

# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. Y. Bylyi, Parabolic Equation Method for Anisotropic Elastic Media, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 117, 27–38

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use  
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.88

December 2, 2024, 23:05:30



МЕТОД ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В АНИЗОТРОПНОЙ  
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Известно, что основные понятия и формулы лучевого метода с успехом обобщаются на случаи как изотропных, так и анизотропных упругих сред [1]. Однако, хорошо развитая в акустической теории техника локальных разложений применялась лишь в изотропной теории упругости [2]. В настоящей статье изучаются возможности метода параболического уравнения Леонтовича-Фока применительно к плоской задаче дифракции анизотропной упругой волны на гладком выпуклом контуре.

I. Постановка задачи.

Рассмотрим плоскую неоднородную анизотропную среду, характеризуемую тензором упругих постоянных  $a_{ik,jl}(x)$  и плотностью  $\rho(x)$  ( $i, j, k, l = 1, 2$ ;  $x = (x^1, x^2)$ ). Зависимость процессов распространения и дифракции волн от времени  $t$  будем считать гармонической (множитель  $\exp\{-i\omega t\}$  везде опускается), тогда система уравнений теории упругости примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (a_{ik,jl} \frac{\partial U^j}{\partial x^l}) + \omega^2 \rho U^i = 0 \quad i, j, k, l = 1, 2 \quad (I.1)$$

где  $U^j$  - составляющие вектора смещений,  $\omega \rightarrow \infty$  - большой параметр задачи. Напомним, что компоненты тензора упругих постоянных удовлетворяют соотношениям симметрии:

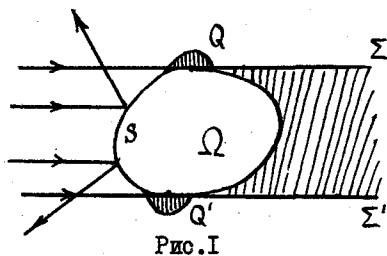
$$a_{ik,jl} = a_{ki,jl} = a_{ik,lj} = a_{jl,ik}$$

и положительной определенности:

$$a_{ik,jl} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jl} \geq \alpha \sum_{i,k=1,2} (\varepsilon_{ik})^2 \quad \alpha > 0.$$

Рассматриваемая среда занимает внешность ограниченной области  $\Omega$  на плоскости  $(x^1, x^2)$ . Гладкая граница области  $\Omega$ , кривая  $S$  (рис.1), задается уравнениями

$$S: \quad x^k = X^k(s) \quad s \in [0, L], \quad k = 1, 2 \quad (I.2)$$



где  $S$  - длина дуги, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки  $x \in S$ .  
 Контур  $S$  будем считать выпуклым в том смысле, что он имеет всюду положительный радиус кривизны\* по отношению к падающей волне  $\vec{U}^{(n)}$ ,

задаваемой своим лучевым разложением [I]:

$$\vec{U}^{(n)} = e^{i\omega\tau_n(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \vec{U}_n^{(n)}(x) (-i\omega)^{-n} \quad (I.3)$$

Пусть поле лучей  $\vec{U}^{(n)}$  регулярно, и имеется два предельных луча  $\Sigma$  и  $\Sigma'$ , касающихся  $S$  соответственно в точках  $Q$  и  $Q'$ . Мы будем строить отраженную волну  $\vec{U}^{(отр)}$  в малой окрестности точки  $Q$ , поэтому примем ее за начало координат и положим  $\tau_n(x)|_{x=0} = 0$ . Для простоты будем рассматривать краевые условия

$$\vec{U}|_S = 0. \quad (I.4)$$

## 2. Трансверсальные координаты.

Прежде чем перейти непосредственно к построению поля отраженной волны в окрестности точки  $O$  введем более естественную для данной задачи, чем декартова, систему координат, связанную с контуром  $S$ .

