Б. М. Гуревич, Конечные аппроксимации бесконечных неотрицательных матриц и сходимость равновесных распределений,
Докл. РАН, 1996, том 347, номер 6, 732–735

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1996, том 347, № 6, с. 732–735

МАТЕМАТИКА

УДК 519.217+519.53

КОНЕЧНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ БЕСКОНЕЧНЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ И СХОДИМОСТЬ РАВНОВЕСНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

© 1996 г. Б. М. Гуревич

Представлено академиком Я.Г. Синаем 15.08.94 г.

Поступило 25.08.94 г.

1. ВВЕДЕНИЕ

Различным свойствам неотрицательных матриц посвящена обширная литература. Однако в подавляющем большинстве работ, касающихся бесконечных неотрицательных матриц, речь идет о стохастических матрицах и связанных с ними цепях Маркова. Первое подробное исследование произвольных бесконечных неотрицательных матриц было проведено Вир-Джонсом (Vere-Jones) [1] (см. также [2]), который, в частности, нашел условия применимости к ним теоремы Перрона–Фробениуса. Важно отметить, что при этом на матрицу не накладывалось никаких ограничений, гарантирующих существование отвечающего ей линейного оператора в каком-либо пространстве последовательностей.

В дальнейшем обнаружилось [3–5], что изученные в [1] свойства бесконечных матриц непосредственно связаны с проблемой существования равновесного распределения (распределения Гиббса) в простейшей одномерной решеточной модели статистической физики с бесконечным множеством типов частиц и с применимостью к этому распределению вариационного принципа Гиббса.

Цель настоящей заметки – показать, как свойства бесконечной неотрицательной матрицы проявляются в поведении отвечающих этой матрице "конечных" объектов, в частности последовательностей ее конечных подматриц растущего порядка и определяемых ими равновесных распределений. Близкие по духу задачи, относящиеся к свойству возвратности, рассматривались в [2, 6, 7]; мы же сосредоточимся на более сильном свойстве положительной возвратности (см. ниже), эквивалентном существованию трансляционно инвариантного равновесного распределения.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

2. НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ (СР. [1, 2, 4])

Пусть V – конечное или счетное множество и Q – неотрицательная функция, заданная на $V \times V$. При желании ее можно рассматривать как матрицу, считая элементы V занумерованными в произвольном порядке, – все дальнейшее от этого порядка зависеть не будет. Поставим в соответствие функции Q ориентированный граф $G(Q)$ с множеством вершин V, проведя из каждой вершины $v \in V$ ребра (v, v') во все вершины $v' \in V$, для которых $Q(v, v') > 0$. Будем предполагать, что граф $G(Q)$ связен: для любой пары v, v' его вершин найдется путь, ведущий из v в v', т.е. такая последовательность $\gamma = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$, что $v_0 = v$, $v_n = v'$ и все пары (v_i, v_{i+1}), $0 \le i \le n-1$, являются ребрами. Число n называется длиной пути γ. Связность графа $G(Q)$, очевидно, равносильна неприводимости матрицы Q. Пусть $v \in V$, n – натуральное число, $\Gamma(v, n)$ – множество путей длины n, ведущих из v в v' (будем называть их (v, n)-ц и к л а м и), и $\Gamma_0(v, n)$ – множество таких (v, n)-циклов, в которых v не встречается в качестве промежуточной вершины (будем называть их п р о с т ы м и (v, n)-ц и к л а м и). Назовем в е с о м пути $\gamma = (v_0, \ldots, v_n)$ произведение $Q(\gamma) = Q(v_0, v_1)Q(v_1, v_2)\ldots Q(v_{n-1}, v_n)$ и предположим, что для любых v и n сумма $b(Q, v, n)$ весов всех (v, n)-циклов конечна. Очевидно, это свойство равносильно конечности элементов всех степеней матрицы Q. Обозначим через $a(Q, v, n)$ сумму весов всех простых (v, n)-циклов (очевидно, $a(Q, v, n) \le b(Q, v, n)$) и рассмотрим производящие функции

