Е. К. Басаева, О субдифференциалах не всюду определенных выпуклых операторов, *Владикавк. матем. журн.*, 2006, том 8, номер 4, 6–12

Владикавказский математический журнал
октябрь–декабрь, 2006, Том 8, Выпуск 4

УДК **517.98**

О СУБДИФФЕРЕНЦИАЛАХ НЕ ВСЮДУ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫПУКЛЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Е. К. Басаева

Светлой памяти А. М. Рубинова

Рассматриваются сублинейные операторы со значениями в упорядоченном векторном пространстве, содержащем бесконечно много несобственных элементов. Для указанных операторов получены основные формулы субдифференциального исчисления.

Рассмотрим векторное пространство X и упорядоченное векторное пространство E. При изучении не всюду определенных выпуклых операторов, обычно либо рассматривают операторы $f : X \to E$, определенные на выпуклом множестве $C = \operatorname{dom}(f) \subset X$, либо — операторы $f : X \to E^{\bullet}$ ($E^{\bullet} := E \cup \{+\infty\}$), определенные на всем пространстве X, но принимающие значение $+\infty$ при $x \notin \operatorname{dom}(f)$, см., например, [3].

Вместе с тем, наличие в упорядоченном векторном пространстве $E^{\bullet}$ лишь одного несобственного элемента иногда приводит к неестественному сужению рассматриваемого класса операторов, см. примеры 1 и 2 из § 1. Тем самым мотивировано изучение операторов, со значениями в пространствах $E^{\star}$ и $\overset{\approx}{E}$, содержащих бесконечно много несобственных элементов (определения пространств $E^{\star}$ и $\overset{\approx}{E}$ см. ниже в § 1). Цель данной статьи получить основные формулы субдифференциального исчисления для операторов со значениями в $E^{\star}$.

В статье используются терминология и обозначения из [3, 4].

1. Операторы со значениями в $E^{\star}$ и $\overset{\approx}{E}$

1.1. Пространство $E^{\star}$. Пусть E — произвольное K-пространство. В монографии [4, § 4.5] рассматривались выпуклые операторы $f : X \to E^{\bullet}$. Расширим понятие выпуклого оператора, заменив пространство $E^{\bullet}$ на более широкий объект $E^{\star}$. В декартовом произведении $E \times \mathfrak{P}(E)$, где $\mathfrak{P}(E)$ — булева алгебра порядковых проекторов в E, выделим подмножество $E^{\star}$, состоящее из таких пар (x, π), что $\pi x = 0$. В множестве $E^{\star}$ можно корректно ввести сложение, умножение на положительные числа и упорядочение с помощью формул:

$$(x,\pi) + (y,\rho) := (\pi^d \wedge \rho^d(x+y), \pi \vee \rho), \quad \lambda(x,\pi) := (\lambda x, \pi),$$
$$(x,\pi) \leqslant (y,\rho) \leftrightarrow \pi \leqslant \rho \ \ \& \ \ \rho^d x \leqslant \rho^d y \quad (x,y \in E;\ \pi,\rho \in \mathfrak{P};\ \lambda \in \mathbb{R}^+).$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-00622.

Нетрудно проверить, что $E^\star$ — порядково полная $\mathbb{R}$-коническая решетка (см. [3, 1.5.1]). Отображение, сопоставляющее элементу $x \in E$ пару $(x, 0)$, служит вложением E в $E^\star$, сохраняющим операции и порядок. Мы будем отождествлять E с соответствующим подмножеством $E^\star$. Проектор $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ можно продолжить до проектора на $E^\star$ следующим образом: если $z := (x, \rho) \in E^\star$, то полагаем $\pi z := (\pi x, \pi\rho)$. Множество вида $\pi E^\star$ естественно назвать *полосой* в $E^\star$. Пара $(0, \pi)$, обозначаемая символом $+\propto_\pi := \propto_\pi$, будет *наибольшим элементом в полосе* $\pi E^\star$. Элемент $+\infty := \infty := \propto_{\mathbb{1}}$ — *наибольшим элементом* $E^\star$. Таким образом, в каждой полосе $\pi E^\star$ имеется своя *бесконечность* $\propto_\pi$, причем все они являются *осколками бесконечности* ∞, т. е. $\propto_\pi \wedge \propto_{\pi^d} = 0$ и $\propto_\pi \vee \propto_{\pi^d} = \infty$. Очевидно, что множество всех бесконечных элементов $\propto_\pi$ (включая $0 = \propto_0$) с индуцированным из $E^\star$ порядком образует полную булеву алгебру, изоморфную $\mathfrak{P}(E)$.

