Р. С. Сакс, Слабо эллиптические системы псевдодифференциальных уравнений на многообразии без края,
Докл. АН СССР, 1978, том 240, номер 4, 786–789

Доклады Академии наук СССР
1978. Том 240, № 4

УДК 517.948.34 *МАТЕМАТИКА*

Р. С. САКС

СЛАБО ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИИ БЕЗ КРАЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 13 II 1978)

Мы определим класс неэллиптических систем псевдодифференциальных [1-3] уравнений, которые назовем слабо эллиптическими. По своим свойствам слабо эллиптические системы близки к эллиптическим [4]. В частности, на многообразии без края квадратные слабо эллиптические системы имеют левый и правый регуляризаторы. Как показывают примеры, класс слабо эллиптических систем шире класса равномерно неэллиптических систем [5]. Известно, что система, эллиптическая по Дуглису — Ниренбергу, может оказаться неэллиптической при неудачном выборе порядков ее строк и столбцов [6]. Мы показываем, что для таких порядков система является слабо эллиптической (теорема 2). Кроме того, известно, что эллиптичность по Дуглису — Ниренбергу, а также условие невырожденности системы Волевича [7] теряются при эквивалентных преобразованиях строк (или столбцов) системы, если, скажем, порядок одной из ее строк (столбцов) превышает порядки остальных. Слабая эллиптичность инвариантна относительно таких преобразований. Наконец, композиция двух операторов, эллиптических по Дуглису — Ниренбергу, может оказаться неэллиптической, но всегда является слабо эллиптической. Квадратные слабо эллиптические системы образуют группу с инволюцией: сопряженный оператор слабо эллиптичен. Слабая эллиптичность системы определяется по ее полному символу. Приводятся три эквивалентных определения слабой эллиптичности (теорема 1). Первое определение удобно при построении регуляризаторов и доказательстве теоремы 3 о разрешимости системы. Проверка принадлежности системы к классу слабо эллиптических систем осуществляется с помощью двух других определений.

Обозначения [5]: X — многообразие класса C^∞; $T'(X)$ — часть кокасательного расслоения без нулевого сечения; U — угловая окрестность точки (x, ξ) из $T'(X)$, например $U=V\times K$, где $V\subset X$ — окрестность точки x, K — конус в $\mathbf{R}^n\setminus 0$, $n\geqslant 2$, содержащий вектор ξ; $S(X)$ — расслоение сфер.

Пусть $\lambda=(1-\Delta)^{1/2}$, где Δ — скалярный оператор Лапласа; λ — скалярный псевдодифференциальный (п.д.) оператор на X первого порядка, эллиптический, с символом $\sigma_1(\lambda)=|\xi|$ при $|\xi|>1$.

Вектору $s=(s_1,\dots,s_l)$ сопоставим $(l\times l)$-матричный оператор J_s, у которого по диагонали стоят операторы $\lambda^{s_1},\dots,\lambda^{s_l}$, а остальные элементы равны нулю. Пара векторов (s, t) называется порядком $(l_1\times l_2)$-матричного оператора $A=\{a_{ij}\}$, если $\operatorname{ord} a_{ij}\leqslant s_i+t_j$. Тогда s_i — порядки строк, а t_j — порядки столбцов оператора A. Оператор A порядка (s, t) представим в виде $A=J_sA^0J_t+T$, где A^0 — оператор не выше нулевого порядка, $\operatorname{ord}T=-\infty$.

П.д. оператор A называется (s, t)-эллиптическим [4], если $l_1\leqslant l_2$ и ранг $\sigma_{s,t}(A)$ равен l_2 (т. е. максимален) в $T'(X)$. Так как ранги матриц $\sigma_{s,t}(A)$ и $\sigma_0(A^0)$ совпадают, то A^0 — также эллиптический оператор порядка нуль.

Эллиптический п.д. оператор A порядка (s, t) на многообразии без края имеет левый регуляризатор, т. е. такой п.д. оператор R порядка $(-t,$

$-s$), что $RA=I+T_1$, где T_1 — оператор порядка $-\infty$. Если $l_1=l_2$, то R является также правым регуляризатором: $AR=I+T_2$, $\operatorname{ord} T_2=-\infty$ ([4]).

