Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. Б. Дроздов, Конические сечения – космические орбиты,
Матем. обр., 2007, выпуск 2, 27–32

https://www.mathnet.ru/mo495

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.89
13 декабря 2025 г., 01:37:51

Конические сечения — космические орбиты

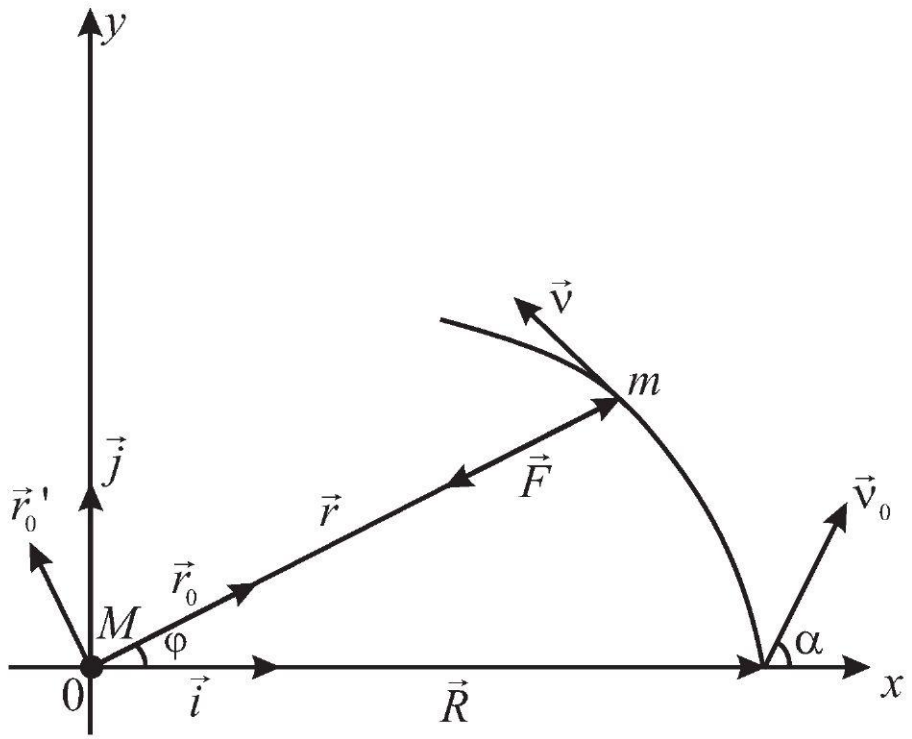
В. Б. Дроздов

В предназначенной школьникам лекции Н. Н. Константинова “Как люди догадались, что из законов механики следуют законы Кеплера” (см. Математическое образование, №40, 2007 г.) приведена реконструкция рассуждений Гука по выводу законов Кеплера без использования законов Ньютона. В настоящей статье рассказано, как из законов сохранения — следствий законов Ньютона — выводятся формы орбит движения планет, а также остальные законы Кеплера.

Немного есть в классической механике столь красивых, и физически и математически, вопросов, как определение траекторий движения тела в поле гравитационного центра. Еще Ньютон установил, что такие траектории исчерпываются коническими сечениями: эллипсом (в частности, окружностью), параболой и гиперболой. Этот вопрос, находившийся три века назад на переднем крае науки, давно уже перешел в вузовские учебники физики, астрономии, теоретической механики.

Ниже приведен вариант изложения, понятного школьнику, владеющему углубленным курсом физики и математики. Единственное, что выходит (по сути, формально) за пределы школьной программы — дифференцирование векторной функции. Но оно осуществляется по тем же правилам, как и обычной — скалярной. Правда, дифференцировать придется много. Для облегчения восприятия разобьем статью на озаглавленные части.

Итак, пусть планета или комета массой m в начальный момент времени $t = 0$ имеет скорость $\vec{v}_0$, направленную под углом α к радиус-вектору $\vec{R}$, см. рисунок. Гравитационным полем планет пренебрегаем, ибо их суммарная масса в 750 раз меньше массы Солнца M, которое условно считаем неподвижным.



