



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. А. Курьянович, Точные решения задачи Коши для уравнения Фридмана, *ТМФ*, 2019, том 199, номер 1, 154–172

DOI: 10.4213/tmf9504

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.231.219.178

11 ноября 2024 г., 11:13:37



© 2019 г.

Э. А. Курьянович*

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФРИДМАНА

Космологическое уравнение Фридмана для Вселенной, заполненной скалярным полем, сведено к системе из двух уравнений первого порядка, одно из которых является уравнением с разделяющимися переменными. Для второго уравнения выписаны точные решения в виде ряда для квадратичного потенциала в спиральной и аттракторной областях, а также для весьма произвольных потенциалов как в окрестности конечной точки, так и в окрестности бесконечности. Доказаны существование и единственность классических решений задачи Коши для уравнения Фридмана в одних случаях и наличия ровно двух решений в других случаях.

Ключевые слова: уравнение Фридмана, задача Коши, точные решения, инфляция, скалярное поле, аттрактор, обобщенные ряды Дирихле, фазовая траектория.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9504>

1. ВВЕДЕНИЕ

В современной космологии важную роль играет изучение уравнения Фридмана для гравитационного поля, взаимодействующего со скалярным полем. В рамках инфляционной теории проводился приближенный анализ уравнений Фридмана для свободного массивного скалярного поля (см., например, работы [1], [2]). Была построена фазовая траектория для уравнения Фридмана с квадратичным потенциалом [1]. Эта траектория представляет собой выходящую из бесконечности и бесконечно закручивающуюся к началу координат спираль. В монографии [1] также было показано, что у траектории имеется так называемая “аттракторная” прямая, вдоль которой эта траектория при определенных начальных данных довольно долго движется. Таким образом, фазовую траекторию для уравнения Фридмана с квадратичным потенциалом можно разбить на три области: окрестность бесконечности, спиральную окрестность начала координат и “аттракторную” область, которая не всегда существует. В работах [3]–[14] и многих других были исследованы различные свойства решения уравнения Фридмана, найдены решения для потенциалов в виде

*Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: kurianovich@mail.ru

константы, экспоненты и некоторых других функций. Однако во всех этих работах не было получено точного решения в виде рядов для квадратичного потенциала и для произвольного потенциала при некоторых предположениях. И только в статье [15] было построено решение уравнения Фридмана в окрестности бесконечности для скалярного поля с квадратичным потенциалом в виде обобщенных рядов Дирихле.

В работе [16] было проведено детальное математическое исследование уравнения Фридмана для скалярного поля с квадратичным и произвольным потенциалами, построено представление решений в виде различных рядов. Все решения, полученные в статье [16], зависят от произвольной константы. В настоящей работе построены решения задачи Коши во всех указанных случаях, доказано существование ровно одного или ровно двух решений этой задачи. Все это потребовало существенной доработки решений, полученных в статье [16]. В разделе 2 ставится задача и разбираются особые решения. В следующих разделах построены решения в виде различных рядов: в разделе 3 – для квадратичного потенциала в спиральной области; в разделах 4 и 5 – для квадратичного потенциала в аттракторной области; в разделе 6 – для непрерывного медленно растущего произвольного потенциала в окрестности бесконечности; в разделе 7 – для произвольного аналитического потенциала в окрестности конечной неособой точки. В разделе 8 подводятся итоги.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим систему уравнений Фридмана для Вселенной, заполненной скалярным полем:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'_\varphi = 0, \quad H^2 = \frac{1}{3M^2} \left(\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right). \quad (1)$$

Здесь φ – скалярное поле, зависящее от времени, H – параметр Хаббла, M – действительная положительная константа, $V(\varphi)$ – заданный непрерывно дифференцируемый скалярный потенциал. Продифференцируем второе уравнение по φ :

$$2HH'_\varphi = \frac{1}{3M^2} \left(\dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} + V'_\varphi \right). \quad (2)$$

Если $H \equiv 0$, $V < 0$, то

$$\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{-2V(\varphi)}} = \pm(t - t_0).$$

Если же $H \neq 0$, то выразим H из первого уравнения системы (1), подставим в уравнение (2) и получаем, что

$$\dot{\varphi} = -2M^2 H'_\varphi. \quad (3)$$

И, наконец, подставляя выражение (3) во второе уравнение системы (1) и используя замены $H = y/3$, $\varphi = Mx\sqrt{2/3}$, $U = 3V/M^2$, записываем окончательно систему

$$y'_x = -\dot{x}, \quad y'^2_x = y^2 - U(x). \quad (4)$$

Подобная система уравнений была ранее получена в [17]. Если $U = C^2 = \text{const}$, то особое решение системы (4) есть $y = \pm C$, $x = C_1$. Если же $y \neq \text{const}$, то

$$\int_{x(t)}^{x(t_0)} \frac{dx}{y'_x} = t - t_0. \quad (5)$$

Таким образом, при условии, что найдено решение второго уравнения системы (4), первое уравнение легко интегрируется. Займемся теперь изучением второго уравнения при дополнительном условии $y(x_0) = y_0$, $x(t_0) = x_0$.

3. РЕШЕНИЕ В ВИДЕ РЯДА ДЛЯ КВАДРАТИЧНОГО ПОТЕНЦИАЛА В СПИРАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ (В ОКРЕСТНОСТИ $x = 0$)

Рассмотрим квадратичный потенциал $V(\varphi) = m^2\varphi^2/2$. Если потенциал неквадратичный, то применяем замены, полученные в предыдущем разделе. В случае же квадратичного потенциала немного изменим для удобства эти замены: $H = m\gamma/3$, $\varphi = Mx\sqrt{2/3}$, $U = 3V/M^2m^2$, $t = t_1/m$ (далее индекс "1" опускается для краткости). В результате получаем систему $y'_x = -\dot{x}$, $y'_x{}^2 = y^2 - x^2$. Будем рассматривать задачу Коши $y(x_0) = y_0$, $x(t_0) = x_0$, $y_0 > |x_0|$. Сделаем в этой системе замены $y = 2/u$, $x = (2/u) \cos(\psi/2)$, $\dot{x} = (2/u) \sin(\psi/2)$. Для $u = u(\psi)$ имеем следующую задачу:

$$2u'(u + \sin \psi) = u(\cos \psi - 1), \quad u(\psi_0) = u_0 = \frac{2}{y_0} = \frac{2}{x_0} \cos \frac{\psi_0}{2}. \quad (6)$$

Найдя решение этой задачи, мы сможем записать параметрические зависимости $y(x)$, $y(t)$ и $x(t)$ через параметр ψ . Займемся получением этого решения.