Левые регуляризаторы операторов J_s, J_t и A^0 обозначим через J_{-s}, J_{-t} и R^0; тогда $R=J_{-t}R^0J_{-s}$.

Пусть k — действительное число, а s — целочисленный вектор. Через $H^{k+s}(X)$ обозначим прямое произведение пространств С. Л. Соболева $H^{k+s}(X)=W_2^{k+s_1}(X)\times\ldots\times W_2^{k+s_l}(X)$.

Квадратный п.д. оператор A порядка (s, t) нётеров в пространствах $H^{k+t}(X)\xrightarrow{A} H^{k-s}(X)$ на многообразии X без края тогда и только тогда, когда он (s, t)-эллиптичен ([4]).

Пусть $L\geqslant l$ и S — $(L\times l)$-матричный п.д. оператор нулевого порядка на многообразии X.

Определение 1. Оператор S нулевого порядка называется слабо эллиптическим на X, если для любой точки (x, ξ) из $T'(X)$ существует угловая окрестность $U\subset T'(X)$ такая, что

$$S=J_{s_1}A_1^0\ldots J_{s_r}A_r^0+T, \tag{1}$$

где J_{s_k} — диагональные операторы, $k=1,\ldots, r$; A_k^0 — матричные п.д. операторы нулевого порядка, эллиптические в U (т. е. $\operatorname{rang}\sigma_0(A_k^0)=l$ в U), в T — оператор порядка $-\infty$ в U. При $L=l$ все операторы A_k^0 — квадратные порядка $(l\times l)$, при $L>l$ один из операторов A_k^0 — прямоугольный порядка $L\times l$; остальные операторы квадратные.

Представление (1) неоднозначно. Целое число σ, равное $\sum_{i=1}^{r}|s_i|$ в U при $L=l$, является инвариантом слабой эллиптичности. Оно определяется однозначно на каждой связной компоненте многообразия $T'(X)$.

Замечание. Равномерно неэллиптические системы ([5]) имеют представление (1) с $r=2$ и $s_1=(0,\ldots, 0)$.

Определение 2. Оператор S нулевого порядка допускает C-преобразование в окрестности точки $(x_0, \xi_0)\in T'(X)$, если существует окрестность $U\subset T'(X)$, исходя из которой можно построить $(L\times L)$-матрицу $C_л$ п.д. операторов не выше первого порядка такую, что:

а) порядок $C_лS$ не превосходит нуля (т. е. $\sigma_1(C_л)\sigma_0(S)\equiv 0$ в $T'(X)$),

б) ранг $\sigma_1(C_л)$ постоянный в U и больше нуля,

в) $C_л=J_cC_л^0$, причем компоненты вектора c равны 0 или 1, $|c|>0$, а матрица $C_л^0$ нулевого порядка эллиптична в U.

Чтобы выяснить, допускает ли заданный оператор C-преобразование в окрестности точки $(x_0, \xi_0)\in T'(X)$, достаточно проверить выполнение следующего эквивалентного а) — в) условия:

Существует окрестность U точки (x_0, ξ_0), в которой система линейных алгебраических уравнений $\vec{y}\cdot\sigma_0(S)=0$ имеет $k>0$ линейно независимых решений $y_1,\ldots, y_k$, зависящих гладко от (x, ξ) в U и однородных по ξ нулевого порядка.

В случае $L=l$ это условие предполагает, что $\operatorname{rang}\sigma_0(S)\leqslant\rho<l$ в U. Если ранг $\sigma_0(S)$ постоянный в U (и равен $\rho<l$), то всегда существует ([5]) $l-\rho$ таких векторов y. В общем случае условие $\rho<l$ не гарантирует еще существование системы гладких линейно независимых решений.

Определение 3. Оператор S нулевого порядка называется приводимым в окрестности точки (x_0, ξ_0) из $T'(X)$ к локально эллиптическому оператору, если существует окрестность $U\subset T'(X)$, в которой S допускает цепочку $C_л$-преобразований

$$S_1^л=C_1^лS,\ldots, S_p^л=C_p^лS_{p-1}^л,$$

до эллиптического в U оператора $S_p^л$ порядка 0.