1. Законы сохранения

Естественно применять законы сохранения (энергии и момента импульса), что дает возможность упростить вычисления, в частности, обойтись дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{mv^2}{2} - G\dfrac{mM}{r} = E_0, & (1) \\ mvr \cdot \sin(\vec{v}, \hat{}\, \vec{r}) = L_0, & (2) \end{cases}$$

где $E_0 = \frac{mv_0^2}{2} - G\frac{mM}{R}$ и $L_0 = mv_0 R \sin\alpha$ — соответственно начальные значения механической энергии и момента импульса небесного тела. Не умаляя общности, считаем, что $\alpha \neq 0$, ибо в противном случае уравнение (2) будет излишним. Ввиду постоянства вектора $\vec{L}_0$ движение будет происходить в плоскости, определяемой векторами $\vec{R}$ и $\vec{v}_0$.

Уравнения (1) и (2) содержат три переменные величины: модуль скорости тела V, его расстояние от Солнца r и угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{r}$.

Преобразуем систему уравнений (1)-(2) так, чтобы неизвестных тоже было два. Из формулы скалярного произведения векторов имеем:

$$\cos\angle(\vec{v}, \vec{r}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{v \cdot r}.$$

Но как развернуть выражение? Декартовой системой координат пользоваться крайне невыгодно: утрачивается величина r, входящая в закон всемирного тяготения и появляется иррациональность $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. От единичных векторов к полярной системе координат

Ничего не остается делать, как ввести единичный вектор $\vec{r}_0$ радиус-вектора $\vec{r}$ и "привязать" его к системе координат XOY:

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r} = \cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j},$$

где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — единичные векторы координатных осей OX и OY соответственно. Тогда

$$\vec{r} = r\left(\cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j}\right) \tag{3}$$

и

$$\vec{v} = (\vec{r})' = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} = \left(r'\cos\varphi - r\varphi'\sin\varphi\right)\vec{i} + \left(r'\sin\varphi + r\varphi'\cos\varphi\right)\vec{j}. \tag{4}$$

Из формулы (4) получим, что $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(r')^2 + r^2(\varphi')^2}$, а из формул (3) и (4) $\cos\angle(\vec{v}, \vec{r}) = \frac{r'}{v}$.

Следовательно, $\sin\angle(\vec{v}, \vec{r}) = \frac{r\varphi'}{v}$ и постоянный момент импульса тела равен $mr^2\varphi'$.

Теперь система уравнений (1) и (2) запишется так:

$$\begin{cases} \dfrac{m((r')^2 + r^2(\varphi')^2)}{2} - G\dfrac{mM}{r} = E_0, & (5) \\ mr^2\varphi' = L_0. & (6) \end{cases}$$

Естественно, как бы сама собой, появилась полярная система координат.

3. Введем безразмерную величину

Систему дифференциальных уравнений (5)-(6) удобнее решать, если провести чисто алгебраическое упрощение, а именно ввести величину q, определяемую равенством:

$$\frac{v_0}{\sqrt{\frac{2GM}{R}}} = q.$$

Чем это вызвано? Начальная энергия тела E_0 положительна при $v_0 > \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ и отрицательна при $v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. А по знаку величины E_0 можно сделать практически без вычислений важное заключение о траектории тела.

В самом деле, из равенства $E_0 = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r}$ следует, что $G\frac{mM}{r} > -E_0$. Если $E_0 < 0$, то последнее неравенство выполняется при $0 < r < -\frac{GmM}{E_0}$, то есть траектория будет замкнутой. Если $E_0 \geq 0$, то оно верно при любом r, значит, кривая будет разомкнутой, и тело уйдет в бесконечность.

При "расшифровке" величин E_0 и L_0 система (5)-(6) упростится и масса тела m исчезнет:

$$\begin{cases} r^2(\varphi')^2 + (r')^2 = v_0^2, & (7) \\ r^2\varphi' = v_0 R \sin\alpha. & (8) \end{cases}$$

4. Форма траектории

Естественно выразить из уравнения (8) величину φ' и подставить ее в уравнение (7). В результате получим одно уравнение, не содержащее угла φ:

$$(r')^2 = v_0^2\left(1 + \frac{1}{q^2}\left(\frac{R}{r} - 1\right) - \sin^2\alpha \cdot \frac{R^2}{r^2}\right).$$

Поскольку уравнение траектории времени не содержит (а в последнем уравнении оно неявно присутствует: $r' = \frac{dr}{dt}$), то преобразуем с учетом формулы (8) величину r':

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{v_0 R \sin\alpha}{r^2}.$$

В итоге имеем:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{1}{q^2}\right)}{R^2\sin^2\alpha} + \frac{1}{Rq^2\sin^2\alpha}r^3 - r^2. \qquad (9)$$

Видим, что исчезла и начальная скорость тела v_0.