1.2. Реализация $E^\star$. Обозначим символом $C^+_\propto(Q, \overline{\mathbb{R}})$ множество всех непрерывных функций из Q в $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, принимающих значение $-\infty$ на нигде не плотном множестве. Введем в $C^+_\propto(Q, \overline{\mathbb{R}})$ операции сложения и умножения на положительные скаляры, полагая $(u + v)(t) = u(t) + v(t)$ и $(\lambda u)(t) = \lambda \cdot u(t)$, причем правые части этих соотношений имеют смысл для каждого t из подходящего котощего множества $Q_0 \subset Q$. (Напомним, что множество в топологическом пространстве называют *котощим,* если его дополнение является тощим множеством.) Порядок в $C^+_\propto(Q, \overline{\mathbb{R}})$ определяется поточечно, т. е. $u \leqslant v$ означает, что $u(t) \leqslant v(t)$ для всех $t \in Q$. Тогда $C^+_\propto(Q, \overline{\mathbb{R}})$ — порядково полная $\mathbb{R}$-коническая решетка (см. [3, 1.5.1]). Ясно, что $C_\infty(Q) \subset C^+_\propto(Q, \overline{\mathbb{R}})$, причем порядок и операции в $C_\infty(Q)$ индуцированы из $C^+_\propto(Q, \overline{\mathbb{R}})$. Из результатов о функциональном представлении K-пространств (см. [3, П1.13]) вытекает следующее утверждение.

Пусть E — произвольное K-пространство и Q — стоунов компакт булевой алгебры $\mathfrak{P}(E)$. Тогда существует полулинейный изоморфизм, отображающий $\mathbb{R}$-коническую решетку $E^\star$ в $\mathbb{R}$-коническую решетку $C^+_\propto(Q, \overline{\mathbb{R}})$. Образ E относительно этого изоморфизма служит фундаментом в $C_\infty(Q)$, а образ $E^\star$ совпадает с $C^+_\propto(Q, \overline{\mathbb{R}})$ в том и только в том случае, если E расширенно.

Очевидно, что элемент $\propto_\pi \in E^\star$ при указанном изоморфизме переходит в функцию, принимающую значение $+\infty$ на открыто-замкнутом множестве $Q_\pi \subset Q$, соответствующем проектору π. При этом ограничение этой функции на $Q \setminus Q_\pi$ входит в $C_\infty(Q \setminus Q_\pi)$.

1.3. Операторы со значениями в $E^\star$. Рассмотрим отображение $f : X \to E^\star$. *Эффективное множество* и *надграфик* мы определим обычным образом:

$$\operatorname{dom}(f) := \{x \in X : f(x) \in E\},$$
$$\operatorname{epi}(f) := \{(x, e) \in X \times E : f(x) \leqslant e\}.$$

Полунепрерывность снизу отображения f вводится по аналогии с [4, п. 4.3.3]. Ограничимся случаем, когда E содержит слабую единицу $\mathbb{1}$. Пусть X — банахово пространство. Возьмем точку $x_0 \in X$. Обозначим через π_∞ проектор в E, для которого $\pi_\infty f(x_0) = \propto_\pi$ и $\pi^d_\infty f(x_0) \in E$. Будем говорить, что f *полунепрерывно снизу в точке* x_0*,* если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует счетное разбиение единицы $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X$, $\|x - x_0\| \leqslant 1/n$ выполняется

$$\pi'_n f(x) \geqslant \pi'_n(f(x_0) - \varepsilon\mathbb{1}), \quad \pi''_n f(x) \geqslant (1/\varepsilon)\pi''_n \mathbb{1},$$