$$g_{Q,v}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b(Q, v, n)x^n,$$

$$f_{Q,v}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a(Q, v, n)x^n.$$

Вследствие связности графа $G(Q)$ радиус сходимости $R(Q)$ первого из этих рядов конечен, не зависит от v и может служить характеристикой матрицы Q, которая называется возвратной, если $g_{Q,v}(R(Q)) = \infty$, и положительно возвратной (или $R(Q)$-положительной), если $b(Q, v, n)(R(Q))^n \not\to 0$ при $n \to \infty$ (наличие и отсутствие этих свойств снова не зависит от v). Положительную возвратность можно охарактеризовать и с помощью функции $f_{Q,v}$. Пусть $r_{Q,v}$ – радиус сходимости ряда $f_{Q,v}$ (здесь и в дальнейшем, где это не может вызвать путаницы, мы отождествляем степенной ряд с его суммой); положительная возвратность равносильна выполнению для некоторого $v \in V$ одного из следующих двух условий:

(а) $f_{Q,v}(r_{Q,v}) > 1$,

(б) $f_{Q,v}(r_{Q,v}) = 1, \quad \frac{d}{dx} f_{Q,v}(x)|_{x = r_{Q,v}} < \infty$

(как и раньше, каждое из них либо выполняется для всех v, либо не выполняется ни для одного). Будем называть матрицу Q устойчиво $R(Q)$-положительной в случае (а) и неустойчиво $R(Q)$-положительной в случае (б). В обоих случаях выполняется равенство $f_{Q,v}(R(Q)) = 1$ (тем самым в случае (б) $r_{Q,v} = R(Q)$ для любой вершины v). Нетрудно показать, что конечная матрица всегда устойчиво $R(Q)$-положительна (для нее функции $g_{Q,v}$ и $f_{Q,v}$ рациональны).

В случае неприводимой $R(Q)$-положительной матрицы Q число $\lambda(Q) = \frac{1}{R(Q)}$ является собственным значением как ее самой, так и сопряженной матрицы, и ему отвечают положительные собственные векторы x и y, т.е. такие функции $x: V \to R$ и $y: V \to R$, что $x(v)y(v) > 0$ и

$$\sum_{v' \in V} Q(v, v')x(v') = \lambda(Q)x(v),$$

$$\sum_{v' \in V} Q(v', v)y(v') = \lambda(Q)y(v), \quad v \in V.$$

Векторы x и y определяются однозначно с точностью до множителя и могут быть выбраны так, что

$$\sum_{v \in V} x(v)y(v) = 1.$$

Обратно, если неприводимая матрица Q обладает описанными "спектральными" свойствами, то она $R(Q)$-положительна.

С помощью $R(Q)$-положительной матрицы Q можно задать на пространстве последовательностей $V^{\mathbb{Z}}$ марковскую вероятностную меру μ_Q с переходными вероятностями

$$p(v, v') = \frac{Q(v, v')x(v')}{\lambda(Q)x(v)}, \quad v, v' \in V, \tag{1}$$

и начальным (стационарным) распределением

$$\pi(v) = x(v)y(v), \quad v \in V. \tag{2}$$

Меру μ_Q будем называть Q-равновесной. Легко видеть, что она сосредоточена на множестве двусторонне-бесконечных путей графа $G(Q)$.

Будем называть последовательность $\{G_n, n = 1, 2, \ldots\}$ конечных подграфов графа $G = G(Q)$ исчерпывающей, если она не убывает (всякое ребро графа G_n служит ребром графа G_{n+1}) и если всякое ребро графа G является ребром графа G_n, начиная с некоторого n. Если граф G связен, существуют исчерпывающие последовательности, состоящие из его связных подграфов [8]; в дальнейшем только такие последовательности и будут рассматриваться. Каждому G_n можно поставить в соответствие подматрицу $Q_n = Q(G_n)$ матрицы Q, взяв в качестве Q_n ограничение функции Q на множество ребер графа G_n, дополненное нулем на множестве пар (v, v'), образованных вершинами графа G_n, но не являющихся его ребрами. Если $\{G_n\}$ – исчерпывающая последовательность подграфов, будем называть исчерпывающей и последовательность подматриц Q_n. Известно, что для такой последовательности

$$\lim_{n \to \infty} R(Q_n) = R(Q),$$

поведение же последовательности равновесных мер μ_{Q_n} при $n \to \infty$ до сих пор не рассматривалось.