ТЕОРЕМА 1. *Единственным решением задачи (6) при условиях $\psi \leq \psi_0$, $u_0 > 32$ ($y_0 < 1/16$) является следующий абсолютно и равномерно сходящийся при тех же условиях ряд:*

$$u = \frac{1}{2}(\sin \psi - \psi + C) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\psi), \quad C = 2u_0 + \psi_0 - \sin \psi_0. \quad (7)$$

Здесь

$$a_0(\psi) = - \int_{\psi}^{\psi_0} \frac{(1 - \cos \psi_1) \sin \psi_1 d\psi_1}{3 \sin \psi_1 - \psi_1 + C}, \quad (8)$$

$$a_k(\psi) = 2 \int_{\psi}^{\psi_0} \frac{\sum_{n=0}^{k-1} a_n(\psi_1) a'_{k-1-n}(\psi_1) d\psi_1}{3 \sin \psi_1 - \psi_1 + C}, \quad k \geq 1. \quad (9)$$

При том же условии равномерно и абсолютно сходится ряд, составленный из производных членов этого ряда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать решение задачи (6) при условиях $|y| \ll 1 \Rightarrow |x| \ll 1$, $|u| \gg 1 \Rightarrow |u| \gg \sin \psi$. В этих условиях пренебрежем в (6) $\sin \psi$ по сравнению с u . Тогда получаем уравнение $2u' = \cos \psi - 1$, решив которое, имеем соотношение $u = (\sin \psi - \psi + C)/2$. Поэтому целесообразно искать решение (6) в виде (7).

Подставим ряд (7) в задачу (6):

$$(\cos \psi - 1) \sin \psi + \sum_{k=0}^{\infty} a'_k(\psi)(3 \sin \psi - \psi + C) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a_n(\psi) a'_{k-n}(\psi) = 0. \quad (10)$$

Приравнявая в (10) сумму первого слагаемого и нулевого члена первого ряда к нулю, получаем соотношение (8). Приравнявая сумму k -го члена первого ряда и $(k-1)$ -го члена второго ряда к нулю, получаем равенство (9). Докажем, что в условиях теоремы справедливы оценки

$$|a'_k| \leq \frac{2 \cdot 60^k}{(k+1)^2(C-3-\psi_0)^k(C-3-\psi)}, \quad (11)$$

$$|a_k| \leq \frac{2 \cdot 60^k}{(k+1)^2(C-3-\psi_0)^k}. \quad (12)$$

Из формулы (8) имеем $|a'_0| \leq 2/(C-3-\psi)$, что соответствует оценке (11). Производя в равенстве (8) интегрирование по частям, получаем неравенства

$$\begin{aligned} |a_0| &\leq \left| \frac{-\cos \psi_0 + 0, 25 \cos 2\psi_0}{3 \sin \psi_0 - \psi_0 + C} \right| + \left| \frac{-\cos \psi + 0, 25 \cos 2\psi}{3 \sin \psi - \psi + C} \right| + \\ &+ \int_{-\infty}^{\psi_0} \frac{|(-\cos \psi_1 + 0, 25 \cos 2\psi_1)(3 \cos \psi_1 - 1)| d\psi_1}{(3 \sin \psi_1 - \psi_1 + C)^2} \leq \\ &\leq \frac{15}{2(C-3-\psi_0)} \leq \frac{15}{4(u_0-2)} \leq \frac{1}{8} \leq 2, \end{aligned}$$

что соответствует оценке (12). Из равенства (9) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |a'_1| &\leq \frac{8}{(C-3-\psi)(C-3-\psi_0)}, & |a_1| &\leq \frac{8}{C-3-\psi_0}, \\ |a'_2| &\leq \frac{64}{(C-3-\psi_0)^2(C-3-\psi)}, & |a_2| &\leq \frac{64}{(C-3-\psi_0)^2}, \end{aligned}$$

что соответствует (11) и (12). Докажем (11) и (12) методом математической индукции. Предположим, что эти неравенства верны для любого $n \leq k-1$. Докажем их для $n = k$. Из соотношения (9) для $k \geq 3$ следует, что

$$|a'_k| \leq \frac{8 \cdot 60^{k-1}}{(C-3-\psi_0)^k(C-3-\psi)} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{(n+1)^2(k-n)^2}.$$

Оценим последнюю сумму:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{(k-n)^2(n+1)^2} &\leq \frac{2}{k^2} + \int_1^{k-1} \frac{dx}{x^2(k-x)^2} = \\ &= \frac{2}{k^2} + \frac{4 \ln(k-1)}{k^3} + \frac{2(k-2)}{k^2(k-1)} \leq \frac{8}{k^2} \leq \frac{15}{(k+1)^2}. \quad (13) \end{aligned}$$

Следовательно, неравенство (11) доказано. Аналогично доказывается неравенство (12). Для абсолютной сходимости ряда достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq 60/(C-3-\psi_0) < 1$. Следовательно, $u_0 > 32$, что и требовалось

доказать. Аналогично доказываются равномерная и абсолютная сходимости ряда, составленного из производных членов этого ряда. Единственность решения (6) следует из того, что в условиях теоремы всегда выполнено и условие Липшица. Для функции $y(x)$ получается два решения, так как $\psi_0 = \pm 2 \arccos(x_0/y_0) + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Каждому знаку соответствует своя функция $y(x)$. Это связано с тем, что исходное уравнение можно переписать как $y'_x = \pm \sqrt{y^2 - x^2}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Решение задачи (6) при условиях $\psi \leq \psi_0$, $u_0 > 32$ можно представить следующим образом:

$$u = \frac{\sin \psi - \psi + C}{2} + \sum_{k=0}^n a_k(\psi) + o\left(\left(\frac{60}{C-3-\psi_0}\right)^n\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Действительно, оценивая остаточный член ряда с применением формулы суммы геометрической прогрессии, из неравенства (12) получаем, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(\psi) \right| &\leq \frac{|a_{n+1}(\psi)|}{1 - 60/(C-3-\psi_0)} \leq \\ &\leq \frac{2 \cdot 60^{n+1}}{(n+2)^2 (C-3-\psi_0)^{n+1} (1 - 60/(C-3-\psi_0))}. \end{aligned}$$

4. ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ В ВИДЕ РЯДА ДЛЯ КВАДРАТИЧНОГО ПОТЕНЦИАЛА В АТТРАКТОРНОЙ ОБЛАСТИ

ТЕОРЕМА 2. *Единственным решением задачи Коши*

$$y'_x = \sqrt{y^2 - x^2}, \quad y(x_0) = y_0 \quad (14)$$

при условиях

$$y_0 = x_0 + \frac{1}{2} e^{x_0^2/2} \int_{x_0}^{x_3} e^{-x_1^2/2} dx_1, \quad 16 \leq x \leq x_0 \leq x_-, \quad (15)$$

