Л. Д. Фаддеев, Растущие решения уравнения Шредингера, *Докл. АН СССР*, 1965, том 165, номер 3, 514–517

Доклады Академии наук СССР
1965. Том 165, № 3

УДК 517.948 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

Л. Д. ФАДДЕЕВ

РАСТУЩИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 5 IV 1965)

1. Постановка задачи. Многие интересные решения уравнения Шредингера $Hu \equiv -\Delta u + v(x)u = \lambda u$ $(x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка эвклидова пространства E_n, λ — комплексное число) с убывающим потенциалом $v(x)$ получаются как решения интегральных уравнений вида

$$u(x) = u_0(x) - \int \Gamma(x-y, \lambda)\, v(y)\, u(y)\, dy, \tag{1}$$

где $u_0(x)$ — решение уравнения $\Delta u_0 + \lambda u_0 = 0$, $\Gamma(x, \lambda)$ — функция Грина уравнения Гельмгольца

$$\Delta\Gamma(x, \lambda) + \lambda\Gamma(x, \lambda) = -\delta(x).$$

Здесь $\delta(x)$ — δ-функция, сосредоточенная в начале координат. Интегрирование в (1) и всюду ниже, если это особо не оговорено, распространено на все E_n. В качестве u_0 обычно берут плоские волны $\exp\{i(k, x)\}$, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in E_n$, $(k, x) = k_1x_1 + \ldots + k_nx_n$, при этом $\lambda = k^2 = (k, k)$. Различным выборам функции Грина $\Gamma(x, \lambda)$ соответствуют различные системы решений уравнения $Hu = k^2u$.

Наиболее употребительной функцией Грина является ядро резольвенты оператора Лапласа $Tu = -\Delta u$, рассматриваемого как самосопряженный оператор в $L_2(E_n)$:

$$R(x, \lambda) = (2\pi)^{-n} \int \exp\{i(m, x)\}(m^2 - \lambda)^{-1}\, dm. \tag{2}$$

При фиксированном x эта функция аналитична по λ на всей комплексной плоскости с разрезом по положительной части вещественной оси. Интегральное уравнение (1) при $\Gamma(x, \lambda) = R(x, k^2 + i0)$ и $u_0 = \exp\{i(k, x)\}$ представляет собой известное интегральное уравнение теории рассеяния. Строгое его исследование при $n = 3$ проведено А. Я. Повзнером [1], который доказал, что его решения образуют полную ортонормированную систему собственных функций непрерывного спектра оператора H в $L_2(E_n)$.

В одномерном случае не менее употребляемы функции Грина

$$K_+(x, \lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\theta(-x); \quad K_-(x, \lambda) = -\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\theta(-x),$$

где $\theta(a) = 1$, $a > 0$; $\theta(a) = 0$, $a < 0$. При фиксированном x это целые функции λ. Решения уравнения (1) с свободным членом $u_0 = \exp\{\pm i(k + iq)x\}$, $q > 0$ и функциями $K_\pm(x, (k+iq)^2)$ в качестве $\Gamma(x, \lambda)$ играют важную роль при исследовании обратной задачи теории рассеяния по методу В. А. Марченко (подробное изложение см. [2, 3]).

Возникает вопрос: существует ли естественный многомерный аналог функций Грина K_+ и K_-? В настоящей работе описывается набор функций Грина многомерного уравнения Гельмгольца, который в определенном смысле можно считать обобщением функций $K_\pm$, и исследуются свойства соответствующих решений уравнения Шредингера.

2. Основное предложение. Заметим, что функции Грина K_+ и K_- также связаны с резольвентой некоторого оператора. Рассмотрим оператор T_q, определяемый дифференциальным оператором $Tu = -\Delta u$ в пространстве M_q функций $u(x)$, квадратично интегрируемых с весом $\exp\{2(q, x)\}$, где q — фиксированный вектор. Оператор T_q несамосопряженный и имеет непрерывный спектр. В качестве собственных функций можно взять $\exp\{i(k + iq, x)\}$. Ядро резольвенты оператора T_q дается формулой

$$G_q(x, \lambda) = (2\pi)^{-n}\int \exp\{i(m + iq, x)\}[(m + iq)^2 - \lambda]^{-1}\,dm. \qquad (3)$$

Нетрудно убедиться, что при $\operatorname{Im}\sqrt{\lambda} > |q|$ эта функция совпадает с $R(x, \lambda)$ из (2).

При $n = 1$ собственные значения $(k + iq)^2$ пробегают параболу $\operatorname{Im}\sqrt{\lambda} = |q|$. Если $\operatorname{Im}\sqrt{\lambda} < |q|$, то функция $G_q(x, \lambda)$ совпадает с $K_+(x, \lambda)$ или $K_-(x, \lambda)$ в зависимости от знака q.

При $n > 1$ собственные значения $(k + iq)^2$ заполняют всю внутренность параболы, т. е. область $\operatorname{Im}\sqrt{\lambda} \leqslant |q|$. В этой области ядра $G_q(x, \lambda)$ зависят от λ непрерывно, но не аналитически. Мы предлагаем считать набор ядер $G_q(x, \lambda)$ при $n > 1$ и $\operatorname{Im}\sqrt{\lambda} \leqslant |q|$ многомерным аналогом ядер $K_+(x, \lambda)$ и $K_-(x, \lambda)$.