Целое число ω, равное $-\sum_{k=1}^{p}|c_k|$ в U при $L=l$, является инвариантом оператора, приводимого к локально эллиптическому.

Определение 4. Оператор S нулевого порядка допускает C-преобразование в $T'(X)$ (глобально), если существует $(M\times L)$-матрица C п.д. операторов на X не выше первого порядка, не обязательно квадратная, $M\geqslant L$, удовлетворяющая условиям а), в) определения 2 в области $U=T'(X)$ (глобально).

Матрица S допускает C-преобразование тогда и только тогда, когда она допускает $C_л$-преобразование в окрестности любой точки $(\varkappa, \xi)$ из $T'(X)$. Оператор C строится с использованием разбиения единицы на $S(X)$ как блок-матрица из операторов $C_1{}^л, \ldots, C_N{}^л$, осуществляющих $C_л$-преобразования в окрестностях $U_1, \ldots, U_N$, покрывающих $T'(X)$ ([5]).

Определение 5. Оператор S нулевого порядка называется глобально приводимым к эллиптическому оператору, если он допускает цепочку C-преобразований

$$S_1=C_1S,\quad S_2=C_2S_1, \ldots,\quad S_p=C_pS_{p-1}$$

до эллиптического (вообще говоря прямоугольного) оператора S_p (т. е. ранги матриц $\sigma_0(S), \ldots, \sigma_0(S_{p-1})$ не максимальны в $T'(X)$, а ранг $\sigma_0(S_p)$ равен l).

Определение 6. Оператор A порядка (s, t) назовем слабо эллиптическим (приводимым к эллиптическому), если соответствующий оператор $A^0=J_{-s}AJ_{-t}$ нулевого порядка слабо эллиптичен (приводим к эллиптическому оператору). При этом $\sigma=|s|+|t|+\sum_{j=1}^{r}|s_j|$ $(\omega=|s|+|t|-\sum_{k=1}^{p}|c_k|)$ в U, если $L=l$.

Теорема 1. *Для квадратного матричного п.д. оператора A порядка (s, t) следующие утверждения эквивалентны:*

1) *оператор A слабо эллиптичен на многообразии X;*

2) *оператор A приводим в окрестности любой точки $T'(X)$ к локально эллиптическому оператору;*

3) *оператор A глобально приводим к эллиптическому оператору. При этом инварианты σ и ω совпадают в каждой из связных компонент многообразия $T'(X)$.*

Нетрудно также доказать, что квадратные слабо эллиптические системы образуют группу с инволюцией (сопряженный оператор слабо эллиптичен). Имеются в виду классы эквивалентности по модулю операторов T порядка $-\infty$.

Заданному оператору A можно предписать различные порядки.

Теорема 2. *Если A слабо эллиптичен (в частности эллиптичен) как оператор порядка (s, t), то оператор A слабо эллиптичен при выборе любого другого порядка (p, q).*

Пусть A — слабо эллиптический оператор порядка (s, t), а $D_p=C_p\ldots C_1$ — цепочка C-преобразований, приводящая A^0 глобально к эллиптическому оператору $A_p{}^0=D_pA^0$ нулевого порядка. Тогда оператор A ограничен из пространства Соболева $H^{k+t}(X)$ в пространство $H_C^{k-s}(X)$ вектор-функций v из $H^{k-s}(X)$ таких, что $D_pJ_{-s}v\in H^k(X)$ с нормой

$$\|v\|^2_{H_C^{k-s}(X)}=\|v\|^2_{H^{k-s}(X)}+\|D_pJ_{-s}v\|^2_{H^k(X)}.$$

Эта норма не зависит от выбора операторов цепочки D_p: различные операторы определяют эквивалентные нормы. Отметим, что

$$H_C^{k-s}(X)\subset H^{k+p-s}(X),\quad p>0,\quad p=\operatorname{ord} D_p.$$

Следуя работам ([4], [5]), можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть A—$(l\times l)$-матричный п.д. оператор порядка (s, t) на многообразии X без края. Следующие условия эквивалентны:*

