В. В. Лосяков, И. В. Тютин, Двумерная полевая редукция общей теории относительности, *ТМФ*, 2019, том 199, номер 1, 142–153

DOI: 10.4213/tmf9638

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 199, № 1
апрель, 2019

В. В. Лосяков[*†], И. В. Тютин[*‡]

ДВУМЕРНАЯ ПОЛЕВАЯ РЕДУКЦИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В рамках общей теории относительности рассмотрено пространство-время, метрика которого зависит лишь от одной координаты и от времени. Выбран калибровочный класс, в котором в явном виде решены все условия связи теории гравитации как калибровочной теории и построен гамильтониан, зависящий только от динамических физических переменных (гравитонов). Показано, что такой гамильтониан можно получить из действия Полякова для струны в фоновом пространстве анти-де Ситтера со "струнной константой", зависящей от времени.

Ключевые слова: общая теория относительности, гравитационные волны, струны, пространство анти-де Ситтера, калибровочные теории.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9638

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время произошел прогресс в физических экспериментах по обнаружению гравитационных волн [1]. Было бы неплохо, если бы наряду с электромагнитным излучением появился новый канал получения информации о структуре внешнего мира. Основная особенность электромагнитного излучения, которая позволяет получать экспериментальные данные о свойствах ранней стадии эволюции нашего мира, – это его почти свободный характер (выполнение принципа суперпозиции). Эффекты рассеяния света на свете возникают лишь в рамках квантовой теории поля. В этом отношении свойства гравитационного поля существенно иные. При попытках линеаризовать общую теорию относительности нелинейный характер чистой гравитации – бич квантово-полевой теории. К тому же хорошо известно, что

Работа И. В. Тютина частично поддержана РФФИ (грант № 17-02-00317).

[*]Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: losyakov@lpi.ru, tyutin@lpi.ru

[†]Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, Россия

[‡]Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия

учет нелинейности в волновых процессах приводит к возникновению новых эффектов как в экспериментальной, так и в математической физике (например, волны на поверхности мелкой воды).

Минимальный образ волнового процесса – это бегущая плоская волна. Поэтому объектом нашего рассмотрения является сильная плоская гравитационная волна. Конечно, понятие плоской волны в пространстве с нетривиальной метрикой неуместно, поэтому мы воспользуемся определяющим свойством плоской волны – зависимостью физических величин только от координаты вдоль направления распространения волны. Таким образом, по существу в рамках общей теории относительности рассматривается пространство-время, свободное от материи, в котором метрика зависит лишь от одной координаты и времени.

2. ЛАГРАНЖЕВА ФОРМА ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ ДИРАКА

Рассмотрим пространство-время с метрикой $g_{\mu\nu}$, $\mu,\nu = 0,1,\dots,d$, сигнатура которой есть $(-,+,\dots,+)$. В качестве пространственных координат выберем x_i, $i = 1,\dots,d$, а время обозначим следующим образом: $t \equiv x_0$. Действие Эйнштейна для гравитации записывается как

$$S_g = \frac{1}{4G_d}\int dx_0\, dx_1 \dots dx_d\, \sqrt{-g}R;$$

здесь $g = \det\|g_{\mu\nu}\|$, R – скалярная кривизна, G_d – гравитационная постоянная для данной размерности пространства. Лагранжеву плотность этого действия можно, выделив полную производную, представить в следующем виде:

$$\frac{\sqrt{-g}}{4G_d}R = \frac{\sqrt{-g}}{4G_d}g^{\mu\nu}[\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma}] + \frac{1}{4G_d}\partial_\lambda[\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\Gamma^\nu_{\mu\nu})] \equiv \mathcal{L} + \partial_\lambda C^\lambda,$$

где $g^{\mu\nu}$ – матрица, обратная метрике, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ – символы Кристоффеля, индуцированные метрикой $g_{\mu\nu}$:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}), \qquad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Выполнив вслед за Дираком [2] ряд преобразований, можно получить [3], что

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}}{4G_d}\Gamma^0_{ij}\frac{e^{ij}e^{mn} - e^{im}e^{jn}}{g^{00}}\Gamma^0_{mn} + \frac{\sqrt{-g}}{4G_d}R_{\mathrm{sp}}(g_{ij}) + \partial_0 F^0 + \partial_k F^k,$$