Определим функции Гамильтона  $H_1(x, p)$  и  $H_2(x, p)$  как корни уравнения

$$\det \| a_{ij}^{kl} p_k p_l - p \lambda \delta_{ij} \| = 0 \quad (2.1)$$

относительно неизвестного  $\lambda$   
 (здесь введено обозначение  $a_{ij}^{kl} = a_{i k, j l}$ ).

Пусть для определенности гамильтониан  $H_1$  соответствует  $\vec{U}^{(n)}$ , т.е.  $\tau_n(x)$  удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

$$H_1(x, \nabla \tau_n) = 1 \quad (2.2)$$

\* Это понятие будет уточнено позднее (см. конец раздела 3)

Поскольку характеристики уравнения (2.2) являются экстремальными соответствующего функционала  $\int L dx^k [I]$ , их поле можно строить, задавая начальное направление на кривой  $S$ . Возьмем это направление касательным к  $S$ , а для функции поля  $\varphi(x)$  положим  $\varphi(0)=0$ . Таким образом построено поле лучей соскальзывания с функцией поля  $\varphi(x)$ . Обозначим через  $\tau$  квазидлину дуги кривой, отсчитываемую от точки  $0$ :

$$\tau = \tau(s) = \varphi(X(s)) \quad (2.3)$$

и построим на  $S$  поле вектора  $\vec{\xi}(\tau)$ , ортогонального градиенту  $\nabla\varphi$  (рис.2)

$$\xi^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = 0.$$

Беря  $\tau$  в качестве нового параметра, задающего  $S$  введем трансверсальные координаты  $(\tau, n)$  по формуле:

$$x^k = X^k(\tau) + n \xi^k(\tau) \quad k=1,2. \quad (2.4)$$

Вектор  $\vec{\xi}(\tau)$  нормируем так чтобы выполнялось равенство:

$$\left. \frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(\tau, n)} \right|_{n=0} = 1.$$

Это можно сделать, т.к. система координат  $(\tau, n)$  регулярна в некоторой окрестности кривой  $S$  (градиент  $\nabla\varphi$  не может быть ортогонален соответствующему лучу в силу положительной определенности  $a^{kl}_{ij}$ ).

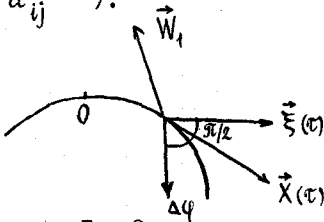


Рис.2

Векторы  $\vec{W}_1(x)$  и  $\vec{U}_0^{(n)}(x)$  удовлетворяют уравнению

$$a^{kl}_{ij} p_k p_l V^j - \rho V^i = 0 \quad i, k, j, l = 1, 2, \quad (2.5)$$

где соответственно полагается  $p_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$  и  $p_k = \frac{\partial \tau_n}{\partial x^k}$ . Заметим, что в точке  $0$   $\vec{W}_1$  и  $\vec{U}_0^{(n)}$  коллинеарны, т.к. по построению

$$\nabla \tau_n |_{x=0} = \nabla \varphi |_{x=0}$$

Обозначим  $\vec{W}_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{W}_1(\tau, n)|_{n=0}$ .

### 3. Дополнительное поле лучей.

Введем в рассмотрение еще одно поле лучей, связанное с кривой  $S$  и в некотором смысле двойственное полю лучей соскальзывания.

Перейдем к координатам  $(\tau, n)$  и рассмотрим уравнение (2.5) для лучей соскальзывания. По построению координатной системы  $(\tau, n)$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{n=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right|_{n=0} = 1,$$

отсюда получаем при  $x \in S$

$$[a_{ij}^{\tau\tau} - \rho g_{ij}] W_1^j(\tau) = 0$$

или в векторной форме

$$L(\tau) \vec{W}_1(\tau) = 0. \quad (3.1)$$

Здесь  $g_{ij}(x) = \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^k}{\partial q^j}$  ( $q^1 = \tau, q^2 = n$ ) — компоненты евклидова метрического тензора.