где $\pi'_n := \pi_n \wedge \pi^d_\infty$ и $\pi''_n := \pi_n \wedge \pi_\infty$. Нетрудно убедиться, что отображение $f : X \to E^\star$ является полунепрерывным снизу в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда

$$f(x_0) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf \{f(x) : x \in X, \ \|x - x_0\| \leqslant 1/n\}.$$

Подчеркнем, что точные границы в этой формуле вычисляются в $E^\star$.

Приведем два примера мотивирующих введение пространства $E^\star$ (см. [4, § 5.1]).

Пример 1. Пусть $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}^\bullet$ — полунепрерывные снизу выпуклые функционалы, определенные на произвольном нормированном пространстве X. Положим $E := \mathbb{R}^2$ и определим операторы $F_1 : X \to E^\bullet$ и $F_2 : X \to E^\star$ формулами:

$$F_1(x) := \begin{cases} (f_1(x), f_2(x)), & \text{если } x \in \operatorname{dom}(f_1) \cap \operatorname{dom}(f_2), \\ (+\infty, +\infty) := +\infty, & \text{если } x \notin \operatorname{dom}(f_1) \cap \operatorname{dom}(f_2); \end{cases}$$

$$F_2(x) = (f_1(x), f_2(x)) \quad (x \in X),$$

и, стало быть,

$$E^\star = \mathbb{R}^2 \cup \{(0, +\infty), (+\infty, 0), (+\infty, +\infty)\}.$$

Если $x_0 \in \operatorname{dom}(f_1)$ и $x_0 \notin \operatorname{dom}(f_2)$, то оператор F_2 полунепрерывен снизу в точке x_0, а F_1 — нет. Таким образом, если мы рассматриваем операторы со значениями в $E^\bullet$, то происходит неестественное сужение класса полунепрерывных снизу операторов.

Пример 2. Пусть X — банахово пространство и (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой. Рассмотрим функцию $f : \Omega \times X \to \mathbb{R}^\bullet$. Допустим, что функция $f(\omega, \cdot\,)$ выпукла при почти всех $\omega \in \Omega$, а композиция $\omega \mapsto f(\omega, u(\omega))$ измерима для всех u из некоторого пространства L измеримых по Бохнеру вектор-функций $u : \Omega \to X$. Тогда интегральный функционал $I_f : L \to \mathbb{R}^\bullet$ определяется следующим образом:

$$I_f(u) := \int\limits_\Omega f(\omega, u(\omega))\, d\mu(\omega),$$

если функция $\omega \mapsto f(\omega, u(\omega))$ суммируема, и $I_f(u) := +\infty$ — в противном случае. Пусть $E := L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ — K-пространство (классов эквивалентности) измеримых функций, а $I : L^1(\mu) \to \mathbb{R}$ — интеграл Лебега. Тогда имеет место представление $I_f = I \circ F$, где оператор $F : L \to E^\star$ определяется формулой $F(u) : \omega \mapsto f(\omega, u(\omega))$. В рассматриваемом контексте функцию f принято называть *интегрантом*. Как видно, допущение к рассмотрению лишь операторов F со значениями в $E^\bullet$ приводит к нежелательному сужению класса интегрантов.