3. Растущие решения. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi_q(x, k) = \exp\{i(k + iq, x)\} - \int G_q(x - y, (k + iq)^2)\, v(y)\, \varphi_q(y, k)\, dy. \qquad (4)$$

Здесь участвует функция $G_q(x, \lambda)$ при λ внутри параболы, так как $\operatorname{Im}\sqrt{(k + iq)^2} < |q|$. Интегральный оператор

$$A_q(k)\varphi(x) = -\int G_q(x - y, (k + iq)^2)\, v(y)\, \varphi(y)\, dy,$$

входящий в это уравнение, определен в классе C_q непрерывных функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих оценке $|\varphi(x)| < K\exp\{-(q, x)\}$. Действительно, из (3) ясно, что ядро $G_q(x, \lambda)$ представимо в виде $\exp\{-(q, x)\} \times \tilde{G}_q(x, \lambda)$, причем $\tilde{G}_q(x, \lambda)$ ограничено при всех $x \neq 0$, а при $x = 0$ имеет слабую полярность типа $|x|^{-1}$. Поэтому, если $v(x)$ убывает достаточно быстро, например, если $|v(x)| \leqslant K(1 + |x|)^{-2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, то оператор $A_q(k)$ отображает C_q в C_q.

Класс функций C_q становится банаховым пространством, если в качестве нормы взять $\max \exp\{(q, x)\}|\varphi(x)|$. Можно показать, что оператор $A_q(k)$ вполне непрерывен в этом пространстве. Свободный член уравнения (4), очевидно, принадлежит C_q, так что мы можем рассматривать (4) как уравнение Фредгольма второго рода.

К сожалению, нам не удалось детально исследовать вопрос о строении множества особых точек k, q, при которых однородное уравнение, соответствующее (4), имеет нетривиальные решения. Из дальнейшего будет видно, что это множество не слишком мощно. Заметим, что при достаточно малых $v(x)$ особые точки вообще отсутствуют.

Решения уравнения (4) удовлетворяют уравнению Шредингера $H\varphi_q = (k + iq)^2\varphi_q$ и растут при $|x| \to \infty$ в направлении, образующем острый угол с вектором $-q$. Поэтому мы называем их растущими решениями уравнения Шредингера.

4. Аналитические свойства решений. Запишем свободный член уравнения (4) в виде

$$\exp\{i(k + iq, x)\} = \exp\{is(x, \gamma)\}\exp\{i(k_\perp, x)\}. \qquad (5)$$

Здесь γ — единичный вектор направления q, $\gamma = q|q|^{-1}$; $k_\perp$ — часть вектора k, ортогональная к γ; $k_\perp = k - (k, \gamma)\gamma$ и $s = (k, \gamma) + i|q|$. Функция (5) представляет собой плоскую волну, аналитически продолженную в верхнюю полуплоскость по компоненте вектора k, направленной по γ. Оказывается, что и решение $\varphi_q(x, k)$ также является аналитической функцией s.

Заменим в уравнении (4) параметры k и q на γ, $k_\perp$ и s. Заметим, что $G_q(x, (k+iq)^2$ зависит от $k_\perp$ только посредством $\mu^2 = (k_\perp, k_\perp)$. Когда k и q независимо меняются в пространстве E_n, s, γ и μ пробегают верхнюю полуплоскость, единичную сферу и положительную полуось соответственно. Функции, полученные из $\varphi_q(x, k)$ и $G_q(x, (k+iq)^2)$ после указанной замены, обозначим через $\varphi_\gamma(x, s, k_\perp)$ и $C_\gamma(x, s, \mu)$. Имеет место интегральное представление

$$G_\gamma(x, s, \mu) = \int D_\gamma(x, \mu, t) \exp\{its\}, \tag{6}$$

где, например, при $n = 3$

$$D_\gamma(x, \mu, t) = (2\pi)^{-1}\theta(t-(x,\gamma))[\delta(x^2-t^2) - \\ -\mu\theta(x^2-t^2)J_1(\mu\sqrt{x^2-t^2})(2\sqrt{x^2-t^2})^{-1}].$$

Здесь $J_1(a)$ — функция Бесселя. Интегрирование в (6) фактически ведется по конечному промежутку $(x,\gamma) < t < |x|$, так что $G_\gamma(x, s, \mu)$ является целой функцией s, причем $\exp\{-is(x,\gamma)\}G_\gamma(x, s, \mu)$ ограничено в верхней полуплоскости.

Рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущем пункте, приводят к выводу, что уравнение (4) можно рассматривать как уравнение второго рода с вполне непрерывным оператором, аналитически зависящим от параметра s в верхней полуплоскости. Отсюда следует, что само решение $\varphi_\gamma(x, s, k_\perp)$ при фиксированных γ и $k_\perp$ является аналитической функцией s во всей верхней полуплоскости за исключением особых точек типа полюса.