где e^{ij} – матрица, обратная пространственной части метрики, $e^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$,

$$R_{\mathrm{sp}} = e^{mn}(\gamma^l_{km}\gamma^k_{ln} - \gamma^k_{mn}\gamma^l_{kl}) + \frac{1}{\sqrt{g_{\mathrm{sp}}}}\,\partial_k(\sqrt{g_{\mathrm{sp}}}(e^{mn}\gamma^k_{mn} - e^{mk}\gamma^n_{mn}))$$

– скалярная кривизна пространства, γ^l_{mn} – символы Кристоффеля для пространственной метрики g_{ik}, а $g_{\mathrm{sp}} = \det\|g_{ij}\|$. Кроме того, в выражении для лагранжевой плотности выделены полные производные от функций

$$F^0 = -\frac{\sqrt{-g}}{4G_d}g^{00}\,\partial_i\frac{g^{0i}}{g^{00}}, \qquad F^k = \frac{\sqrt{-g}}{4G_d}\left[g^{0\mu}\,\partial_\mu\frac{g^{0k}}{g^{00}} - g^{0k}\,\partial_l\frac{g^{0l}}{g^{00}}\right] + \frac{\sqrt{-g}}{4G_d}(e^{ij}e^{kl} - e^{ik}e^{jl})\partial_l g_{ij}.$$

Производную $\partial_0 F^0$ по времени можно опустить: на лагранжевых уравнениях движения она не сказывается, а в гамильтоновом формализме соответствующие изменения эквивалентны некоторому каноническому преобразованию [3]. По лагранжевой плотности находим лагранжиан

$$L = \int_{M_d} dx_1 \dots dx_d \, \mathcal{L} = L_0 + \int_{M_d} dx_1 \dots dx_d \, \partial_k F_k = L_0 + \oint_{\partial M_d} dS_k \, F_k,$$
$$L_0 = \frac{1}{4G_d} \int_{M_d} dx_1 \dots dx_d \sqrt{-g} \left[\Gamma^0_{ij} \frac{e^{ij} e^{mn} - e^{im} e^{jn}}{g^{00}} \Gamma^0_{mn} + R_{\mathrm{sp}}(g_{ij}) \right],$$

где M_d – рассматриваемое пространственное многообразие, ∂M_d – его граница. Слагаемое в лагранжиане, связанное с интегрированием по границе многообразия, не влияет на уравнения движения. Однако гамильтоновы формулировки, полученные из лагранжианов L_0 и L, могут различаться [3] из-за члена, связанного с интегрированием по границе многообразия. В настоящей работе для построения гамильтонова формализма мы используем лагранжиан L_0. Более того, так как реальную гравитационную волну можно считать “плоской” только локально, поместим, как это водится, исследуемое гравитационное поле в мысленный ящик [4]. Другими словами, там, где это потребуется, будем считать, что рассматриваемое пространственное многообразие – это тор T^d ($-l_m < x_m \leqslant l_m$, $m = 1, \dots, d$) с периодическими граничными условиями. В этом случае интегрирование по границе ∂M_d дает нулевой вклад.

Итак, динамические переменные теории (лагранжиан содержит их обобщенные скорости) – это пространственная часть метрики g_{ij}, $i, j = 1, \dots, d$; нединамические переменные суть g^{00}, g_{0i} (их обобщенных скоростей в лагранжиане нет). Параметризуем динамические переменные, число которых равно $(d+1)d/2$, следующим образом: пространственную часть метрики (симметричную положительно определенную матрицу) можно представить в виде произведения

$$\|g_{ij}\| = U D \, U^{-1}, \tag{1}$$

где $U \in SO(d)$ – ортогональная матрица, D – диагональная матрица. Для заданной сигнатуры метрики диагональную матрицу можно представить в виде

$$D = \exp[\Phi], \qquad -\infty < \Phi_{mm} < \infty, \qquad \Phi_{mn} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n, \quad m, n = 1, \dots, d,$$

где Φ_{mm} – некоторые вещественные поля, число которых равно размерности пространственного многообразия M_d. Эти переменные назовем диагональными. Ортогональную матрицу как элемент группы Ли $SO(d)$ можно задать параметрами этой группы ϑ^A, число которых равно $d(d-1)/2$: $U = \exp\left[\vartheta^A T_A\right]$; здесь матрицы T_A (где $(T_A)_{mn} = -(T_A)_{nm}$) являются генераторами группы $SO(d)$. В дальнейшем эти переменные мы называем переменными волчка (spintop).