где

$$x_- = 2\sqrt{\frac{x_3}{3}} \cos\left(\frac{1}{3}\left(\pi - \arccos \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{x_3}}\right)\right), \quad 768 < x_3 \leq +\infty,$$

является абсолютно и равномерно сходящийся при том же условии ряд

$$y = x + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x). \quad (16)$$

Здесь

$$a_0(x) = \frac{1}{2} e^{x^2/2} \int_x^{x_3} e^{-x_1^2/2} dx_1, \quad (17)$$

$$a_k(x) = -\frac{1}{2} e^{x^2/2} \int_x^{x_0} e^{-x_1^2/2} \sum_{n=0}^{k-1} (a_n(x_1) a_{k-1-n}(x_1) - a'_n(x_1) a'_{k-1-n}(x_1)) dx_1 \quad (18)$$

для $k \geq 1$. При том же условии равномерно и абсолютно сходится ряд, составленный из производных членов этого ряда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим ряд (16) в задачу (14), тогда, возводя в квадрат, получаем равенство

$$1 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} a'_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a'_{k-n}(x) a'_n(x) = 2x \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a_{k-n}(x) a_n(x). \quad (19)$$

Приравняем сумму первого слагаемого слева и нулевого члена первого ряда слева к нулевому члену первого ряда справа:

$$a'_0(x) = xa_0(x) - \frac{1}{2}. \quad (20)$$

Решая это уравнение, приходим к соотношению (17). Далее, приравняем в (19) сумму k -го члена первого ряда слева и $(k-1)$ -го члена второго ряда слева к аналогичной сумме справа:

$$a'_k(x) = xa_k(x) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{k-1} (a_{k-1-n}(x) a_n(x) - a'_{k-1-n}(x) a'_n(x)), \quad k \geq 1. \quad (21)$$

Решая уравнение (21), получаем формулу (18). Теперь оценим a_0 . Для этого рассмотрим следующую функцию:

$$f_1(x) = \int_x^{+\infty} e^{-x_1^2/2} dx_1 - \frac{e^{-x^2/2}}{x}, \quad x > 0. \quad (22)$$

Очевидно, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$, $f'_1(x) = e^{-x^2/2}/x^2 > 0$. Таким образом, функция $f_1(x)$, возрастая, стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$. Значит,

$$f_1(x) < 0, \quad x > 0. \quad (23)$$

Рассмотрим теперь другую функцию:

$$f_2(x) = \int_x^{+\infty} e^{-x_1^2/2} dx_1 - \frac{2e^{-x^2/2}}{x + \sqrt{x^2 + 4}}, \quad x > 0. \quad (24)$$

Очевидно, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0, \quad f'_2(x) = \frac{e^{-x^2/2}(x\sqrt{x^2 + 4} - x^2 - 2)}{(x + \sqrt{x^2 + 4})\sqrt{x^2 + 4}} < 0.$$

Таким образом, функция $f_2(x)$, убывая, стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$. Значит,

$$f_2(x) > 0, \quad x > 0. \quad (25)$$

Из формул (22)–(25) вытекает оценка

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 4}} - \frac{1}{2x_0} \leq a_0(x) = |a_0(x)| \leq \frac{1}{2x}, \quad x > 0. \quad (26)$$

Оценим теперь $a'_0(x)$. Из выражений (20) и (26) следует, что $a'_0(x) \leq 0$. Значит,

$$\begin{aligned} |a'_0(x)| &= \frac{1}{2} - xa_0(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 4/x^2}} + \frac{x}{2x_3} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x}{x_3} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x_3} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Наложим на $a'_0(x)$ ограничение

$$|a'_0(x)| \leq \frac{1}{2x}, \quad x > 0. \quad (28)$$

Это возможно, если

$$\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x_3} \leq \frac{1}{x}. \quad (29)$$

Домножая обе части (29) на x^2x_3 , получаем кубическое неравенство

$$x^3 - xx_3 + x_3 \leq 0. \quad (30)$$

Решая неравенство (30) по формуле Кардано, имеем для $x > 0$ неравенство

$$x_+ \leq x \leq x_-, \quad (31)$$

где

$$x_{\pm} = 2\sqrt{\frac{x_3}{3}} \cos\left(\frac{1}{3}\left(\pi \pm \arccos\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{x_3}}\right)\right), \quad x_3 \geq 6.75. \quad (32)$$

Анализируя полученное решение, получаем соотношения

$$\sqrt{\frac{x_3}{3}} \leq x_- \leq \sqrt{x_3}, \quad 1 \leq x_+ \leq 1.5 \leq x_- \leq +\infty. \quad (33)$$

Введем обозначение

$$b_k(x) = \max\{|a_k(x_1)|, |a'_k(x_1)|\}, \quad x \leq x_1 \leq x_0.$$

Докажем, что для любого $k \geq 0$ и любого x , удовлетворяющего неравенству (31),

$$b_k \leq \frac{15^k}{2x^{k+1}(k+1)^2}. \quad (34)$$

Для $k = 0$ мы это уже доказали. Из формулы (18) с учетом (23) имеем

$$|a_k| \leq \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{k-1} b_{k-1-n}(x)b_n(x), \quad k \geq 1. \quad (35)$$

Из равенства (21) вытекает, что

$$|a'_k| \leq 2 \sum_{n=0}^{k-1} b_{k-1-n}(x)b_n(x), \quad k \geq 1. \quad (36)$$

Из (35) и (36) с учетом (31) и (33) имеем

$$b_k \leq 2 \sum_{n=0}^{k-1} b_{k-1-n}(x)b_n(x), \quad k \geq 1. \quad (37)$$

Из формул (26), (28) и (37) вытекают неравенства $b_1 \leq 1/2x^2$, $b_2 \leq 1/x^3$, которые согласуются с (34). Докажем теперь (34) методом математической индукции. Пусть (34) выполнено для любого $n \leq k-1$. Докажем выполнение (34) для $n = k$. Из (37), (34) и (13) для любого $k \geq 3$ получаем, что

$$b_k \leq \frac{15^{k-1}}{2x^{k+1}} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{(k-n)^2(n+1)^2} \leq \frac{15^{k-1} \cdot 8}{2x^{k+1}k^2} \leq \frac{15^k}{2x^{k+1}(k+1)^2}. \quad (38)$$

Итак, (34) доказано. Далее, для сходимости ряда (16) и его формальной производной достаточно выполнения условий $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{b_k} \leq 15/x < 1$. Значит, $x > 15$. Кроме того, из выражений (15) и (33) следует достаточность условия $x_3 > 768$.