Построим теперь поле лучей, соответствующее гамильтониану  $H_2$ , причем на функцию поля  $\psi$  наложим краевое условие

$$\begin{aligned} \psi|_n = \tau \quad \text{или} \quad (3.2) \\ \psi_\tau|_{n=0} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau}|_{n=0} = 1, \quad \psi(0) = 0. \end{aligned}$$

Будем считать, что это можно сделать единственным способом, причем построенные лучи уходят внутрь среды под ненулевым углом к вектору  $\frac{d}{d\tau} \vec{X}(\tau)$ , а вещественная функция  $\psi_n(\tau) = \frac{\partial \psi}{\partial n}|_{n=0}$  нигде на  $S$  не обращается в нуль.

Соответствующий вектор поляризации  $\vec{W}_2(\tau, n)$  (пока не нормированный) удовлетворяет системе уравнений

$$(a_{ij}^{kl} \psi_k \psi_l - \rho g_{ij}) W_2^j = 0.$$

Обозначим  $\vec{W}_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{W}_2(\tau, n)|_{n=0}$ . Оказывается, что для любого  $\tau$  векторы  $\vec{W}_1(\tau)$  и  $\vec{W}_2(\tau)$  линейно независимы. Прежде, чем показать это сформулируем важное для дальнейших рассмотрений

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.** Уравнение

$$L(\tau) \vec{U}(\tau) = \vec{N}(\tau), \quad \text{где } N_i(\tau) = (a_{ij}^{n\tau} + a_{ij}^{\tau n}) W_i^j(\tau)$$

разрешимо относительно  $\vec{U}$  при любом  $\tau$ , т.е. имеет место тождество

$$a_{ij}^{n\tau} W_i^j(\tau) W_i^i(\tau) = 0. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для произвольной пары  $\rho = (\rho_n, \rho_\tau)$  вектор  $\vec{W}(\rho)$  определяется равенствами.

$$a_{ij}^{kl} \rho_k \rho_l W_i^j(\rho) - \rho H_1(\rho) g_{ij} W_i^j(\rho) = 0. \quad (3.4)$$

$$|\vec{W}(\rho)|^2 \rho = 1.$$

Тогда, очевидно,

$$H_1(\rho) = a_{ij}^{kl} \rho_k \rho_l W_i^j(\rho) W_i^i(\rho). \quad (3.5)$$

Продифференцируем (3.5) по  $\rho_n$  и, пользуясь (3.4), получим:

$$\frac{\partial H_1(\rho)}{\partial \rho_n} = 2 a_{ij}^{nk} \rho_k W_i^j(\rho) W_i^i(\rho). \quad (3.6)$$

Положим теперь в (3.6)  $n=0$ ,  $\rho_n = \varphi_n = 0$ ,  $\rho_\tau = \varphi_\tau = 1$ . Левая часть (3.6) равна нулю в силу того, что лучи соскальзывания касаются  $S'$ , и предложение доказано.

Докажем теперь

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Векторы  $\vec{W}_1(\tau)$  и  $\vec{W}_2(\tau)$  линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим обратное, тогда

$$(a_{ij}^{kl} \varphi_k \varphi_l - \rho g_{ij}) W_i^j(\tau) = 0.$$

Но в силу (3.1) и (3.2) это означает, что

$$(a_{ij}^{\tau n} + a_{ij}^{n\tau} + a_{ij}^{nn} \varphi_n) W_i^j(\tau) = 0.$$

Допножим эти равенства на  $W_i^i(\tau)$ , просуммируем по  $i$  и воспользуемся Предложением 1. В результате получим:

$$a_{ij}^{nn} W_i^j(\tau) W_i^i(\tau) = 0,$$

чего не может быть в силу положительной определенности тензора

$a_{ij}^{kl}$ . Предложение 2 доказано.

Теперь можно нормировать вектор  $\vec{W}_2(\tau)$  потребовав выполнения соотношения

$$L(\tau) \vec{W}_2(\tau) = \vec{N}(\tau) \quad (\text{см. Предложение I})$$

В заключение раздела введем понятия эффективного радиуса кривизны и скорости распространения волн  $\vec{U}^{(n)}$  вдоль  $\vec{S}$ .