Прежде чем сделать замену переменных (1), введем некоторые новые обозначения. Определим два дифференциальных оператора, зависящих от переменных волчка:

$$D_i = U^{-1}_{ik}(\vartheta) \partial_k, \qquad D^\star_i = \partial_k U_{ki}(\vartheta).$$

Так как параметры группы $SO(d)$ являются полевыми переменными, введем алгебраические элементы, связанные с пространственно-временными расслоениями:

$$\omega_{mn;0} = U^{-1}_{mk}(\vartheta) \, \partial_0 U_{kn}(\vartheta), \qquad \omega_{mn;i} = U^{-1}_{mk}(\vartheta) D_i U_{kn}(\vartheta).$$

Далее определим диагональные матрицы $\Phi_{;k}$ с элементами

$$\Phi_{mm;k} = D_k\Phi_{mm} - 2\omega_{km;m}, \qquad \Phi_{mn;k} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n,$$

и антисимметричные ($A_{;k}$) и симметричные ($Q_{;k}$) бесследовые матрицы с элементами

$$A_{mn;k} = \omega_{mn;k} + \omega_{mk;n} f_{nm} + \omega_{kn;m} f_{mn},$$
$$Q_{mn;k} = (f_{mn} - f_{nm})\omega_{mn;k} + \omega_{mk;n} f_{nm} - \omega_{kn;m} f_{mn},$$
$$f_{mm} = 0, \qquad f_{mn} = \frac{1}{e^{\Phi_{mm}-\Phi_{nn}} - 1} \quad \text{при} \quad m \neq n.$$

Переопределим также нединамические переменные:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{-g_{\mathrm{sp}} g^{00}}}, \qquad \lambda_k = \frac{g^{0l}}{g^{00}} U_{lk}, \quad k = 1, \dots, d.$$

Введем еще пару определений

$$\Phi_{mm;0} = \partial_0\Phi_{mm} + \lambda_k\Phi_{mm;k} + 2D_m\lambda_m, \qquad \Phi_{mn;0} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n,$$
$$A_{mn;0} = \omega_{mn;0} + \lambda_k A_{mn;k} + (f_{nm} D_n\lambda_m - f_{mn} D_m \lambda_n)$$

и обозначение

$$\varphi_k = \frac{1}{2}(\operatorname{tr}\Phi - \Phi_{kk}).$$

Теперь можно выписать плотность лагранжиана в матричных переменных:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{16G_d}\mathcal{L}_{\mathrm{diag}} + \frac{1}{16G_d}\mathcal{L}_{\mathrm{st}} - \frac{\lambda}{2G_d}\sum_k e^{\varphi_k} D_k^\star D_k^\star e^{\varphi_k},$$

где

$$\mathcal{L}_{\mathrm{diag}} = \frac{1}{\lambda}\bigl(\operatorname{tr}\Phi_{;0}^2 - (\operatorname{tr}\Phi_{;0})^2\bigr) - \lambda\sum_k e^{2\varphi_k}\bigl(\operatorname{tr}\Phi_{;k}^2 - (\operatorname{tr}\Phi_{;k})^2\bigr),$$
$$\mathcal{L}_{\mathrm{st}} = \frac{1}{\lambda}\operatorname{tr}\bigl([A_{;0}, e^{\Phi}][e^{-\Phi}, A_{;0}]\bigr) -$$
$$- \lambda\sum_k e^{2\varphi_k}\operatorname{tr}\left(\frac{3}{4}[A_{;k}, e^{\Phi}][e^{-\Phi}, A_{;k}] - \frac{1}{4}[Q_{;k}, e^{\Phi}][e^{-\Phi}, Q_{;k}]\right);$$

здесь квадратные скобки означают коммутатор матриц ($[A, B] = AB - BA$).