Докажем теперь положительность производной. Действительно, применяя формулу суммы геометрической прогрессии и используя (34), имеем соотношения

$$|y'(x) - 1| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a'_k(x)| \leq \frac{|a'_0(x)|}{1 - 15/x} \leq \frac{1}{2(x-15)} \leq \frac{1}{2}.$$

Отсюда и следует положительность производной. Благодаря этому возведение в квадрат при получении (19) оказывается законным и, кроме того, для задачи (14) при условиях (15) оказывается справедливым условие Липшица, что и доказывает единственность полученного решения. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Решение задачи (14) при условиях (15) можно представить следующим образом: $y = x + \sum_{k=0}^n a_k(x) + o((15/x)^n)$, $n \rightarrow \infty$. Действительно, оценивая остаточный член ряда с применением формулы суммы геометрической прогрессии, из (34) получаем, что

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \right| \leq \frac{|a_{n+1}(x)|}{1 - 15/x} \leq \frac{16 \cdot 15^{n+1}}{2(n+2)^2 x^{n+2}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Ввиду четности решения уравнения (14) существует аналогичное решение вблизи прямой $y = -x$, а также решение, полученное заменой y на $-y$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если в условиях (15) положить $x_3 = +\infty$, то все рассуждения остаются справедливыми. Если, кроме того, еще и x_0 устремить к бесконечности, то мы получаем “чисто” аттракторное решение, существующее в окрестности бесконечности и имеющее прямую $y = x$ своей асимптотой. Задача Коши переходит при этом в условие $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = 0$. Это условие уже не формирует задачу Коши, что не гарантирует единственности полученного решения. Попытка же найти решение в виде степенного ряда $y = x + \sum_{k=0}^{\infty} a_k/x^k$ оканчивается неудачей – ряд оказывается расходящимся.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Условие $x_3 > 768$ является достаточным, но не необходимым. Решение, полученное в теореме 2, возможно, существует и при невыполнении этого условия.

5. ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ В ВИДЕ РЯДА ДЛЯ КВАДРАТИЧНОГО ПОТЕНЦИАЛА В АТТРАКТОРНОЙ ОБЛАСТИ

ТЕОРЕМА 3. *Единственным решением задачи Коши*

$$y'_x = \sqrt{y^2 - x^2}, \quad y(x_0) = \sqrt{x_0^2 + 1} \quad (39)$$

при условиях

$$\sqrt{17} \leq x \leq x_0 \leq +\infty, \quad x_0 > \sqrt{17} \quad (40)$$

является следующий абсолютно и равномерно сходящийся при том же условии ряд:

$$y = \sqrt{x^2 + 1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x). \quad (41)$$

Здесь

$$a_0(x) = -x e^{x^2/2} \int_x^{x_0} \frac{e^{-x_1^2/2} dx_1}{2x_1^2 \sqrt{x_1^2 + 1}}, \quad (42)$$

$$a_k(x) = -x e^{x^2/2} \int_x^{x_0} \frac{1}{2x_1^2} \left[e^{-x_1^2/2} \sqrt{x_1^2 + 1} \sum_{n=0}^{k-1} (a_n(x_1) a_{k-1-n}(x_1) - a'_n(x_1) a'_{k-1-n}(x_1)) dx_1 \right] \quad (43)$$

при $k \geq 1$. При том же условии равномерно и абсолютно сходится ряд, составленный из производных членов этого ряда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим ряд (41) в задачу (39) и, возводя в квадрат, получаем формулу

$$\begin{aligned} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} \sum_{k=0}^{\infty} a'_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a'_{k-n}(x) a'_n(x) = \\ = \frac{1}{x^2 + 1} + 2\sqrt{x^2 + 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a_{k-n}(x) a_n(x). \end{aligned} \quad (44)$$

Приравняем нулевой член первого ряда слева к сумме первого слагаемого и нулевого члена первого ряда справа:

$$a'_0(x) = \left(x + \frac{1}{x} \right) a_0(x) + \frac{1}{2x^2 \sqrt{x^2 + 1}}. \quad (45)$$

Решая это уравнение, получаем соотношение (42). Далее, приравняем в формуле (44) сумму k -го члена первого ряда слева и $(k-1)$ -го члена второго ряда слева к аналогичной сумме справа: для $k \geq 1$ получаем

$$a'_k(x) = \left(x + \frac{1}{x} \right) a_k(x) + \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x} \sum_{n=0}^{k-1} (a_{k-1-n}(x) a_n(x) - a'_{k-1-n}(x) a'_n(x)). \quad (46)$$

Решая уравнение (46), получаем соотношение (43). Теперь оценим a_0 и a'_0 . Из соотношений (22), (23) и (42) следует, что

$$-\frac{1}{2x^3} \leq -\frac{1}{2x^2\sqrt{x^2+1}} \leq a_0 \leq 0. \quad (47)$$

Из формул (45) и (47) вытекает, что

$$-\frac{1}{2x^3\sqrt{x^2+1}} \leq a'_0 \leq \frac{1}{2x\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{1}{2x^2}. \quad (48)$$

Введем обозначение $b_k(x) = \max\{|a_k(x_1)|, |a'_k(x_1)|\}$, $x \leq x_1 \leq x_0$. Тогда из формул (40), (47) и (48) следует, что

$$b_0 \leq \frac{1}{2x^2}. \quad (49)$$

Далее из (43) для любого $k \geq 1$ получаем неравенство $|a_k| \leq \sqrt{17} \sum_{n=0}^{k-1} b_n b_{k-1-n} / 4x$. Из равенства (46) имеем $|a'_k| \leq 33\sqrt{17} \sum_{n=0}^{k-1} b_n b_{k-1-n} / 64$. Следовательно,

$$b_k \leq \frac{33\sqrt{17}}{64} \sum_{n=0}^{k-1} b_n b_{k-1-n}. \quad (50)$$

Докажем, что для любого $k \geq 0$ и любого x , удовлетворяющего условию (40),

$$b_k \leq \frac{15.95^k}{2x^{2k+2}(k+1)^2}. \quad (51)$$

Для $k = 0$ это уже доказано. Из выражений (49) и (50) имеем $b_1 \leq 33\sqrt{17}/256x^4$, $b_2 \leq 18513/16384x^6$, что удовлетворяет неравенству (51). Докажем теперь неравенство (51) методом математической индукции. Пусть оно выполнено для любого $n \leq k-1$. Докажем выполнение (51) для $n = k$. Из формул (50), (51) и (13) для любого $k \geq 3$ вытекает соотношение

$$b_k \leq \frac{33\sqrt{17} \cdot 15.95^{k-1} \cdot 8}{256x^{2k+2}k^2} \leq \frac{495\sqrt{17} \cdot 15.95^{k-1}}{256x^{2k+2}(k+1)^2} \leq \frac{15.95^k}{2x^{2k+2}(k+1)^2}, \quad (52)$$