1.4. Рассмотрим множество $\widetilde{\widetilde{E}} := \{(x, \pi, \rho) : x \in E, \pi x = \rho x = 0, \pi, \rho \in \mathfrak{P}(E), \pi \circ \rho = 0\}$. Определим на этом множестве порядок и алгебраические операции следующим образом:

$$(x_1, \pi_1, \rho_1) \leqslant (x_2, \pi_2, \rho_2) \ \Leftrightarrow \ \pi_1 \leqslant \pi_2 \ \&\ \rho_1 \geqslant \rho_2 \ \&\ (\pi_2 \vee \rho_1)^d x_1 \leqslant (\pi_2 \vee \rho_1)^d x_2;$$

$$a(x, \pi, \rho) = \begin{cases} (ax, \pi, \rho) & \text{при } a > 0, \\ (ax, \rho, \pi) & \text{при } a < 0, \\ (0, \pi, 0) & \text{при } a = 0, \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R};$$

$$(x_1, \pi_1, \rho_1) + (x_2, \pi_2, \rho_2) = (x_1 + x_2, \pi_1 \vee \pi_2, \rho_1 \wedge (\rho_2 \vee \pi_2^d) \vee \rho_2 \wedge (\rho_1 \vee \pi_1^d)),$$

Очевидно, что $E^\star \subset \widetilde{\widetilde{E}}$. Обозначим символом $C_\infty^\pm(Q, \overline{\mathbb{R}})$ множество всех непрерывных функций из Q в $\overline{\mathbb{R}}$. Заметим, что $\widetilde{\widetilde{E}}$ изоморфно подмножеству в $C_\infty^\pm(Q, \overline{\mathbb{R}})$. Если E расширенное K-пространство, то образ E совпадает с $C_\infty^\pm(Q, \overline{\mathbb{R}})$.

2. Формула Моро — Рокафеллара

Покажем, что для операторов со значениями в $E^\star$ остаются в силе основные формулы субдифференциального исчисления. Начнем с алгебраического варианта формулы Моро — Рокафеллара.

Пусть X — произвольное векторное пространство, а E — K-пространство. Рассмотрим сублинейный оператор $p : X \to E^\star$. Опорное множество (субдифференциал в нуле) ∂p оператора p вводится точно так же, как и в [3, 1.4.11]:

$$\partial p := \{T \in L(X, E) : (\forall x \in X)\, Tx \leqslant p(x)\}.$$

Однако, в отличие случая когда p всюду определенный оператор (см. [3, определение 1.4.11]), включение $T \in \partial p$ не сводится к справедливости для всех $x \in \mathrm{dom}(p)$ неравенства $Tx \leqslant p(x)$, а требует также выполнения неравенств вида $\pi^d Tx \leqslant \pi^d e$, если элемент $p(x) \in E^\star$ определяется парой (e, π). Соответствующим образом изменяется и определение общего положения (ср. [3, пп. 3.1.9 и 3.2.8]). Будем говорить, что сублинейные операторы $p_1, \dots, p_n : X \to E^\star$ *находятся в алгебраическом общем положении*, если существует такое подпространство $Z_0 \subset X^n$, что $Z_0 = \prod_{k=1}^n \mathrm{dom}(\pi p_k) - \Delta_n(X)$ для любого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$, где $\Delta_n(X) := \{(x, \dots, x) \in X^n : x \in X\}$. Заметим, что для двух сублинейных операторов условие общего положения равносильно существованию подпространства $X_0 \subset X$, обеспечивающего справедливость равенства $X_0 = \mathrm{dom}(\pi p_1) - \mathrm{dom}(\pi p_2)$ при всех $\pi \in \mathfrak{P}(E)$.

Теорема 1. *Если сублинейные операторы $p_1, \dots, p_n : X \to E^\star$ находятся в алгебраическом общем положении, то справедлива формула Моро — Рокафеллара*

$$\partial(p_1 + \ldots + p_n) = \partial p_1 + \ldots + \partial p_n.$$

$\lhd$ Приведем доказательство для случая $n = 2$. Нужно лишь установить включение $\subset$, так как обратное включение очевидно. Возьмем $T \in \partial(p_1 + p_2)$ и $(x, y) \in Z_0$. В силу условия общего положения для любого $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ имеет место представление $(x, y) = (h_1, h_2) - (h, h) = (k, k) - (k_1, k_2)$ для некоторых $h_i, k_i \in \mathrm{dom}(\pi p_i)$ $(i := 1, 2)$ и $h, k \in X$. Тем самым справедливы соотношения

$$\begin{aligned} Th + Tk &= T(h + k) \leqslant p_1(h + k) + p_2(h + k) \\ &= p_1(h + x + k - x) + p_2(h + y + k - y) \\ &\leqslant p_1(h + x) + p_1(k - x) + p_2(h + y) + p_2(k - y). \end{aligned}$$