Чтобы выразить $\mathcal{L}_{\mathrm{st}}$ непосредственно через переменные волчка ϑ^A, определим такой алгебраический элемент:

$$(\omega_A)_{mn} = U^{-1}_{mk}(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\vartheta^A}U_{kn}(\vartheta).$$

Тогда

$$\omega_{mn;0} = (\omega_A)_{mn}\,\partial_0\vartheta^A, \qquad \omega_{mn;k} = (\omega_A)_{mn} D_k\vartheta^A.$$

Непосредственно из определения следует крайне существенное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta^A}\omega_B - \frac{\partial}{\partial\vartheta^B}\omega_A + [\omega_A, \omega_B] = 0.$$

Сделаем небольшое отступление, которое объясняет, почему переменные ϑ^A названы переменными волчка. Пусть эти переменные зависят лишь от времени; рассмотрим механическую систему с лагранжианом

$$L = \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\big([\omega_{;0}, D][D^{-1}, \omega_{;0}]\big),$$

где $D = (D_1, \ldots, D_d) = \exp[\Phi]$ – положительно определенная диагональная матрица. Вариация действия для этого лагранжиана по ϑ^A имеет вид

$$\delta S = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} dt\, \delta\vartheta^A(t)\,\mathrm{tr}((\partial_0 M - [M, \omega_{;0}])\omega_A), \qquad M = \frac{1}{2}(D\omega_{;0}D^{-1} + D^{-1}\omega_{;0}D) - \omega_{;0}.$$

Отсюда следуют уравнения движения волчка $\partial_0 M = [M, \omega_{;0}]$. Однако, как было справедливо отмечено П. Гавриленко[1)], несмотря на это уравнение, связь между моментом импульса M и угловой скоростью $\omega_{;0}$ для механического волчка другая. Она также линейна, но имеет иной характер, а именно $M = I\omega_{;0} + \omega_{;0}I$, где I – диагональная матрица, связанная с моментами инерции. Тем не менее мы оставим за этими переменными их название, потому что для реального волчка $d = 3$, и именно в этом случае (правда, только в этом) мы имеем дело с асимметричным волчком Эйлера с моментами инерции

$$J_1 = \frac{(D_2 - D_3)^2}{2D_2D_3}, \qquad J_2 = \frac{(D_3 - D_1)^2}{2D_3D_1}, \qquad J_3 = \frac{(D_1 - D_2)^2}{2D_1D_2}.$$

3. ДВУМЕРНАЯ РЕДУКЦИЯ

Проведем редукцию: предположим, что все переменные теории зависят лишь от одной пространственной координаты $x_d \equiv \sigma$ и времени t.

Прежде всего наложим $d-1$ калибровочных условий, которые учитывают безмассовый характер гравитационного поля[2)]. Для этого разобьем генераторы группы $SO(d)$ на два подмножества: набор первых $(d-1)(d-2)/2$ генераторов T_A, $A = 1, \ldots, (d-1)(d-2)/2$, и набор остальных $d-1$ генераторов T_B, $B = 1, \ldots, d-1$. Тогда

$$\sum_{C=1}^{d(d-1)/2} \vartheta^C T_C = \sum_{A=1}^{(d-1)(d-2)/2} \vartheta^A T_A + \sum_{B=1}^{d-1} \vartheta^B T_B.$$

Генераторы первого набора выберем так:

$$T_A = \left\| \begin{matrix} \mathfrak{t}_A & \vdots & 0 \\ \ldots & \vdots & \ldots \\ 0 & \vdots & 0 \end{matrix} \right\|,$$

где матрицы $\mathfrak{t}_A$ размера $(d-1)\times(d-1)$ образуют полный набор $(d-1)(d-2)/2$ генераторов подгруппы $SO(d-1)$. Калибровочные условия представим как $\vartheta^B = 0$,

[1)] Обсуждение на семинаре отделения теоретической физики ФИАН, частное сообщение.

[2)] Это аналог кулоновской калибровки для плоской электромагнитной волны, в которой вектор-потенциал вдоль направления распространения волны калибруется как нулевой.

$B = 1, \ldots, d-1$. Отсюда находим, что элемент группы $SO(d)$ в такой калибровке принимает вид

$$U = \left\| \begin{matrix} u & \vdots & 0 \\ \ldots & \vdots & \ldots \\ 0 & \vdots & 1 \end{matrix} \right\|, \qquad u = \exp\bigl[\vartheta_A\, \mathfrak{t}_A\bigr] \in SO(d-1).$$

, Отметим, что это лишь частичное наложение калибровки, осталась возможность использовать еще два калибровочных условия.

В рассмотренной ситуации действие операторов D_k, $D_k^\star$, $k = 0, \ldots, d-1$, сводится к умножению на ноль. Действие операторов D_d, $D_d^\star$ обозначим следующим образом:

$$D_d f = D_d^\star f = \partial_\sigma f \equiv f'.$$

Определим новые независимые переменные.