что и доказывает (51). Далее, для сходимости ряда (41) и его формальной производной достаточно выполнения условия $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{b_k} \leq 15.95/x^2 < 1$. Значит, условие $x \geq \sqrt{17}$ достаточно. Докажем теперь положительность производной. Действительно, применяя формулу суммы геометрической прогрессии и используя (51), имеем

$$\begin{aligned} y'(x) &\geq \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} |a'_k(x)| \geq \sqrt{\frac{17}{18}} - \frac{|a'_0(x)|}{1-15.95/x^2} \geq \\ &\geq \sqrt{\frac{17}{18}} - \frac{1}{2(x^2-15.95)} \geq \sqrt{\frac{17}{18}} - \frac{1}{2} > 0. \end{aligned}$$

Благодаря этому возведение в квадрат при получении (44) оказывается законным и, кроме того, для (39) при условиях (40) оказывается справедливым условие Липшица, что и доказывает единственность полученного решения. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Решение задачи (39) при условии (40) можно представить следующим образом: $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sum_{k=0}^n a_k(x) + o((15.95/x^2)^n)$, $n \rightarrow \infty$. Действительно, оценивая остаточный член ряда с применением формулы суммы геометрической прогрессии, из (51) получаем, что

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \right| \leq \frac{|a_{n+1}(x)|}{1 - 15.95/x^2} \leq \frac{15.95^{n+1}}{2(n+2)^2 x^{2n+4} (1 - 15.95/x^2)} \leq \frac{17 \cdot 15.95^{n+1}}{2(n+2)^2 x^{2n+4}}.$$

Замечания 3 и 4 для теоремы 2 также остаются справедливыми с той лишь разницей, что в замечании 4 к бесконечности стремится только x_0 .

6. РЕШЕНИЕ В ВИДЕ РЯДА В ОКРЕСТНОСТИ $x = \infty$ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕПРЕРЫВНОГО ПОТЕНЦИАЛА, РАСТУЩЕГО НЕ БЫСТРЕЕ ЭКСПОНЕНТЫ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функцию $y = f(x)$ назовем медленно растущей, если существуют $\alpha < 1$, x_0 и $C_1 > 0$ такие, что для любого $x \geq x_0$ $|f(x)| \leq C_1^2 e^{2\alpha x}$.

ТЕОРЕМА 4. Единственным решением задачи Коши

$$y'_x = \sqrt{y^2 - U(x)}, \quad y(x_2) = y_0 > 0, \quad y_0^2 - U(x_2) > 0, \quad (53)$$

где $U(x)$ – заданная непрерывная медленно растущая функция при условии

$$x_1 = \max \left\{ \frac{1}{1-\alpha} \ln \frac{C_1 \sqrt{2(3-2\alpha)}}{C(1-\alpha)}, x_0 \right\} \leq x \leq x_2, \quad (54)$$

$$C = y_0 e^{-x_2}, \quad y_0 > \frac{C_1 e^{\alpha x_2} \sqrt{2(3-2\alpha)}}{1-\alpha},$$

является следующий абсолютно и равномерно сходящийся вместе со своей производной ряд:

$$y = C e^x + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x), \quad (55)$$

где

$$a_0(x) = \frac{e^x}{2C} \int_x^{x_2} U(x_1) e^{-2x_1} dx_1, \quad (56)$$

$$a_k(x) = -\frac{e^x}{2C} \int_x^{x_2} \sum_{m=0}^{k-1} (a_{k-1-m}(x_1) a_m(x_1) - a'_{k-1-m}(x_1) a'_m(x_1)) e^{-2x_1} dx_1, \quad k \geq 1. \quad (57)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим ряд (55) в (53) и, возводя в квадрат, получаем

$$\begin{aligned} C^2 e^{2x} + 2C e^x \sum_{k=0}^{\infty} a'_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k a'_{k-m} a'_m &= \\ &= C^2 e^{2x} + 2C e^x \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k a_{k-m} a_m - U(x). \end{aligned} \quad (58)$$

Приравняем нулевой член первого ряда слева к сумме нулевого члена первого ряда справа и последнего слагаемого справа:

$$a'_0 = a_0 - \frac{U(x)e^{-x}}{2C}. \quad (59)$$

Решая уравнение (59), получаем равенство (56). Далее, приравняем в (58) сумму k -го члена первого ряда слева и $(k-1)$ -го члена второго ряда слева к аналогичной сумме справа:

$$a'_k(x) = a_k(x) + \frac{1}{2C} \sum_{m=0}^{k-1} (a_{k-1-m}(x)a_m(x) - a'_{k-1-m}(x)a'_m(x))e^{-x}, \quad k \geq 1. \quad (60)$$

Решая (60), получаем (57). Займемся теперь доказательством сходимости полученного ряда и ряда, составленного из производных членов этого ряда. Из (56) при $x \geq x_0$ имеем

$$|a_0| \leq \frac{C_1^2 e^{(2\alpha-1)x}}{4C(1-\alpha)}. \quad (61)$$

Из (59) следует, что

$$|a'_0| \leq \frac{C_1^2 e^{(2\alpha-1)x}}{2C} \left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right). \quad (62)$$

Введем обозначение $\max\{|a_k|, |a'_k|\} = b_k$. Из формул (61) и (62) следует, что

$$b_0 \leq \frac{C_1^2 e^{(2\alpha-1)x}}{2C} \left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right). \quad (63)$$

Из выражений (57) и (60) при $x \geq x_0$ вытекают соотношения

$$b_1 \leq \frac{C_1^4 e^{(4\alpha-3)x}}{4C^3} \left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{4(1-\alpha)}\right) \leq \frac{C_1^4 e^{(4\alpha-3)x}}{4C^3} \left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^3, \quad (64)$$

$$b_2 \leq \frac{C_1^6 e^{(6\alpha-5)x}}{4C^5} \left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{6(1-\alpha)}\right) \leq \frac{C_1^6 e^{(6\alpha-5)x}}{4C^5} \left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^5. \quad (65)$$

Сделаем предположение индукции: пусть для любого $m < k$

$$b_m \leq \frac{C_1^{2m+2} e^{(2(\alpha-1)(m+1)+1)x} 15^m}{2^{m+1} C^{2m+1} (m+1)^2} \left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^{2m+1}. \quad (66)$$

Очевидно, что b_0, b_1, b_2 удовлетворяют предположению (66). Используя гипотезу (66), из (57) и (60) получаем, что

$$b_k \leq \frac{C_1^{2k+2} e^{(2(\alpha-1)(k+1)+1)x} 15^{k-1}}{2^{k+1} C^{2k+1}} \left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^{2k+1} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{(k-m)^2 (m+1)^2}. \quad (67)$$

Используя (13), докажем (66) при $m = k$. Для сходимости ряда достаточно выполнения условия

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{b_k} \leq \frac{15C_1^2 e^{2(\alpha-1)x}}{2C^2} \left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^2 < 1.$$

Отсюда и следует достаточность (54).