3. НОВЫЕ УСЛОВИЯ $R(Q)$-ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ

В работе [9] содержатся достаточные условия $R(Q)$-положительности бесконечной матрицы Q, состоящей из нулей и единиц. Можно показать, что эти условия необходимы и достаточны для устойчивой $R(Q)$-положительности и что они обобщаются на произвольные неотрицательные матрицы. Однако в их формулировке наряду с конечным подграфом графа $G(Q)$ непосредственно фигурирует и дополнение этого подграфа до всего $G(Q)$, т.е. некоторый бесконечный подграф. Ниже мы будем иметь дело лишь с последовательностями конечных подграфов.

Для любой конечной неотрицательной матрицы Q и любой вершины v графа $G(Q)$ положим

$$D(Q, v) = \frac{d}{dx} f_{Q,v}(x)|_{x = R(Q)}.$$

Теорема 1. *Если для некоторой исчерпывающей последовательности $\{Q_n\}$ неприводимых конечных подматриц неотрицательной матрицы Q и некоторой вершины v графа $G(Q)$ последовательность $\{D(Q_n, v)\}$ ограничена, то матрица Q является $R(Q)$-положительной.*

Теорема 2. *Если матрица Q является устойчиво $R(Q)$-положительной, то для любой исчерпывающей последовательности $\{Q_n\}$ ее неприводимых конечных подматриц и любой вершины v графа $G(Q)$ последовательность $\{D(Q_n, v)\}$ имеет конечный предел.*

Теоремы 1 и 2 полностью характеризуют поведение последовательности $\{D(Q_n, v)\}$ во всех случаях, кроме одного: когда матрица Q неустойчиво $R(Q)$-положительна. В этом случае ситуация сложнее.

Теорема 3. *Существуют неустойчиво $R(Q)$-положительная матрица Q, две исчерпывающие последовательности $\{Q_n\}$ и $\{Q'_n\}$ ее неприводимых конечных подматриц и вершина v графа $G(Q)$, для которых*

$$\lim_{n\to\infty} D(Q_n, v) < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} D(Q'_n, v) = \infty.$$

Замечание 1. Утверждение теоремы 3 справедливо для всех неустойчиво $R(Q)$-положительных матриц Q, которым отвечают графы $G(Q)$ со специальной геометрической структурой, называемые иногда специальными графами (ср. [10]). Вершины такого графа находятся во взаимно однозначном соответствии с парами натуральных чисел (i, j), где $1 \le i < \infty$, $1 \le j \le j_0(i) < \infty$, а ребра образованы парами вершин вида $((i, j), (i, j+1))$, $j \le j_0(i) - 1$, и $((i, j_0(i)), (i', 1))$, $i' = 1, 2, \ldots$, где j_0 – произвольная функция со значениями в множестве натуральных чисел. Опыт показывает, что многие утверждения, касающиеся всех неотрицательных матриц Q, достаточно доказать для случая, когда $G(Q)$ – специальный граф. Это, однако, не относится к теореме 3: существуют неустойчиво $R(Q)$-положительные матрицы Q, для которых последовательность $\{D(Q_n, v)\}$ ограничена, каковы бы ни были исчерпывающая последовательность $\{Q_n\}$ и вершина v. Неизвестно, существует ли аналогичный пример, в котором $D(Q_n, v) \to \infty$ для любых $\{Q_n\}$ и v.