Равенство (9) можно интегрировать, но лучше заменой переменной $r = \frac{1}{Z}$ упростить вычисления. Действительно,

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{Z^2} \cdot \frac{dZ}{d\varphi}$$

и из формулы (9) вытекает:

$$\left(\frac{dZ}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{1}{q^2}\right)}{R^2\sin^2\alpha} + \frac{1}{Rq^2\sin^2\alpha}Z - Z^2 \qquad (10)$$

Итак, вместо многочлена четвертой степени в формуле (9) мы получили хорошо знакомый квадратный трехчлен в формуле (10). Выделим в нем квадрат двучлена:

$$\left(\frac{dZ}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1 + 4q^2(q^2 - 1)\sin^2\alpha}{R^2\sin^2\alpha} - \left(Z - \frac{1}{2Rq^2\sin^2\alpha}\right)^2. \qquad (11)$$

Обозначив для краткости

$$2Rq^2\sin^2\alpha = P, \quad 1+4q^2(q^2-1)\sin^2\alpha = \varepsilon^2, \quad \frac{1}{r}-\frac{1}{P}=\lambda$$

и учтя, что $\frac{dZ}{d\varphi} = \frac{d\lambda}{d\varphi}$, находим из формулы (11):

$$\left(\frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{P}{\varepsilon}\lambda\right)^2 = 1. \tag{12}$$

Уравнение (12) легко интегрируется, так как переменные λ и φ сразу разделяются. Все его решения задаются формулами

$$\lambda = \pm\frac{\varepsilon}{P}\cos(\varphi+\varphi_0) \quad \text{либо} \quad \lambda = \pm\frac{\varepsilon}{P}\sin(\varphi+\varphi_0) = 1$$

где φ_0 — постоянная величина. Это очевидно, если сравнить уравнение (12) с основным тригонометрическим тождеством, записанным в виде:

$$(\cos'(\varphi+\varphi_0))^2 + \cos^2(\varphi+\varphi_0) = 1 \quad \text{или} \quad (\sin'(\varphi+\varphi_0))^2 + \sin^2(\varphi+\varphi_0) = 1.$$

Имеет смысл взять решение в наиболее простом виде, соответствующем рациональному расположению траектории в системе координат:

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{P}\cos\varphi.$$

Тогда получим уравнение конического сечения с эксцентриситетом ε и фокальным параметром P:

$$r = \frac{P}{1+\varepsilon\cos\varphi}. \tag{13}$$

Исследуем вид этого сечения в зависимости от эксцентриситета ε, который легко преобразовать к виду:

$$\varepsilon = \sqrt{4\sin^2\alpha\left(q^2-\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\alpha}.$$

Наименьшее значение $\varepsilon_{\min} = |\cos\alpha|$ достигается при $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то есть при $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$. Ясно, что при $\alpha = 90°$ будет "наименьшее из наименьшего" значение $\varepsilon = 0$, чему соответствует окружность. Понятно и то, что при $\alpha \neq 90°$ при любой начальной скорости движения по окружности не получится. Решив уравнение $\varepsilon = 1$, найдем, что это будет только при $q = 1$, а значит, при $v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. Тело движется по параболе.

Проверьте, что $\varepsilon > 1$ при $q < 1$ $\left(0 < v_0 < \sqrt{\frac{GM}{R}}; \quad \sqrt{\frac{GM}{R}} < v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{R}}\right)$ и в этом случае траекторией будет эллипс. Аналогично установите, что $\varepsilon > 1$ при $q > 1$ $\left(v_0 > \sqrt{\frac{2GM}{R}}\right)$. Тогда тело движется по гиперболе.

Крайне интересен тот факт, что вид траектории (эллипс, парабола, гипербола) совершенно не зависит от угла α, хотя эксцентриситет ε от величины α зависит.