Заметив, что $h + x = h_1$, $k - x = k_1 \in \mathrm{dom}(\pi p_1)$ и $h + y = h_2$, $k - y = k_2 \in \mathrm{dom}(\pi p_2)$, выводим неравенство

$$-\pi p_1(k - x) - \pi p_2(k - y) + \pi Tk \leqslant \pi p_1(h + x) + \pi p_2(h + y) - \pi Th,$$

справедливое для любого $\pi \in \mathfrak{P}(E)$. Возьмем два произвольных разбиения единицы $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ и $(\rho_\eta)_{\eta \in \mathrm{H}}$ в булевой алгебре порядковых проекторов $\mathfrak{P}(E)$. Положим $r_{\eta,\xi} := \rho_\eta \circ \pi_\xi$. Тогда $(r_{\eta,\xi})_{(\eta,\xi) \in \mathrm{H} \times \Xi}$ — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(E)$, служащее измельчением разбиений единицы $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ и $(\rho_\eta)_{\eta \in \mathrm{H}}$. Согласно сказанному выше для любых $\xi \in \Xi$ и $\eta \in \mathrm{H}$ найдутся $h_\xi \in X$ и $k_\eta \in X$ такие, что

$$\begin{gathered} (h_\xi + x) \in \mathrm{dom}(\pi_\xi p_1) \subset \mathrm{dom}(r_{\eta,\xi} p_1), \quad (k_\eta - x) \in \mathrm{dom}(\rho_\eta p_1) \subset \mathrm{dom}(r_{\eta,\xi} p_1); \\ (h_\xi + y) \in \mathrm{dom}(\pi_\xi p_2) \subset \mathrm{dom}(r_{\eta,\xi} p_2), \quad (k_\eta - y) \in \mathrm{dom}(\rho_\eta p_2) \subset \mathrm{dom}(r_{\eta,\xi} p_2) \end{gathered}$$

и, кроме того, выполняются соотношения:

$$
\begin{aligned}
a &:= \sum_{\eta} \big(-\rho_\eta p_1(k_\eta - x) - \rho_\eta p_2(k_\eta - y) + \rho_\eta T k_\eta\big) \\
&= \sum_{(\eta,\xi)} \big(-r_{\eta,\xi} p_1(k_\eta - x) - r_{\eta,\xi} p_2(k_\eta - y) + r_{\eta,\xi} T k_\eta\big) \\
&\leqslant \sum_{(\eta,\xi)} \big(r_{\eta,\xi} p_1(h_\xi + x) + r_{\eta,\xi} p_2(h_\xi + y) - r_{\eta,\xi} T h_\xi\big) \\
&= \sum_{\xi} \big(\pi_\xi p_1(h_\xi + x) + \pi_\xi p_2(h_\xi + y) - \pi_\xi T h_\xi\big).
\end{aligned}
$$

Тем самым, оператор $p_0 : Z_0 \to E$ корректно определяется формулой

$$
p_0(x,y) := \inf \Bigg\{ \sum_{\xi} \big(\pi_\xi p_1(h_\xi + x) + \pi_\xi, p_2(h_\xi + y) - \pi_\xi T h_\xi\big) : \ (\pi_\xi) \in \mathrm{Prt}(E), \\
h_\xi \in X,\ h_\xi + x \in \mathrm{dom}(\pi_\xi p_1),\ h_\xi + y \in \mathrm{dom}(\pi_\xi p_2)\ (\xi \in \Xi, \eta \in \mathrm{H}) \Bigg\},
$$

где $\mathrm{Prt}(E)$ — множество всех разбиений единицы в булевой алгебре $\mathfrak{P}(E)$.