1. Диагональные переменные задаются формулами

$$\text{замена} \quad \Phi_{11}, \ldots, \Phi_{dd} \quad \to \quad \alpha, \chi, \phi^1, \ldots, \phi^{d-2},$$

$$\alpha = \exp\left[\frac{1}{2}(\operatorname{tr}\Phi - \Phi_{dd})\right], \qquad \chi = \frac{1}{2(d-1)}\bigl((d-2)\operatorname{tr}\Phi + d\Phi_{dd}\bigr),$$

$$\phi^a = \frac{1}{2}\sum_m n_m^a \Phi_{mm}, \qquad (n^a)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{a(a+1)}}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{a}, -a, 0, \ldots, 0), \quad a = 1, \ldots, d-2.$$

2. Нединамические переменные задаются формулами[3)]

$$\text{замена} \quad \lambda, \lambda_d, \lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1} \quad \to \quad \mu, \nu, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_{d-1},$$

$$\mu = \lambda\alpha, \quad \nu = \lambda_d, \qquad \Lambda_m = \frac{\alpha e^{-\varphi_m}}{\sqrt{\lambda}} \sum_{n,k} u_{mn}^{-1}\bigl(u_{nk}\lambda_k\bigr)', \quad m = 1, \ldots, d-1.$$

3. Переменные волчка задаются как

$$\vartheta^1, \ldots, \vartheta^{d(d-1)/2} \ + \ d-1 \text{ калибровочных условий} \quad \to \quad \vartheta^1, \ldots, \vartheta^{(d-1)(d-2)/2},$$

$$\omega_{;\tau} = u^{-1}\,\partial_\tau u, \qquad \partial_\tau = \partial_0 + \nu\partial_\sigma, \qquad \omega_{;\sigma} = u^{-1}\,\partial_\sigma u.$$

В таких переменных плотность лагранжиана модели, редуцированной к двумерной теории поля, принимает вид

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{\mathrm{g}} + \mathcal{L}_{\mathrm{str}} + \frac{1}{8G_d}\sum_m \Lambda_m^2;$$

[3)] Взаимная однозначность замены $\lambda_k \ \to \ \Lambda_k$, $k = 1, \ldots, d-1$, на рассматриваемом многообразии выражается условиями

$$\lambda(t,\sigma)|_{\sigma=l_d} - \lambda(t,\sigma)|_{\sigma=-l_d} = \int_{-l_d}^{l_d} d\sigma\, \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} \sum_k u_{mk} e^{\varphi_k} \Lambda_k = 0.$$

Заметим также, что введенные обозначения μ и ν не следует путать с индексами метрического тензора, использованными в разделе 2.

здесь

$$\mathcal{L}_{\mathrm{g}} = -\frac{1}{4G_d\mu}(\partial_\tau\alpha)(\partial_\tau\chi) + \frac{1}{4G_d}\mu(\partial_\sigma\alpha)(\partial_\sigma\chi) - \frac{1}{2G_d}\mu\,\partial_\sigma^2\alpha - \frac{1}{2G_d\mu}\nu'\,\partial_\tau\alpha,$$

а лагранжева плотность $\mathcal{L}_{\mathrm{str}}$ равна

$$\mathcal{L}_{\mathrm{str}} = \frac{\alpha}{4G_d\mu}\Bigg[\sum_{a=1}^{d-2}(\partial_\tau\phi^a)^2 + \sum_{m,n=1}^{d-1}\omega^2_{mn;\tau}\,\mathrm{sh}^2\,\varphi_{mn}\Bigg] - \\ - \frac{\alpha}{4G_d}\mu\Bigg[\sum_{a=1}^{d-2}(\partial_\sigma\phi^a)^2 + \sum_{m,n=1}^{d-1}\omega^2_{mn;\sigma}\,\mathrm{sh}^2\,\varphi_{mn}\Bigg],$$

где $\varphi_{mn} = \delta_{ab}(n^a_m - n^a_n)\phi^b$.