Пусть

$$L[0,1](\tau) = \left[ \frac{\partial}{\partial n} L(n, \tau) \right]_{n=0} -$$

линейный оператор с матричными элементами

$$(L[0,1](\tau))_{ij} = \left[ \frac{\partial}{\partial n} (a_{ij}^{\tau\tau}(n, \tau) - \rho g_{ij}) \right]_{n=0}.$$

Определим величины  $R(\tau)$  и  $C(\tau)$  по формулам

$$\begin{aligned} \frac{2}{R(\tau)} &= (L[0,1] \vec{W}_1, \vec{W}_1) [(L(\tau) \vec{W}_2, \vec{W}_2) + (a^{nn} \vec{W}_1, \vec{W}_1)]^2 \\ C(\tau) &= [(L(\tau) \vec{W}_2, \vec{W}_2) + (a^{nn} \vec{W}_1, \vec{W}_1)]^3, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $(a^{nn})_{ij} = a_{ij}^{nn}$ .

Назовем  $R(\tau)$  эффективным радиусом кривизны  $\vec{S}$  по отношению к  $\vec{U}^{(n)}$ , а  $C(\tau)$  - скоростью распространения  $H_1$  - волн вдоль  $\vec{S}$ .

#### 4. Параболическое уравнение Леонтовича-Фока.

Запишем уравнения теории упругости в трансверсальных координатах  $(\tau, n)$  :

$$[\nabla_k a_{ij}^{kl} \nabla_l + \omega^2 \rho g_{ij}] U^j = 0. \quad (4.1)$$

Здесь  $\nabla_k$  - оператор ковариантного дифференцирования. Будем искать решение (4.1) в окрестности точки  $x=0$  в виде

$$\vec{U} = e^{i\omega\tau} \vec{V}(\tau, n, \omega), \quad (4.2)$$

предполагая, что [3]

$$\left| \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial \tau^2} \right| \gg \left| \frac{\partial \vec{V}}{\partial \tau} \right| \gg |\vec{V}|, \quad \left| \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial n^2} \right| \gg \left| \frac{\partial \vec{V}}{\partial n} \right| \gg |\vec{V}|$$

Подставляя (4.2) в (2.1) и свертывая известные тензоры получаем уравнение для  $\vec{V}$  :

$$\omega^2 L_{ij}(\tau, n) \vec{V} = i\omega [\Lambda^k \frac{\partial \vec{V}}{\partial q^k} + F^\tau \vec{V}] + a^{kl} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial q^k \partial q^l} + F^l \frac{\partial \vec{V}}{\partial q^l} + B \vec{V}, \quad (4.3)$$

где  $L_{ij}(\tau, n) = a^{\tau\sigma}_{ij}(\tau, n) - \rho(\tau, n) g_{ij}(\tau, n)$ ;

$$\Lambda^k_{ij} = a^{\tau k}_{ij} + a^{k\tau}_{ij}; \quad [a^{kl}]_{ij} = a^{kl}_{ij},$$

а  $F_{ij}^l$  и  $\Gamma_{lm}^k B_{ij}$  выражаются через  $a^{kl}_{ij}$  и коэффициенты связности.

Введем локальные переменные  $b$  и  $\nu$  по формулам [3] :

$$b = \omega^{1/3} C_b \tau = \frac{\omega^{1/3} \tau}{\sqrt{2R^2(0)C(0)}} \quad (4.4)$$

$$\nu = \omega^{2/3} C_\nu n = \frac{2^{1/3} \omega^{2/3} n}{\sqrt[3]{C(0)R(0)}}$$

(см. (3.7)).