Докажем теперь положительность производной. Действительно, применяя формулу суммы геометрической прогрессии и используя (66) и (54), имеем

$$\begin{aligned} y'(x) &\geq C e^x - \sum_{k=0}^{\infty} |a'_k(x)| \geq \\ &\geq C e^x - |a'_0(x)| \left[1 - \frac{15C_1^2 e^{2(\alpha-1)x}}{2C^2} \left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)} \right)^2 \right]^{-1} \geq \frac{C e^x}{3-2\alpha} > 0. \end{aligned}$$

Благодаря этому возведение в квадрат при получении (58) оказывается законным и, кроме того, для (53) при условиях (54) оказывается справедливым условие Липшица, что и доказывает единственность полученного решения. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Решение уравнения (53) при условии (54) можно представить следующим образом:

$$y = C e^x + \sum_{k=0}^n a_k(x) + o \left[\left(\frac{15C_1^2 e^{2(\alpha-1)x}}{2C^2} \left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)} \right)^2 \right)^n \right], \quad n \rightarrow \infty. \quad (68)$$

Действительно, оценивая остаточный член ряда с применением формулы суммы геометрической прогрессии, получаем неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \right| \leq |a_{n+1}(x)| \left[1 - \frac{15C_1^2 e^{2(\alpha-1)x}}{2C^2} \left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)} \right)^2 \right]^{-1},$$

что и доказывает (68).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Можно построить аналогичное решение в окрестности $x = -\infty$, справедливо также решение, полученное заменой y на $-y$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Если в (54) положить $x_2 = +\infty$, то все рассуждения остаются справедливы. Задача Коши переходит при этом в условие $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y e^{-x}) = C > 0$. Это условие уже не формирует задачу Коши, что не гарантирует единственности полученного решения. Однако можно поступить следующим образом: посчитать значение этого решения в какой-нибудь достаточно большой точке x_2 и задать, таким образом, задачу Коши. Решение этой задачи будет уже единственным на промежутке $x_1 \leq x \leq x_2$. Конечно же, можно выбрать x_2 сколь угодно большим, что, однако, не гарантирует отсутствия другого решения с тем же условием стремления на бесконечности.

В заключении этого раздела проиллюстрируем справедливость теоремы 4 и замечания 9 на простом примере. Предположим, что решением (53) является функция $y = e^x + 1$. Прямой подстановкой определяем, что такое возможно при $U(x) = 2e^x + 1$. Обозначим $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y e^{-x}) = 1$, $C_1 = \sqrt{3}$, $\alpha = 1/2$, $x_0 = 0$, $x_2 = \infty$, $x_1 = \ln 96$. В этих обозначениях получаем справедливость теоремы 4 и замечания 9. Решением (53) является ряд (55)–(57), где $a_0(x) = 1 + e^{-x}/4$. Это же решение можно представить следующим образом:

$$y = e^x + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k(x) = e^x + 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} O(e^{-(n+1)x}) = e^x + 1,$$

что и демонстрирует справедливость теоремы 4 и замечания 9.

7. РЕШЕНИЕ В ВИДЕ РЯДА ТЕЙЛОРА В ОКРЕСТНОСТИ $x = x_0$ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Поставим задачу Коши

$$y'_x = \sqrt{y^2 - U(x)}, \quad y(x_0) = y_0, \quad y_0^2 > U(x_0), \quad (69)$$

где $U(x)$ – заданная функция, аналитическая в окрестности $x = x_0$ и имеющая положительный радиус сходимости R :

$$U(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x - x_0)^m. \quad (70)$$

ТЕОРЕМА 5. *Единственным решением задачи (69) является ряд*

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x - x_0)^m. \quad (71)$$

Здесь $a_0 = y_0$, $a_1 = \sqrt{y_0^2 - b_0}$,

$$a_{m+1} = \frac{1}{2a_1(m+1)} \left(\sum_{k=0}^m a_k a_{m-k} - \sum_{k=1}^{m-1} (k+1)(m-k+1)a_{k+1}a_{m-k+1} - b_m \right), \quad (72)$$

если $m \geq 1$. При $m = 1$ считаем, что вторая сумма в скобках в (72) равна нулю. Радиус сходимости ряда (71) оценивается следующим образом:

$$R_1 \geq \frac{2|a_1|}{S}, \quad (73)$$

$$S = \max \left[64a_2^2; 9(2|a_1a_3|)^{2/3}, \frac{4|a_1|}{R}, \left(\frac{16|y_0|}{81} + \frac{19a_1^2}{324} + 6 + M \right)^2 \right], \quad (74)$$

$$M = \max \left(\frac{|b_m|R^{m-1}(m+1)^2}{2^m|a_1|} \right), \quad m \geq 3. \quad (75)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставив выражения (71) и (70) в (69), возводя в квадрат и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $x - x_0$, приходим к формуле (72). Для получения оценки радиуса сходимости ряда (71) выскажем предположение индукции. Пусть для любого $2 \leq k \leq m$

$$|a_k| \leq \frac{S^{k-1.5}}{k^3(2|a_1|)^{k-2}}, \quad (76)$$

где S – положительная константа, подлежащая определению. Докажем это утверждение для $k = m+1$ (из этого, кстати, автоматически вытекает справедливость (73)). Из неравенства (76) для $k = 2, 3$ имеем

$$S \geq 64a_2^2, \quad S \geq 9(2|a_1a_3|)^{2/3}. \quad (77)$$

Из выражения (72) следует, что для доказательства (76) при $k = m + 1$ достаточно выполнения условия

$$\begin{aligned} |a_{m+1}| &\leq \frac{1}{2|a_1|(m+1)} \left[\frac{2|y_0|S^{m-1.5}}{m^3(2|a_1|)^{m-2}} + \frac{S^{m-2.5}}{(m-1)^3(2|a_1|)^{m-2}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=2}^{m-2} \frac{S^{m-3}}{k^3(2|a_1|)^{m-4}(m-k)^3} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{S^{m-1}}{(k+1)^2(2|a_1|)^{m-2}(m-k+1)^2} + |b_m| \right] \leq \\ &\leq \frac{S^{m-0.5}}{(m+1)^3(2|a_1|)^{m-1}}, \quad m \geq 3. \end{aligned} \quad (78)$$