Покажем, что p_0 — сублинейный оператор. Положительная однородность оператора p_0 очевидна, проверим его субаддитивность. Зафиксируем x', x'', y', $y'' \in X$. Возьмем произвольные разбиения единицы $(\rho'_\xi), (\rho''_\eta) \in \mathrm{Prt}(E)$ и обозначим $\pi_{\xi,\eta} := \rho'_\xi \wedge \rho''_\eta$ (заметим, что $(\pi_{\xi,\eta})$ есть измельчение разбиений ρ'_ξ и ρ''_η). В силу условия общего положения операторов p_1 и p_2 для любого проектора $\pi_{\xi,\eta}$ можно подобрать $h_\xi, h_\eta \in X$ так, чтобы $h_\xi + x' \in \mathrm{dom}(\rho'_\xi p_1)$, $h_\xi + y' \in \mathrm{dom}(\rho'_\xi p_2)$, а $h_\eta + x'' \in \mathrm{dom}(\rho''_\eta p_1)$, $h_\eta + y'' \in \mathrm{dom}(\rho''_\eta p_2)$. Тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$
\begin{aligned}
p_0(x'+x'', y'+y'') &\leqslant \sum_{\xi,\eta} \Big(\pi_{\xi,\eta} p_1(h_\xi + h_\eta + x' + x'') + \pi_{\xi,\eta} p_2(h_\xi + h_\eta + y' + y'') - \pi_{\xi,\eta} T(h_\xi + h_\eta)\Big) \\
&\leqslant \sum_{\xi,\eta} \Big(\pi_{\xi,\eta} p_1(h_\xi + x') + \pi_{\xi,\eta} p_1(h_\eta + x'') + \pi_{\xi,\eta} p_2(h_\xi + y') + \pi_{\xi,\eta} p_2(h_\eta + y'') - \pi_{\xi,\eta} T(h_\xi) \\
&\quad - \pi_{\xi,\eta} T(h_\eta)\Big) \leqslant \sum_{\xi,\eta} \Big(\pi_{\xi,\eta} p_1(h_\xi + x') + \pi_{\xi,\eta} p_2(h_\xi + y') - \pi_{\xi,\eta} T h_\xi + \pi_{\xi,\eta} p_1(h_\eta + x'') \\
&\quad + \pi_{\xi,\eta} p_2(h_\eta + y'') - \pi_{\xi,\eta} T h_\eta\Big) \leqslant \sum_{\eta} \rho''_\eta \Big(\sum_{\xi} \Big(\rho'_\xi p_1(h_\xi + x') + \rho'_\xi p_2(h_\xi + y') - \rho'_\xi T h_\xi\Big)\Big) \\
&\quad + \sum_{\xi} \rho'_\xi \Big(\sum_{\eta} \Big(\rho''_\eta p_1(h_\eta + x'') + \rho''_\eta p_2(h_\eta + y'') - \rho''_\eta T h_\eta\Big)\Big) \\
&= \sum_{\xi} \Big(\rho'_\xi p_1(h_\xi + x') + \rho'_\xi p_2(h_\xi + y') - \rho'_\xi T h_\xi\Big) + \sum_{\eta} \Big(\rho''_\eta p_1(h_\eta + x'') + \rho''_\eta p_2(h_\eta + y'') - \rho''_\eta T h_\eta\Big).
\end{aligned}
$$

Переходя к инфимуму по (ρ'_ξ) и h_ξ, а затем по (ρ''_η) и h_η, получим $p_0(x'+x'', y'+y'') \leqslant p_0(x',y') + p_0(x'',y'')$.