Разложим коэффициенты системы (4.3) в ряды по степеням  $n$ , обозначая коэффициенты разложений при  $n^\lambda$  через  $L[0, \lambda](\tau)$  ( $L[0, 0] = L(\tau)$ ,  $\Lambda[0, \lambda]$  и т.д. (ноль слева в скобках показывает, что разложение проведено только по  $n$ ), и перейдем к переменной  $\nu$ . После этого при старшей степени  $\omega^2$  получим уравнение

$$L(\tau) \vec{V} = 0, \quad (4.5)$$

которому удовлетворяет любая вектор-функция вида:

$$\vec{V}_0 = g_0(b, \nu) \vec{W}_1(\tau). \quad (4.6)$$

Попытаемся уточнить это приближение с помощью поправки  $O(\omega^{-1/3})$ , полагая

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \omega^{-1/3} \vec{V}_1.$$

При  $\omega^{5/3}$  получим уравнение для  $\vec{V}_1$ :

$$L(\tau) \vec{V}_1 = i c_\nu \frac{\partial g_0}{\partial \nu} \vec{N}(\tau) \quad (4.7)$$



откуда

$$V_1 = g_1(b, \nu) \vec{W}_1(\tau) + ic_\nu \frac{\partial g_0}{\partial \nu} \vec{W}_2(\tau), \quad (4.8)$$

т.е. на функцию  $g_0(b, \nu)$  по-прежнему не накладывается никаких ограничений, и появляется новая произвольная функция  $g_1(b, \nu)$ .

Продолжим уточнение решения:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \omega^{-1/3} \vec{V}_1 + \omega^{-2/3} \vec{V}_2$$

и придем к уравнению для  $\vec{V}_2$ :

$$L(\tau) \vec{V}_2 = ic_\nu \frac{\partial g_1}{\partial \nu} \vec{N}(\tau) + c_\nu^2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial \nu^2} [\Lambda^n(\tau) \vec{W}_2(\tau) + a^{nn}(\tau) \vec{W}_1(\tau)] + 2ic_\nu \frac{\partial g_0}{\partial b} a^{\tau\tau}(\tau) \vec{W}_1(\tau) + \frac{\nu}{c_\nu} g_0 L[0,1] \vec{W}_1(\tau). \quad (4.9)$$

Будем искать  $\vec{V}_2$  в виде

$$\vec{V}_2 = g_2(b, \nu) \vec{W}_1(\tau) + ic_\nu \frac{\partial g_1}{\partial \nu} \vec{W}_2(\tau) + \vec{M}_2(b, \nu). \quad (4.10)$$

Подставим (2.10) в (4.9) и получим уравнение для  $\vec{M}_2(b, \nu)$ , в котором окончательно перейдем к переменным  $(b, \nu)$ , разлагая правую часть по степеням  $\tau$ :

$$L(0) \vec{M}_2 = c_\nu^2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial \nu^2} [\Lambda^n(0) \vec{W}_2(0) + a^{nn}(0) \vec{W}_1(0)] + 2ic_\nu \frac{\partial g_0}{\partial b} a^{\tau\tau}(0) \vec{W}_1(0) + \frac{\nu}{c_\nu} g_0 L[0,1](0) \vec{W}_1(0) + O(\omega^{-1/3}). \quad (4.11)$$

Уравнение (4.11) разрешимо относительно  $\vec{M}_2$  если главное приближение правой части ортогонально вектору  $\vec{W}_1(0)$ , т.е. если выполняется параболическое уравнение Леонтовича-Фока [4]:

$$\frac{\partial^2 g_0}{\partial \nu^2} + \nu g_0 + i \frac{\partial g_0}{\partial b} = 0. \quad (4.12)$$

Если уравнение (4.12) удовлетворено, то  $\vec{M}_2$  может быть найден в виде:

$$\vec{M}_2 = h_2(g_0) \vec{W}_2(0),$$

где  $h_2$  - линейный дифференциальный оператор по  $b$  и  $\nu$  с полиномиальными коэффициентами.

