)||_{C_j} = r_j(z)$, $|\sqrt{\Phi(\zeta, a_m)}|_{C_j} = r_{jm}$. Соотношения (9) принимают вид

$$r_0 r_j \prod_{m=1}^n r_{jm}^{-hm} = 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

После логарифмирования получается система уравнений для определения h_m ($m = 1, \dots, n$) и r_0 :

$$h_1 \ln r_{j1} + h_2 \ln r_{j2} + \dots + h_n \ln r_{jn} = \ln r_j + \ln r_0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Недостающее уравнение получается из условия, что $F(\zeta, z)$ не обращается в бесконечно удаленной точке в 0 или ∞ . Так как функция $F(\zeta, z)$ имеет в бесконечности полюс первого порядка, а функция $\Phi(\zeta, a_m)^{-\frac{1}{2}}$ имеет в бесконечности нуль первого порядка, то нужное поведение у $F(\zeta, z)$ в (10) получится, если

$$h_1 + h_2 + \dots + h_n = 1.$$

Так истолковывается геометрически система уравнений для определения h_m , $m = 1, \dots, n$.

Исследуем качественную картину изменения образа области D при изменении этой области. При движении граничных окружностей они могут пересекаться, и, значит, будут получаться области с меньшим порядком связности. Подробно проведем исследование для двусвязных областей — внешности двух окружностей. С аналитической точки зрения движение двух окружностей исследовано в [2].

Внешность двух окружностей, которые лежат вне друг друга, отображается функцией (1) на круг с концентриче-

ским разрезом. Когда окружности коснутся, вид функции останется прежним, а образом новой области будет круг без разреза. Произойдет это так, что разрез из внутренности круга выйдет на окружность. Концевые точки разреза разобьют окружность на две части, причем одна часть будет соответствовать первой окружности, вторая — второй окружности. Точка касания является двойной точкой и перейдет в концевые точки разреза. При дальнейшем движении получатся две пересекающиеся окружности. Их внешность будет отображаться внутрь круга, однако функция в виде (1) не существует, потому что симметричных областей без перекрытий здесь не будет. Можно заметить, что в случае угла пересечения, равного $\frac{\pi}{n}$, n — целое число, бесконечная

группа симметрии сведется к конечной группе, потому что $T_{k+n}(z) = T_k(z)$. По этой конечной группе можно построить функцию, отображающую данную область на круг —

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\zeta - T_k(z)}{\zeta - T_k[S_1(\bar{z})]}.$$

Если угол пересечения не равен $\frac{m\pi}{n}$,

группу симметрии можно применить на римановой поверхности. На плоскости такая группа не будет собственно разрывной, и поэтому фундаментальной области на плоскости у этой группы не существует.

Легко проследить обратный переход от функции

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\zeta - T_k(z)}{\zeta - T_k[S_1(\bar{z})]}$$

в случае пересекающихся окружностей

к функции $\prod_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta - T_k(z)}{\zeta - T_k[S_1(\bar{z})]}$ в случае касающихся окруж-

ностей. При дальнейшем движении вид функции останется прежним, а образ двусвязной области станет кругом с концентрическим разрезом.

Доложено на семинаре 26 мая 1967 года.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Аксельтьев. Построение оператора Шварца методом симметрии. Труды семинара по краевым задачам, вып. 2, 3, 4, изд-во КГУ, 1964—1967.

2 G. Lery. Sur la fonction de Green pour un contour algébrique. Annales Ec. Norm. Sup., vol. 32, 1915, p. 49—137.

3. М. Шиффер. Некоторые новые результаты в теории конформных отображений. Приложение к книге Р. Куранта „Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности“. ИИЛ, 1953.

4. Л. М. Леонидова. Поверхность Римана для функции Грина многосвязной области. Мат. сборник, т. 28, вып. 3, 1951, стр. 621—634.