Пусть теперь P — произвольный линейный проектор из X^2 на Z_0 и $p := p_0 \circ P$. Тогда $p : X \times X \to E$ — всюду определенный сублинейный оператор. Для линейного оператора $(T_1, -T_2) \in \partial p$, действующего по правилу $(T_1, -T_2) : (x,y) \mapsto T_1 x + T_2 y$, будет $T_1 \in \partial p_1$, $T_2 \in \partial p_2$ и $T = T_1 + T_2$. $\triangleright$

Рассмотрим теперь формулу для вычисления опорного множества супремума конечного числа сублинейных операторов.

Теорема 2. *Если сублинейные операторы $p_1, \dots, p_n : X \to E^\star$ находятся в алгебраическом общем положении, то справедлива формула*

$$\partial(p_1 \vee \ldots \vee p_n) = \bigcup_{\substack{0 \leqslant \alpha_1, \dots, \alpha_n \in E \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = I_E}} \big\{\partial(\alpha_1 \circ p_1) + \ldots + \partial(\alpha_n \circ p_n)\big\}.$$

$\lhd$ Введем сублинейные операторы $q_1, \dots, q_n : X \times E \to E^\star$, полагая $q_k(x, e) = +\propto_\pi$, где π — наименьший порядковый проектор, для которого $\pi^d p_k(x) \leqslant \pi^d e$. Напомним, что $\propto_0 = 0$ и $\propto_{\mathbb{1}} = +\infty$, поэтому $q_k(x, e) = 0$ при $(x, e) \in \operatorname{epi}(p_k)$ и $q_k(x, e) = +\infty$, если не существует ненулевого порядкового проектора ρ, для которого $\rho p_k(x) \leqslant \rho e$. Легко видеть, что $\operatorname{dom}(\rho q_k) = \operatorname{epi}(\rho p)$ для любого порядкового проектора ρ, следовательно, операторы $q_1, \dots, q_n$ находятся в алгебраическом общем положении и к ним можно применить теорему 1. Остается заметить, что $\mathcal{T}_k \in \partial q_k$ лишь в том случае, если $\alpha_k := \mathcal{T}_k(0, \cdot) \geqslant 0$ и $T_k \in \partial(\alpha_k \circ p_k)$, где $T_k := (\cdot, 0)$. $\rhd$

Используя технические приемы, развитые в [3, гл. 2] и [4, гл. 4], из формулы Моро — Рокафеллара можно вывести алгебраические варианты основных формул субдифференцирования.

3. Преобразование Юнга — Фенхеля

Принято говорить, что выпуклые операторы $f_1, \dots, f_n : X \to E^\star$ *находятся в алгебраическом общем положении*, если в общем положении находятся преобразования Хёрмандера этих операторов $H(f_1), \dots, H(f_n)$. Напомним, что преобразование Хёрмандера $H(f) : X \times \mathbb{R} \to E^\star$ выпуклого оператора $f : X \to E^\star$ вводится формулой

$$H(f) : (x, t) \mapsto \begin{cases} tf(x/t), & \text{если } t > 0, \\ +\infty, & \text{если } t \leqslant 0. \end{cases}$$

Преобразование Юнга — Фенхеля $f^* : L(X, E) \to \overset{\approx}{E}$ отображения $f : X \to E^\star$ определяется формулой:

$$f^*(T) = \sup\{Tx - f(x) : \ x \in X\} \quad (T \in L(X, E)),$$

где супремум вычисляется в $\overset{\approx}{E}$. Непосредственно проверяется, что $\pi f^*(T) = (\pi f)^*(\pi T)$ для $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ и $T \in L(X, E)$. Отсюда вытекает, в частности, что если $\pi T = \pi S$ для некоторых $S, T \in L(X, E)$, то $\pi f^*(T) = \pi f^*(S)$. Заметим также, что если $T \in \operatorname{dom}(\pi f)^*$, то $\pi^d T = 0$.