Продолжая этот процесс можно получить формальное решение (4.1) вида:

$$\vec{U} = e^{i\omega\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \vec{V}_k \omega^{-k/3}, \quad (4.13)$$

где  $\vec{V}_k = g_k(b, \nu) \vec{W}_1(\tau) + i c_k \frac{\partial g_{k-1}}{\partial \nu} \vec{W}_2(\tau) + h_k(q_0, \dots, q_{k-2}) \vec{W}_2(0)$   
 $g_{-2} = g_{-1} = 0$ , а функции  $g_1, g_2, \dots$  удовлетворяют уже неоднородному параболическому уравнению. Заметим, что к тому же результату можно прийти, взяв за основу анзац

$$\vec{U} = e^{i\omega\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \vec{V}_k(b, \nu) \omega^{-k/3}. \quad (4.14)$$

В этом случае вектор-функции имеют такой вид:

$$\vec{V}_k(b, \nu) = g_k(b, \nu) \vec{W}_1(0) + \tilde{h}_k(q_0, \dots, q_{k-1}) \vec{W}_2(0).$$

### 5. Волновое поле в окрестности точки 0.

#### Формула Фока.

Отраженное поле в окрестности точки 0 при краевых условиях (I.4) может быть представлено в виде

$$\vec{U}_{\text{отр.}} = \vec{U}^{(\tau)} + \vec{U}^{(\psi)}, \quad (5.1)$$

где  $\vec{U}^{(\tau)}$  - ряд (4.13), а

$$\vec{U}^{(\psi)} = e^{i\omega\psi(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \vec{U}_k^{(\psi)} (-i\omega^{1/3})^{-k} \quad (5.2)$$

- ряд лучевого типа имеющий поправочный характер, причем начальные данные для  $\vec{U}_k^{(\psi)}$  на поверхности S определяются через граничные значения  $\vec{U}_j^{(\tau)}$  и  $\vec{U}_j^{(\psi)}$ ,  $j < k$ .

Построим отраженное поле в главном, т.е. найдем  $U_0^{(\tau)}$  и  $U_1^{(\psi)}$ . Для этого, прежде всего, необходимо представить  $\vec{U}^{(n)}$

в виде (4.13), что легко сделать, разложив эйконал  $\tau_n$  (а затем и  $\vec{U}_n^{(n)}$ ) по степеням  $\tau$  и  $n$  и перейдя к переменным  $b$  и  $\nu$ :

$$\tau_n = \tau + \omega^{-1} (b\nu - \frac{b^3}{3}) + O(\omega^{-4/3})$$

и

$$\vec{U}_n^{(n)} = e^{i\omega\tau} e^{i(b\nu - \frac{b^3}{3})} \vec{U}_0^{(n)}(0) + \vec{O}(\omega^{-1/3}) \quad (5.3)$$

Вспользуемся известной формулой [3]

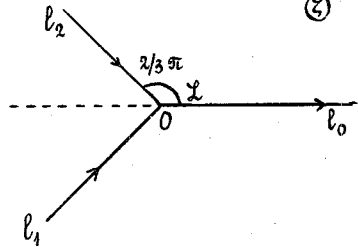
$$e^{i(b\nu - \frac{b^3}{3})} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathcal{L}} v(\zeta - \nu) e^{ib\zeta} d\zeta, \quad (5.4)$$

где  $v$  - функция Эйри в обозначении В.А.Фока, а  $\mathcal{L}$  - контур (рис.3) интегрирование по которому ведется так:

по лучу  $l_0$  интегрируется функция  $v(\zeta - \nu) e^{ib\zeta} = \frac{1}{2i} (W_1 - W_2) e^{ib\zeta}$

по лучу  $l_1 : \frac{1}{2i} W_1(\zeta - \nu) e^{ib\zeta}$

по лучу  $l_2 : -\frac{1}{2i} W_2(\zeta - \nu) e^{ib\zeta}$ .