Имеется еще одна возможность выразить $R(Q)$-положительность бесконечной матрицы Q в терминах связанных с ней "конечных" объектов. Для этого достаточно вместо степенных рядов, задающих $f_{Q_n, v}$, рассмотреть частные суммы $f_{Q, n, v}(x)$ степенного ряда, определяющего $f_{Q, v}(x)$. Пусть $t(v, n)$ – единственное неотрицательное решение уравнения $f_{Q, v, n}(x) = 1$, где

$$f_{Q, v, n}(x) = \sum_{k=1}^{n} a(Q, v, k)x^k.$$

Положим

$$d(v, n) = \frac{d}{dx} f_{Q, v, n}(x)\big|_{x = t(v, n)}.$$

Теорема 4. *Для того чтобы матрица Q была $R(Q)$-положительной, необходимо и достаточно, чтобы для какой-нибудь вершины v графа $G(Q)$ выполнялось условие*

$$\lim_{n\to\infty} d(v, n) < \infty. \tag{3}$$

Если это условие выполняется для одной вершины v, то оно имеет место для всех $v \in V$.

Достаточность условия (3) для $R(Q)$-положительности доказывается несложно, доказательство необходимости основано не следующем наблюдении, касающемся степенных рядов с неотрицательными коэффициентами.

Теорема 5. *Пусть*

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k, \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k,$$

где $c_k \ge 0$. Предположим, что ряд $S(x)$ имеет конечный ненулевой радиус сходимости r и что $S(r) = s \le \infty$. Пусть $r_n > 0$ удовлетворяет уравнению $S_n(x) = s$. Тогда последовательность чисел $S'(r_n)$ не убывает и при $n \to \infty$ сходится к $S'(r)$ (под $S'(r)$ понимается сумма продифференцированного ряда, быть может, равная бесконечности).

Замечание 2. Очевидно, теорема 5 дает в случае неустойчивой $R(Q)$-положительности несколько больше, чем утверждается в теореме 4, а именно, монотонную сходимость $d(v, n)$ к производной функции $f_{Q, v}$ в точке $R(Q)$. Можно показать, что монотонность имеет место во всех случаях, но при $f_{Q, v}(r_{Q, v}) < 1$ и при $f_{Q, v}(r_{Q, v}) > 1$ предел соответственно равен бесконечности и $f'_{Q, v}(R(Q))$, в первом случае он не меньше, а во втором меньше, чем $f'_{Q, v}(r_{Q, v})$, причем и в первом случае равенства может не быть.

4. СХОДИМОСТЬ РАВНОВЕСНЫХ МЕР

Пусть $\{Q_n\}$ – исчерпывающая последовательность неприводимых конечных подматриц матрицы Q. Как уже было сказано, равновесная мера μ_{Q_n}, сосредоточенная на пространстве бесконечных путей графа $G(Q_n)$, – это марковская мера, параметры которой задаются формулами (1) и (2). Следующее утверждение показывает, что поведение последовательности $\{\mu_{Q_n}\}$ определяется числовой последовательностью $\{D(Q_n, v)\}$.

Теорема 6. *Последовательность равновесных мер μ_{Q_n} сходится к равновесной мере μ_Q, отвечающей матрице Q, в том и только том случае, когда*

$$\lim_{n \to \infty} D(Q_n, v) = D(Q, v) < \infty.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 93–011–16–090), и фонда "Культурная инициатива".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vere-Jones D.* // Pacific J. Math. 1967. V. 22. P. 365–386.
2. *Seneta E.* Non-negative Matrices. L.: George Allen & Unwin Ltd. 1981.
3. *Гуревич Б.М.* // ДАН. 1978. Т. 241. № 4. С. 749–752.
4. *Gurevich B.M.* // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. 1984. B. 68. S. 205–242.
5. *Kesten H.* // Ann. Probab. 1976. V. 4. P. 557–569.
6. *Seneta E.* // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1967. V. 63. P. 983–992.
7. *Seneta E.* // Ibid. 1968. V. 64. P. 465–470.
8. *Гуревич Б.М.* // ДАН. 1969. Т. 187. № 4. С. 715–718.
9. *Гуревич Б.М., Заргарян А.С.* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1988. № 5. С. 14–18.
10. *Гуревич Б.М.* // ДАН. 1970. Т. 192. № 5. С. 963–965.