Из условия (78), в котором мы считаем, что первая сумма при $m = 3$ равна нулю, получаем еще одно условие на S :

$$\begin{aligned} S \geq &\left[\frac{2|y_0|(m+1)^2}{m^3\sqrt{S}} + \frac{(2a_1)^2(m+1)^2}{(m-1)^3S\sqrt{S}} + \frac{(2a_1)^2(m+1)^2}{S^2} \sum_{k=2}^{m-2} \frac{1}{k^3(m-k)^3} + \right. \\ &\left. + (m+1)^2 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{(k+1)^2(m-k+1)^2} + \frac{|b_m|(2|a_1|)^{m-2}(m+1)^2}{S^{m-1}} \right]^2 \end{aligned} \quad (79)$$

при $m \geq 3$. Оценим первую сумму из (79) при $m \geq 4$:

$$\begin{aligned} (m+1)^2 \sum_{k=2}^{m-2} \frac{1}{k^3(m-k)^3} &\leq (m+1)^2 \int_2^{m-1} \frac{dx}{(x-1)^3(m-x)^3} = \\ &= \frac{(m+1)^2}{(m-1)^3} \left(1 - \frac{1}{(m-2)^2} \right) + \frac{6(m+1)^2}{(m-1)^4} \left(1 - \frac{1}{m-2} \right) + \frac{12(m+1)^2 \ln(m-2)}{(m-1)^5} \leq \\ &\leq \frac{(m+1)^2}{(m-1)^3} + \frac{18(m+1)^2}{(m-1)^4} = \frac{(m+1)^2(m+17)}{(m-1)^4} \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{18}{m-1} \right) \left(1 + \frac{2}{m-1} \right)^2 \frac{1}{m-1} \leq \frac{175}{27} \leq 7. \end{aligned} \quad (80)$$

Для второй же суммы имеем

$$\begin{aligned} (m+1)^2 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{(k+1)^2(m-k+1)^2} &\leq (m+1)^2 \int_1^m \frac{dx}{x^2(m+1-x)^2} = \\ &= \frac{4 \ln m}{m+1} + \frac{2(m-1)}{m} \leq 6. \end{aligned} \quad (81)$$

Полагая в (79), что сумма равна шести, мы усилим неравенство. Тогда из этого неравенства следует, что $S \geq 36$. Последнее слагаемое в (79) представляет собой последовательность, для сходимости которой к нулю достаточно выполнения условия $S > 2|a_1|/R$. Положим в этой последовательности

$$S = \frac{4|a_1|}{R}. \quad (82)$$

Тогда последовательность является ограниченной. Пусть M – ее максимум. Считая в правой части (79), что последнее слагаемое равно M , значение $S = 36$ в первых

трех слагаемых, $m = 3$ в первых двух слагаемых и используя оценки (80) и (81), мы только усилим неравенство:

$$S \geq \left(\frac{16|y_0|}{81} + \frac{19a_1^2}{324} + 6 + M \right)^2. \quad (83)$$

Используя формулы (77), (82) и (83), доказываем равенство (74).

Докажем теперь положительность производной, используя выражения (73), (74) и (76):

$$y'(x) = a_1 + \sum_{m=2}^{\infty} m a_m (x - x_0)^{m-1} \geq a_1 - \frac{2a_1}{\sqrt{S}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2} \geq \frac{3a_1}{4} > 0.$$

Благодаря этому возведение в квадрат при получении (72) оказывается законным и, кроме того, для (69) при выполнении требований теоремы оказывается справедливым условие Липшица, что и доказывает единственность полученного решения. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. В теореме 5 мы считали радиус сходимости R конечным. В случае, если он бесконечен, в (74) положим $4|a_1|/R = 0$. Последнее слагаемое из (79) теперь сходится к нулю и ограничено при любом положительном S . Полагая в нем $S = 36$, мы получаем вместо (75) равенство

$$M = \max \left(\frac{|b_m a_1^{m-2}| (m+1)^2}{2 \cdot 18^{m-1}} \right), \quad m \geq 3.$$

С такими изменениями теорема 5 справедлива для бесконечного радиуса сходимости R .

ПРИМЕР 1. Рассмотрим потенциал $U(x) = x^2 + \lambda$. В этом случае в (70) имеем $b_0 = x_0^2 + \lambda$, $b_1 = 2x_0$, $b_2 = 1$, $b_m = 0$, $m \geq 3$. Далее считаем $R = \infty$. Тогда в (74) и (75) получаем $4|a_1|/R = M = 0$. При $\lambda = 0$ формулы (70)–(75) переходят в формулы для квадратичного потенциала.

Ввиду особой важности сформулируем следствие из теоремы 5 для квадратичного потенциала.

СЛЕДСТВИЕ 1. Единственным решением задачи (69) для $U(x) = x^2$ является ряд $y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m$. Здесь $a_0 = y_0$, $a_1 = \sqrt{y_0^2 - b_0}$,

$$a_{m+1} = \frac{1}{2a_1(m+1)} \left(\sum_{k=0}^m a_k a_{m-k} - \sum_{k=1}^{m-1} (k+1)(m-k+1) a_{k+1} a_{m-k+1} - b_m \right), \quad m \geq 1,$$

$$b_0 = x_0^2, \quad b_1 = 2x_0, \quad b_2 = 1, \quad b_m = 0, \quad m \geq 3.$$

При $m = 1$ считаем, что вторая сумма в скобках равна нулю. Радиус сходимости полученного ряда оценивается следующим образом:

$$R_1 \geq \frac{2|a_1|}{S}, \quad S = \max \left[64a_2^2; 9(2|a_1 a_3|)^{2/3}; \left(\frac{16|y_0|}{81} + \frac{19a_1^2}{324} + 6 \right)^2 \right].$$

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итоги. Будем рассматривать следующую задачу типа Коши:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'_\varphi = 0, \quad H^2 = \frac{1}{3M^2} \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) \right), \quad H(t_0) = H_0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0. \quad (84)$$

Если $V(\varphi) < 0$, $H_0 = 0$, то особое решение задачи (84) имеет вид

$$H \equiv 0, \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{-2V(\varphi)}} = \pm(t - t_0).$$

Если $V = V_0 \geq 0$, $H_0 = \pm \frac{1}{M} \sqrt{\frac{V_0}{3}}$, то особое решение (84) имеет вид $H = H_0$, $\varphi = \varphi_0$. Далее, для любого аналитического потенциала локальное решение задачи (84) дается теоремой 5 с использованием условия (5) и замен

$$H = \frac{1}{3}y, \quad \varphi = M\sqrt{\frac{2}{3}}x, \quad U = \frac{3V}{M^2}. \quad (85)$$

Для любого непрерывного медленно растущего потенциала (т. е. не быстрее экспоненты) решение (84) в окрестности достаточно большого φ_0 (в том числе и бесконечно большого) дается теоремой 4 с использованием равенства (5) и замен (85). Это решение описывает стадию так называемого Большого взрыва. Более конкретные формулы для квадратичного потенциала ($V(\varphi) = m^2\varphi^2/2$) в этом случае получены в работе [15]. Ряды, полученные в статье [15], являются обобщенными рядами Дирихле.