5. Основная задача механики

Попробуем определить координаты тела в любой момент времени движения, то есть решить основную задачу механики. Для этого в уравнение (6) подставим формулу (13) и найдем:

Последний интеграл берется громоздко, поэтому воспользуемся таблицами интегралов:

$$\int \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = -\frac{\varepsilon\sin\varphi}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos\varphi)} + \frac{2}{(1+\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) + C.$$

Формула верна при $0 \le \varepsilon < 1$.

Ввиду того, что $\varphi = 0$ при $t = 0$, окончательно получим:

$$t = \frac{P^2}{(1-\varepsilon^2)v_0 R\sin\alpha}\left(\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\varepsilon\sin\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}\right). \tag{14}$$

Основная задача механики оказалась решенной наоборот: время t выражено через угол φ. Ясно, что в общем случае выразить φ через t в элементарных функциях невозможно. Проверим формулу (14) в хорошо известном частном случае движения по окружности, когда

$$\varepsilon = 0, \quad \alpha = 90^\circ, \quad P = R.$$

Эта формула радикально упрощается:

$$\varphi = \frac{\sqrt{\frac{GM}{R}}}{R}t, \quad \text{как и должно быть.}$$

Понятно, что выразить r через t в элементарных функциях тоже невозможно.

6. Ускорение и скорость тела

Проще определить ускорение, чем скорость. Из закона всемирного тяготения следует, что

$$a = G\frac{M}{r^2}$$

С учетом формулы (13) находим:

$$a = G\frac{M}{P^2}(1+\varepsilon\cos\varphi)^2.$$

Вспомним формулу скорости тела, полученную в начале статьи:

$$v = \sqrt{(r')^2 + r^2(\varphi')^2}.$$

Формулы (6) и (13) дают возможность преобразовать величины r' и $r\varphi'$:

$$r' = \frac{v_0 R\varepsilon}{P}\sin\alpha\sin\varphi, \quad r\varphi' = \frac{v_0 R\sin\alpha}{P}(1+\varepsilon\cos\varphi).$$

Тогда скорость небесного тела

$$v = \frac{v_0 R\sin\alpha}{P}\sqrt{1+2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}. \tag{15}$$

Проверьте, что для движения по окружности формула (15) дает $V = V_0$. В этом единственном случае модуль скорости тела постоянен.

7. Законы Кеплера

Исторически законы Кеплера предшествовали законам классической механики Ньютона. Установленные эмпирически на основании астрономических наблюдений, они открыли путь к закону всемирного тяготения. Однако, логически законы Кеплера вытекают из законов Ньютона, которые обладают неизмеримо большей общностью.

Первый закон. Планеты движутся вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого оно находится. Справедливость закона прямо следует из формулы (13).

Второй закон. Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равные площади.

За весьма малое время dt радиус-вектор планеты повернется на очень малый угол $d\varphi$, описав площадь $dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$. Применив формулу (6), запишем эту величину так: $dS = \frac{1}{2}v_0 R \sin\alpha \cdot dt$. Тогда за время t_1 будет описана площадь

$$S_1 = \int\limits_{t_0}^{t_0+t_1} \frac{1}{2}v_0 R \sin\alpha \cdot dt = \frac{1}{2}v_0 R \sin\alpha \cdot t_1, \tag{16}$$

что и доказывает закон.

Третий закон. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Прежде всего выразим период обращения планеты T. Из формулы (16) очевидно, что $S_{эл.} = \frac{1}{2}v_0 R \sin\alpha \cdot T$, где $S_{эл.}$ — площадь эллипса, ограниченного орбитой планеты. Площадь эллипса, как известно, равна πab, где a и b — большая и малая полуоси эллипса соответственно. Из геометрии вспомним, что $a = \frac{P}{1-\varepsilon^2}$ и $b = \frac{P}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$. Следовательно,

$$\frac{2\pi P^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} v_0 R \sin\alpha \cdot T,$$

откуда после несложных преобразований получим:

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{G \cdot M}},$$

что равносильно формуле $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = const$, из которой следует третий закон Кеплера:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Дроздов Виктор Борисович,
г. *Рязань.*