а) *A — слабо эллиптический оператор на X;*

б) *A имеет левый и правый регуляризаторы;*

в) *оператор A: $H^{k+t}(X)\to H_C^{k-s}(X)$ нётеров, причем его ядро и коядро состоят из бесконечно дифференцируемых вектор-функций;*

г) *имеет место оценка*

$$\|u\|_{H^{k+t}(X)}\leqslant c(\|Au\|_{H_C^{k-s}(X)}+\|u\|_{H^r(X)}),$$

где $r=(r_1, \ldots, r_l)$, $r_j<k+t_j$ и постоянная c не зависит от u.

Замечание. Прямоугольный оператор A $(L>l)$, приводимый к эллиптическому, имеет левый регуляризатор и, следовательно, конечномерное ядро и замкнутую область значений.

Различные примеры слабоэллиптических систем можно получить, рассматривая, скажем, композиции эллиптических и равномерно неэллиптических систем ([5]). В частности, оператор

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta & c\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

где a и c, b_{22}, b_{21} и b_{12}, b_{11} — скалярные операторы на X порядков 0, 1, 2 и 3 соответственно, слабоэллиптичен, если эллиптичен оператор $b_{11}b_{22}-b_{21}b_{22}$ и не является эллиптическим по Дуглису — Ниренбергу. Если ранг $\sigma_3(b_{11})$ переменный (а b_{11} произволен при $b_{22}=0$), то оператор B не является также равномерно неэллиптическим.

Замечание. При $n=1$ многообразие $T'(X)$ не связно. В этом случае условие слабой эллиптичности нужно проверять в каждой из связных компонент $T'(X)$ и вместо λ использовать операторы λ_{10} и λ_{01} с символами

$$\sigma(\lambda_{10})=\begin{cases}\xi, & \xi>0,\\ 1, & \xi<0,\end{cases}\qquad \sigma(\lambda_{01})=\begin{cases}1, & \xi>0,\\ -\xi, & \xi<0.\end{cases}$$

Для слабо эллиптических систем п. д. уравнений имеет место аналог теоремы 3 в соответствующих пространствах ([5]).

Можно также построить теорию слабо эллиптических систем одномерных сингулярных интегродифференциальных уравнений на основе интеграла типа Коши и доказать аналог теоремы 3 в пространствах Гёльдера ([8]).

Полученные результаты применяются при изучении краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений ([4], [9–13]).

Для слабо эллиптических систем дифференциальных уравнений в ограниченных областях возможны постановки нётеровых краевых задач ([14]).

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
30 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. Г. Михлин,* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., Физматгиз, 1962. [2] *М. С. Агранович,* УМН, т. 20, в. 5 (125), 3 (1965). [3] *Д. Д. Кон, Л. Ниренберг,* В сб.: Псевдодифференциальные операторы, М., «Мир», 1967, стр. 9. [4] *Л. Хёрмандер,* там же, стр. 116. [5] *Б. Р. Вайнберг, В. В. Грушин,* Матем. сб., т. 72 (114), 602 (1967). [6] *A. Douglis, L. Nirenberg,* Comm. Pure and Appl. Math., v. 8, 503 (1955). [7] *Л. Р. Волевич,* Матем. сб., т. 68 (110), № 3, 373 (1965). [8] *Р. С. Сакс,* ДАН, т. 234, № 3, 544 (1977). [9] *А. В. Бицадзе,* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., «Наука», 1966. [10] *Б. Р. Вайнберг, В. В. Грушин,* Матем. сб., т. 73, № 1, 126 (1967). [11] *Н. Е. Товмасян,* Сиб. матем. журн., т. 8, № 5, 1104 (1967). [12] *Р. С. Сакс,* Дифференциальные уравнения, т. 6, № 1, 72 (1970). [13] *Р. С. Сакс,* Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений, Новосибирск, Изд-во НГУ, Новосибирск, 1975. [14] *Р. С. Сакс,* ДАН, т. 236, № 6, 1312 (1977).