Действие, соответствующее этой лагранжевой плотности, можно представить как действие нелинейной сигма-модели, предложенное Поляковым для описания струны [5]:

$$S_{\mathrm{str}} = \int_{t_{\mathrm{i}}}^{t_{\mathrm{f}}} dt \int d\sigma\,\alpha_{\mathrm{str}}\sqrt{-h}\,h^{\alpha\beta}\mathcal{G}_{MN}(X)\,\partial_\alpha X^M\,\partial_\beta X^N, \tag{2}$$

где $h_{\alpha\beta}$ – метрика мирового листа, заметаемого струной, $h = \det\|h_{\alpha\beta}\|$, $\mathcal{G}_{MN}$ – метрика фонового пространства, в котором движется струна.

Поля́ модели в этом случае собраны в строку X^{T}, отвечающую перечислению координат точек струны в фоновом пространстве размерности $\mathrm{D} = (d+1)(d-2)/2$,

$$X^{\mathrm{T}} = (\phi^1, \dots, \phi^{d-2}, \vartheta^1, \dots, \vartheta^{(d-1)(d-2)/2}),$$

координаты на мировом листе суть ζ^α, $\alpha = 1,2$, где $\zeta^1 = t$, $\zeta^2 = \sigma$, интервал $ds^2 = h_{\alpha\beta}\,d\zeta^\alpha\,d\zeta^\beta$ на мировом листе определяется метрикой мирового листа

$$h_{\alpha\beta} = \begin{Vmatrix} \mu^2 - \nu^2 & \nu \\ \nu & -1 \end{Vmatrix},$$

а метрика фонового пространства имеет блочный вид:

$$\mathcal{G}_{MN} = \begin{Vmatrix} \delta_{ab} & \vdots & & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & & \mathrm{tr}(\Omega_A\Omega_B) & \end{Vmatrix}, \qquad (\Omega_A)_{mn} = (\omega_A)_{mn}\,\mathrm{sh}\,\varphi_{mn}.$$

Свойства фонового пространства проявляются, если вычислить его тензор Римана. Отличные от нуля компоненты этого тензора равны

$$\mathcal{R}_{AaBb} = -\,\mathrm{tr}\bigg(\Omega_A\frac{\partial^2}{\partial\phi^a\,\partial\phi^b}\Omega_B\bigg), \qquad \mathcal{R}_{ABCD} = \mathrm{tr}([\Omega_A,\Omega_B][\Omega_C,\Omega_{\mathrm{D}}]).$$

Используя эти выражения, найдем тензор Риччи рассматриваемого пространства:

$$\mathcal{R}_{MN} = -(d-1)\mathcal{G}_{MN}, \qquad M,N = 1,\dots,\mathrm{D}.$$

Если $d > 3$, то это соотношение отвечает условию экстремальности по метрике $\mathcal{G}_{MN}$ функционала

$$\int d^D X \sqrt{\mathcal{G}(X)}\big(\mathcal{R}(X) - 2\Lambda\big), \qquad \mathcal{G} = \det \|\mathcal{G}_{MN}\|, \qquad \mathcal{R} = \mathcal{G}^{MN}\mathcal{R}_{NM},$$

где постоянный параметр Λ (“космологическая постоянная”) отрицателен и равен

$$\Lambda = -\frac{1}{4}(d-1)(d+2)(d-3).$$

Поэтому фоновое для рассмотренной струны пространство представляет собой пространство анти-де Ситтера (AdS) в римановой версии. В размерности $d = 3$ фоновое пространство есть сфера Лобачевского.

Действие (2) содержит еще одну величину α_{str} – так называемую струнную константу. Здесь требуется существенное пояснение. Если в действии Полякова струнная константа – это действительно постоянный размерный параметр теории, то в рассматриваемой ситуации термин “струнная константа” – оксюморон. Действительно,

$$\alpha_{\text{str}} = \frac{1}{4G}\alpha(t,\sigma), \qquad \frac{1}{G} = \frac{1}{G_d}\int_{M_d} dx_1 \ldots dx_{d-1} = \frac{1}{G_d}\prod_{m=1}^{d-1} 2l_m,$$

и α_{str} зависит от поля α, которое определяется уравнением типа Бельтрами–Лапласа на мировом листе (получается варьированием действия[4)] по $\delta\chi$)

$$\frac{1}{\sqrt{-h}}\,\partial_\alpha \sqrt{-h}\, h^{\alpha\beta}\,\partial_\beta \alpha = 0. \tag{3}$$

Тем не менее можно выбрать такое калибровочное условие, которое зафиксирует значение этого поля (см. далее).

Сделаем еще одно замечание о редукции. Уравнения движения относительно переменных Λ_m решаются тривиально: $\Lambda_m = 0$.

4. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА

Перейдем от касательного к кокасательному расслоению для динамических переменных, определив обобщенные импульсы[5)]

$$P_M = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{X}^M}, \qquad \gamma = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\alpha}}, \qquad \kappa = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\chi}}.$$

Эта процедура задает фазовое пространство размерности 2(D + 2) с переменными $(X^M, \alpha, \chi; P_M, \gamma, \kappa)$. Действие, определяющее динамику на этом пространстве, имеет вид

$$S = \int_{t_{\text{i}}}^{t_{\text{f}}} dt \int d\sigma\,(P_M \partial_0 X^M + \gamma\partial_0\alpha + \kappa\partial_0\chi + \mu\Phi_\mu + \nu\Phi_\nu),$$

[4)] Действие, соответствующее лагранжевой плотности $\mathcal{L}_{\text{g}}$ с точностью до полных производных по времени и пространству, переписывается через метрику мирового листа следующим образом:

$$S_{\text{g}} = -\int_{t_{\text{i}}}^{t_{\text{f}}} dt \int d\sigma \sqrt{-h}(h^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \alpha_{\text{str}})(\partial_\beta \chi) + \alpha_{\text{str}} \text{R}_{\text{h}}),$$

где R_{h} – скалярная кривизна, построенная по метрике $h_{\alpha\beta}$.

[5)] Точка над полем означает дифференцирование по времени.

где

$$\Phi_\mu = 4G\gamma\kappa + \frac{1}{4G}\alpha'\chi' - \frac{1}{2G}\alpha'' - G\frac{1}{\alpha}P_M\mathcal{G}^{MN}P_N - \frac{\alpha}{4G}(\partial_\sigma X^M)\mathcal{G}_{MN}(\partial_\sigma X^N), \\ \Phi_\nu = P_M\partial_\sigma X^M + \gamma\alpha' + \kappa\chi' - 2\kappa'. \tag{4}$$

Из этого выражения следует, что нединамические переменные μ и ν представляют собой множители Лагранжа для уравнений связей (4), и поэтому динамика в фазовом пространстве ограничена гиперповерхностью $\Phi_\mu = 0$, $\Phi_\nu = 0$.

Рассмотренная модель получена путем редукции из теории гравитации – калибровочной теории [3]. Имеется калибровочный произвол, который следует зафиксировать, предъявив два калибровочных условия таким образом, чтобы поставленная классическая задача имела единственное решение.

В аналогичной ситуации в теории струн используется так называемая калибровка светового конуса. Суть ее состоит в том, чтобы исключить из динамического рассмотрения канонические переменные α, γ, κ, χ, наложив на две из них калибровочные условия и выразив две остальные через переменные X^M, P_M. Эта задача решается (см. ниже), если, во-первых, импульс κ считать постоянной величиной, отличной от нуля (первое калибровочное условие),

$$\kappa = \frac{\varkappa}{4G}, \qquad \varkappa = \text{const}; \tag{5}$$

во-вторых, в теории гравитации (как и в теории струн) гамильтониан, построенный каноническим способом, на поверхности связей ($\Phi_\mu = 0$, $\Phi_\nu = 0$) равен нулю. Поэтому, чтобы в теории появилась гамильтонова динамика, необходимо ввести калибровочное условие, явно зависящее от времени. Простейший вариант второго калибровочного условия[6)], учитывающий, что поле $\alpha > 0$, имеет вид

$$\alpha = e^{-\varkappa(t-t_{\rm i})}. \tag{6}$$

Чтобы убедиться, что предъявленные калибровочные условия допустимы, исследуем уравнения движения.

В рассмотренной калибровке связи (4) (получающиеся варьированием по $\delta\mu$ и $\delta\nu$) разрешаются относительно величин γ и χ':

$$\gamma = \frac{e^{\varkappa(t-t_{\rm i})}}{\varkappa}\left[GP_M\mathcal{G}^{MN}P_N + \frac{e^{-2\varkappa(t-t_{\rm i})}}{4G}(\partial_\sigma X^M)\mathcal{G}_{MN}(\partial_\sigma X^N)\right], \\ \chi' = -\frac{1}{\kappa}P_M\partial_\sigma X^M. \tag{7}$$