5. Треугольный оператор преобразования. Интегральное представление (6) подсказывает, что решение $\varphi_\gamma(x, s, k_\perp)$ можно искать в виде

$$\varphi_\gamma(x, s, k_\perp) = \exp\{is(x,\gamma) + i(k_\perp, x)\} + \int\limits_{(x,\gamma)}^{\infty} A_\gamma(x, k_\perp, t)\exp\{its\}\,dt. \tag{7}$$

Интегральное уравнение для ядра $A_\gamma(x, k_\perp, t)$, заменяющее уравнение (4) для $\varphi_\gamma(x, s, k_\perp)$, имеет вид

$$A_\gamma(x, k_\perp, t) = \int D_\gamma(x-y, \mu, t-(y,\gamma))\,v(y)\exp\{i(k_\perp, y)\}\,dy - \\ -\int D_\gamma(x-y, \mu, t-u)\,v(y)\,A_\gamma(y, k_\perp, u)\,dy\,du.$$

Это уравнение типа Вольтерра. Решение его, полученное последовательными приближениями, допускает оценку

$$|A_\gamma(x, k_\perp, t)| \leqslant K\exp\{a[t-(x,\gamma)]\}, \tag{8}$$

где константа $a > 0$ зависит от $v(x)$ и не может, вообще говоря, быть заменена нулем. При $\operatorname{Im} s > a$ выражение (7) имеет смысл. Можно показать, что построенная таким образом функция $\varphi_\gamma(x, s, k_\perp)$ удовлетворяет уравнению (4). Из приведенных рассуждений следует существование растущих решений при всех достаточно больших $|q|$.

6. Оператор H_q. Решения $\varphi_q(x, k)$ можно рассматривать как собственные функции непрерывного спектра несамосопряженного оператора H_q, определяемого оператором Шредингера H в пространстве M_q (см. п. 2). Можно показать, что если интегральное уравнение (4) однозначно разрешимо, то системы $\varphi_q(x, k)$ и $\varphi_{-q}(x, k)$ биортогональны. Это не удивительно, так как операторы H_q^* и H_{-q} просто связаны. Указанное свойство

заведомо имеет место, если $v(x)$ достаточно мал или $|q|$ достаточно велико. В этих случаях система решений $\varphi_q(x, k)$ полна, так что операторы H_q и T_q линейно эквивалентны. В общем случае это не так. Спектр оператора H_q вне параболы может быть только дискретным и совпадает здесь с дискретным спектром оператора H в $L_2(E_n)$. Внутри параболы, кроме спектра, которому отвечают решения $\varphi_q(x, k)$, оператор H_q может иметь дополнительный спектр, причем, как показывают примеры, даже непрерывный.

7. В качестве приложения приведем формулу для ядра $D(x, y, \lambda)$ резольвенты оператора Шредингера H в $L_2(E_n)$ в терминах растущих решений. Пусть $\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}$ достаточно велико, так что существует q такое, что $\mathrm{Im}\sqrt{\lambda} > |q| > a$ из (8). Фиксируем такое q. Резольвенты операторов H и H_q при указанных λ совпадают, так что имеет место формула

$$D(x, y, \lambda) = (2\pi)^{-n}\int[(m+iq)^2-\lambda]^{-1}\varphi_q(x, m)\,\overline{\varphi_{-q}(y, m)}\,dm. \qquad (9)$$

Заменив q и m на γ, s и $m_\perp$, получим

$$D(x, y, \lambda) = (2\pi)^{-n}\int(s^2+m_\perp^2-\lambda)^{-1}\varphi_\gamma(x, s, m_\perp)\,\varphi_{-\gamma}(y, s, -m_\perp)\,ds\,dm_\perp.$$

Интегрирование по s ведется по прямой $\mathrm{Im}\,s = |q|$. При $(x, \gamma) > (y, \gamma)$ контур можно замкнуть в верхней полуплоскости. Единственная особенность подынтегрального выражения — это полюс в точке $s = \sqrt{\lambda - m_\perp^2}$. В результате мы приходим к формуле

$$D(x, y, \lambda) = 2\pi i(2\pi)^{-n}\int\varphi_\gamma(x, \sqrt{\lambda-m_\perp^2}, m_\perp)\varphi_{-\gamma}(y, \sqrt{\lambda-m_\perp^2}, -m_\perp)\times$$
$$\times(2\sqrt{\lambda-m_\perp^2})^{-1}dm_\perp, \qquad (10)$$

справедливой при $(x, \gamma) > (y, \gamma)$ и $\mathrm{Im}\sqrt{\lambda} > a$. Есть основание считать, что она верна вообще при всех λ. Характерно, что в правой части (10), в отличие от (9), участвуют решения уравнения $Hu = \lambda u$ при том же самом λ, которое стоит в левой части. Формулу (10) можно рассматривать как естественное обобщение известных представлений одномерной функции Грина в терминах двух линейно независимых решений.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
31 III 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Повзнер, Матем. сборн., 32 (74), № 1, 109 (1953). [2] З. С. Агранович, В. А. Марченко, Обратная задача квантовой теории рассеяния, Харьков, 1960. [3] Л. Д. Фаддеев, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 73, 314 (1964).