Для квадратичного потенциала в окрестности $\varphi = 0$ решение (84) $H(\varphi)$ дается теоремой 1. Используя замены

$$H = \frac{m}{3}y, \quad \varphi = M\sqrt{\frac{2}{3}}x, \quad U = \frac{3V}{M^2m^2}, \quad t = \frac{t_1}{m}, \quad (86)$$

получаем параметрическую зависимость $H(\varphi)$ от параметра ψ . Далее,

$$\begin{aligned} m(t - t_0) &= \int_x^{x_0} \frac{dx}{y'_x} = \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{x'_\psi}{\dot{x}(\psi)} d\psi = - \int_{\psi_0}^{\psi} \left[\frac{u'_\psi \cos(\psi/2)}{u \sin(\psi/2)} + \frac{1}{2} \right] d\psi = \\ &= \frac{\psi_0 - \psi}{2} + \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sin \psi d\psi}{2(u + \sin \psi)}. \end{aligned} \quad (87)$$

Получаем зависимость $t(\psi)$ и, следовательно, параметрические зависимости $H(t)$ и $\varphi(t)$. Пользуясь тем, что ряд в (7) сходится равномерно, имеем при больших ψ

$$u = \frac{\psi_0 - \psi}{2} + O(1), \quad m(t - t_0) = \frac{\psi_0 - \psi}{2} + O(1),$$

$$H = \frac{2}{3(t - t_0)} + O\left(\frac{1}{(t - t_0)^2}\right), \quad (88)$$

$$m\varphi = M\sqrt{6}H \cos \frac{\psi}{2}. \quad (89)$$

Приближенные формулы (88), (89) находятся в точном соответствии с результатами работы [1]. Однако теперь мы имеем и точные формулы в виде рядов. Как видно из (88), (89), при $\psi \rightarrow -\infty$ $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, мы имеем решения $H(t)$ и $\varphi(t)$ при неограниченно возрастающем времени. Решение $\varphi(t)$ (84), как было показано еще в монографии [1], в этой окрестности представляет из себя затухающие колебания. Фазовая же траектория в системе координат $\dot{\varphi}(\varphi)$ в окрестности $\varphi = 0$ является закручивающейся по часовой стрелке к началу координат спиралью.

И, наконец, разберем для квадратичного потенциала область инфляции (так называемую “аттракторную” область). Эта область примерно описывается соотношениями

$$\frac{3H}{m} - \frac{\varphi}{M} \sqrt{\frac{3}{2}} \ll \frac{\varphi}{M} \sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{3H}{m}.$$

Точное описание этой области и два типа решений в ней даются теоремами 2 и 3 с использованием условия (5) и замен (86).

Благодарности. Работа была начата на спецсеминаре НОЦ МИАН. Выражаю благодарность всем участникам семинара за активное обсуждение работы. Особую благодарность хочется выразить И. В. Воловичу за постановку задачи и ряд ценных советов.

Список литературы

- [1] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [2] В. А. Белинский, И. М. Халатников, “О степени общности инфляционных решений в космологических моделях со скалярным полем”, *ЖЭТФ*, **93**:3 (1987), 784–799.
- [3] A. V. Yurov, V. A. Yurov, “Friedman versus Abel equations: a connection unraveled”, *J. Math. Phys.*, **51**:8 (2010), 082503, 17 pp., arXiv:0809.1216.
- [4] H.-C. Kim, “A new variable in scalar cosmology with exponential potential”, *J. Korean Phys. Soc.*, **63**:8 (2013), 1675–1680, arXiv:1303.6402.
- [5] J. G. Russo, “Exact solution of scalar field cosmology with exponential potentials and transient acceleration”, *Phys. Lett. B*, **600**:3–4 (2004), 185–190, arXiv:hep-th/0403010.
- [6] E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, “Late-time cosmology in (phantom) scalar-tensor theory: dark energy and the cosmic speed-up”, *Phys. Rev. D*, **70**:4 (2004), 043539, 20 pp., arXiv:hep-th/0405034.
- [7] S. Nojiri, S. D. Odintsov, “Unifying phantom inflation with late-time acceleration: scalar phantom-non-phantom transition model and generalized holographic dark energy”, *Gen. Rel. Grav.*, **38**:8 (2006), 1285–1304, arXiv:hep-th/0506212.
- [8] S. Capozziello, S. Nojiri, S. D. Odintsov, “Unified phantom cosmology: inflation, dark energy and dark matter under the same standard”, *Phys. Lett. B*, **632**:5–6 (2006), 597–604, arXiv:hep-th/0507182.
- [9] L. P. Chimento, “General solution to two-scalar field cosmologies with exponential potential”, *Class. Quantum Grav.*, **15**:4 (1998), 965–974.
- [10] I. Ya. Aref'eva, L. V. Joukovskaya, S. Yu. Vernov, “Dynamics in nonlocal linear models in the Friedmann–Robertson–Walker metric”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**:30 (2008), 304003, 14 pp., arXiv:0711.1364.
- [11] D. S. Salopek, J. R. Bond, “Nonlinear evolution of long-wavelength metric fluctuations in inflationary models”, *Phys. Rev. D*, **42**:12 (1990), 3936–3962.
- [12] P. Fré, A. Sagnotti, A. S. Sorin, “Integrable scalar cosmologies I. Foundations and links with string theory”, *Nucl. Phys. B*, **877**:3 (2013), 1028–1106.

- [13] И. Я. Арефьева, С. Ю. Вернов, А. С. Кошелев, “Точное решение в струнной космологической модели”, *ТМФ*, **148**:1 (2006), 23–41.
- [14] А. В. Юров, В. А. Юров, С. В. Червон, М. Сами, “Потенциал полной энергии как суперпотенциал в интегрируемых космологических моделях”, *ТМФ*, **166**:2 (2011), 299–311.
- [15] Э. А. Курьянович, “Представление решения уравнения Фридмана обобщенным рядом Дирихле”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 2013, № 2(31), 200–205.
- [16] E. A. Kurianovich, “Exact solutions of Friedmann equation”, *J. Math. Phys.*, **57**:12 (2016), 122503, 14 pp.
- [17] I. Y. Aref'eva, A. S. Koshelev, S. Yu. Vernov, “Crossing the $w = -1$ barrier in the D3-brane dark energy model”, *Phys. Rev. D*, **72**:6 (2005), 064017, 11 pp., arXiv: astro-ph/0507067.

Поступила в редакцию 3.11.2017,
после доработки 17.10.2018,
принята к публикации 1.11.2018