Таким образом

Рис.3

$$\vec{U}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\omega\tau} \int_{\mathcal{L}} v(\zeta - \nu) e^{ib\zeta} d\zeta \vec{U}_0^{(n)}(0) + \vec{O}(\omega^{-1/3}).$$

Откуда однозначно находится

$$\vec{U}_0^{(\tau)} = -\sqrt{\frac{\rho(\sigma)}{\pi}} |\vec{U}_0^{(n)}(0)| \int \frac{v(\zeta)}{W_1(\zeta)} W_1(\zeta - \nu) e^{ib\zeta} d\zeta \vec{W}_1(\tau), \quad (5.5)$$

а для суммарного поля имеет классическую формулу Фока [4] :

$$\vec{U}^{(n)} + \vec{U}_{\text{отр.}} = \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathcal{L}} [v(\zeta - \nu) - \frac{v(\zeta)}{W_1(\zeta)} W_1(\zeta - \nu)] e^{ib\zeta} d\zeta \vec{U}_0^{(n)}(0) + \vec{O}(\omega^{-1/3}). \quad (5.6)$$

В случае краевых условий отсутствия напряжений на  $S(\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_l} =$

$= 0)$  в (3.6) отношение  $v(\zeta)/W_1(\zeta)$  надо заменить на отношение производных  $v'(\zeta)/W_1'(\zeta)$ .

Вычислим теперь главное приближение  $\vec{U}^{(\psi)}$ . Формулы лучевого метода [1] дают выражение для  $\vec{U}^{(\psi)}$  в лучевых координатах  $(\psi, \tau)$  :

$$\vec{U}^{(\psi)} = \frac{e^{i\omega\psi}}{-i\omega^{1/3}} \frac{f(\tau, b)}{\sqrt{y(\tau, \psi)}} \vec{S}(\tau, n) + \vec{O}(\omega^{-1/3}),$$

где  $y(\tau, \psi)$  - геометрическая расходимость дополнительного поля лучей,  $\vec{S}(\tau, n)$  - вектор поляризации, коллинеарный вектору  $\vec{W}_2(\tau, n)$

и имеющий норму  $[\rho(\sigma, n)]^{1/2}$ , а функция  $f(\sigma, b)$  подлежит определению.

Рассматривая формулы (4.8) и (5.6) на поверхности  $S$ , т.е. при  $\nu=0$  легко убедиться что краевые условия (I.4) диктуют однозначный выбор  $f(\sigma, b)$ :

$$f(\sigma, b) = -\frac{4}{3} C_{\nu} \left[ \frac{\rho(0) \rho(\sigma, \tau) \gamma(\sigma, \tau)^{1/2}}{\pi} \right] |\vec{W}_2(\sigma)| |\vec{U}_0^{(n)}| Q(b),$$

где функция  $Q(b)$  определяется формулой

$$Q(b) = \int_{l_2 \cup l_0} \frac{e^{i b z}}{W_1(z)} dz$$

(подобная функция встречалась уже в работах В.А.Фока [5]).

Итак  $\vec{U}^{(\sigma)}$  и  $\vec{U}^{(\psi)}$  в главном определены, дальнейшие приближения (с большим объемом вычислений) также могут быть получены описанным методом.

Автор признателен В.М.Бабичу за внимание к работе.

#### Литература

1. Б а б и ч В.М. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в случае упругой неоднородной анизотропной среды. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн (ЛОМИ и ЛГУ) 1961, сборник У с.36-46.
2. Ч и х а ч е в Б.А. Дифракция высокочастотной упругой волны на границе двух неоднородных сред. Вестн.ЛГУ, 1975, № 10, с.142-146.
3. Б а б и ч В.М., К и р п и ч н и к о в а Н.Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции. Изд-во ЛГУ, Л., 1974, 124 с.
4. Л е о н т о в и ч М.А., Ф о к В.А. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения. ЖЭТФ, 1946, 16, № 7, с. 557-573.
5. Ф о к В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М., 1970, 517 с.

Bylyi I.Y. Parabolic Equation Method for Anisotropic Elastic Media.

The paper deals with problem of short-wave diffraction of two-dimensional elastic waves.

Though elastic media under consideration is anisotropic, the problem can be treated with Leontovitch - Fock method of parabolic equation.