Теорема 3. *Если выпуклые операторы $f_1, \dots, f_n : X \to E^\star$ находятся в алгебраическом общем положении, то справедлива формула*

$$(f_1 + \ldots + f_n)^* = f_1^* \oplus \ldots \oplus f_n^*.$$

Указанная формула точна в следующем смысле: для произвольного проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ и для любого $T \in \operatorname{dom}(\pi(f_1 + \ldots + f_n)^*)$ существуют линейные операторы $T_i \in L(X, E)$ $(i := 1, \dots, n)$ такие, что

$$T = T_1 + \ldots + T_n,$$
$$\pi(f_1 + \ldots + f_n)^*(T) = \pi f_1^*(T_1) + \ldots + \pi f_n^*(T_n).$$

$\lhd$ Вновь ограничимся случаем $n = 2$. Если $f := f_1 + f_2$ и $T = T_1 + T_2$, то непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$f^*(T) \leqslant f_1^*(T_1) + f_2^*(T_2).$$

Отсюда, в частности, видно, что если $f^*(T) = (e, \rho)$, то $\propto_\rho = \rho f^*(T) = \rho f^*(T_1) + \rho f^*(T_2)$. Поэтому остается доказать утверждение о точности формулы.

Пусть $T \in \operatorname{dom}(\pi f^*)$ и $e := \pi f^*(T) = (\pi f)^*(\pi T)$. Можем считать при этом, что $\pi T = T$. Тогда $t(\pi f)(x/t) \geqslant Tx - te$ ($x \in X$, $t \in \mathbb{R}$), стало быть, оператор $\mathcal{T} \in L(X \times \mathbb{R}, E)$, действующий по правилу $\mathcal{T} : (x,t) \mapsto Tx - te$, входит в $\partial H(f)$. Согласно теореме 1 существуют операторы $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in L(X \times \mathbb{R}, E)$ такие, что $\mathcal{T}_i \in \partial H(\pi f_i)$ и $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$, так как $H(\pi f) = H(\pi f_1) + H(\pi f_2)$. Положим $T_i := \mathcal{T}_i(\cdot, 0)$ и $e_i := \mathcal{T}_i(0,1)$ $(i := 1, 2)$. Тогда $f_i^*(T_i) \leqslant e_i$ и $e = e_1 + e_2$, что и требовалось. $\rhd$

Теорема 4. *Если выпуклые операторы $f_1, \dots, f_n : X \to E^\star$ находятся в алгебраическом общем положении, то справедлива формула*

$$(f_1 \vee \ldots \vee f_n)^* = \inf \left\{ \bigoplus_{l=1}^{n} (\alpha_l \circ f_l)^* : \ \alpha_l \in \operatorname{Orth}(E)^+, \ \sum_{l=1}^{n} \alpha_l = I_E \right\}.$$

Указанная формула точна в следующем смысле: для произвольного проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ и для любого $T \in \operatorname{dom}(\pi(f_1 \vee \ldots \vee f_n)^*)$ существуют линейные операторы $T_l \in L(X, E)$ и ортоморфизмы $\alpha_l \in \operatorname{Orth}(E)$ $(l := 1, \dots, n)$ такие, что

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = I_E, \quad T = T_1 + \ldots + T_n,$$
$$\pi(f_1 \vee \ldots \vee f_n)^*(T) = \pi(\alpha_1 f_1)^*(T_1) + \ldots + \pi(\alpha_n f_n)^*(T_n).$$

$\lhd$ Устанавливается по той же схеме, что и в [4, п. 4.1.5] с использованием теоремы 3 и [4, п. 5.5.3 (2)]. $\rhd$

Литература

1. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.—С. 63–211.
2. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
3. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. I.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2002.—viii+372 с.
4. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. II.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2003.—viii+412 с.
5. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа.—Новосибирск: Ин-т мат-ки, 2001.—354 с.
6. *Левин В. Л.* Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике.—М.: Наука, 1985.—352 с.

Статья поступила 9 ноября 2006 г.

Басаева Елена Казбековна, к. ф.-м. н.
Владикавказ, Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН
E-mail: helen@alanianet.ru