Теперь запишем уравнения, которые следуют из вариации действия по $\delta\gamma$ и $\delta\chi$:

$$\frac{\delta S}{\delta\gamma} = \dot\alpha + \nu\alpha' + 4G\mu\kappa = \varkappa(\mu - e^{-\varkappa(t-t_{\rm i})}) = 0, \\ \frac{\delta S}{\delta\chi} = \dot\kappa + (\nu\kappa)' + \frac{1}{4G}(\mu\alpha')' = \kappa\nu' = 0.$$

---

6) Как окажется далее, при таком выборе калибровочного условия метрика мирового листа, определяемая множителями Лагранжа, в начальный момент времени тривиальна:

$$h_{\alpha\beta}(t_{\rm i}) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Решая эти уравнения, находим множители Лагранжа $\mu = e^{-\varkappa(t-t_{\rm i})}$, $\nu = 0$. Точнее, решение второго уравнения $\nu = \nu(t)$ есть произвольная функция времени. Пусть, однако, $X^M(t,\sigma)$, $P_M(t,\sigma)$, $M = 1,\dots,\mathrm{D}$, являются решениями уравнений движения при $\nu = 0$, тогда решения этих уравнений при произвольной функции $\nu(t)$ получаются заменой

$$\sigma \to \sigma - \int_{t_{\rm i}}^{t} d\tau\, \nu(\tau).$$

Таким образом, если $\nu \neq 0$, в решениях уравнений движения присутствует функциональный произвол, и это говорит о том [3], что наложенных калибровочных условий недостаточно для однозначного представления динамики рассматриваемой задачи. Их следует дополнить, например, условием $\nu = 0$, полностью фиксирующим систему отсчета, в которой ведется наблюдение. Здесь же отметим, что для найденных значений μ и ν уравнение (3) для поля α выполняется тождественно.

Уравнения относительно X^M, P_M определяются варьированием по δP_K и δX^K соответственно:

$$\begin{aligned} \partial_0 X^K &= 2G\mathcal{G}^{KL}P_L, \\ \partial_0 P_K &= -\,GP_M\frac{\partial\mathcal{G}^{MN}}{\partial X^K}P_N - \\ &\qquad -\frac{e^{-2\varkappa(t-t_{\rm i})}}{4G}\left[(\partial_\sigma X^M)\frac{\partial\mathcal{G}_{MN}}{\partial X^K}(\partial_\sigma X^N) - 2\partial_\sigma\mathcal{G}_{KN}\,\partial_\sigma X^N\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Уравнение движения для обобщенного импульса γ (вариация по $\delta\alpha$) с учетом уже найденных решений записывается как

$$\frac{\delta S}{\delta\alpha} = -\,\dot\gamma - \frac{e^{-\varkappa(t-t_{\rm i})}}{4G}\chi'' + Ge^{\varkappa(t-t_{\rm i})}P_M\mathcal{G}^{MN}P_N - \frac{e^{-\varkappa(t-t_{\rm i})}}{4G}(\partial_\sigma X^M)\mathcal{G}_{MN}(\partial_\sigma X^N) = 0.$$

Если воспользоваться выражениями для γ и χ', полученными при разрешении связей (см. (7)), а затем уравнениями движения (8), то это уравнение выполняется тождественно.

Осталось одно уравнение

$$\frac{\delta S}{\delta\kappa} = \dot\chi + 4Ge^{-\varkappa(t-t_{\rm i})}\gamma = 0. \tag{9}$$

Мы уже получили уравнение для поля χ, определяющее зависимость этого поля от координаты (см. выражение для χ' в (7)). Уравнение (9) определяет зависимость этого поля от времени. Условие совместности этих двух уравнений

$$\partial_0 P_M\,\partial_\sigma X^M = \varkappa e^{-\varkappa(t-t_{\rm i})}\gamma'$$

выражает закон сохранения импульса и выполняется тождественно на уравнениях (8). Их решения определяют поле χ.

Таким образом, калибровочные условия (5), (6), как и связи, задают некоторую гиперповерхность в исходном фазовом пространстве. Пересечение гиперповерхностей связей и калибровок образует *фазовое подпространство*, в котором все переменные (X^M, P_M) независимы. Это и есть фазовое пространство физических переменных (гравитонов), динамика которых определяется действием

$$S = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} dt \int d\sigma\, \big(P_M \partial_0 X^M - \mathcal{H}_\mathrm{ph}(X^M, P_M)\big) + \kappa \int d\sigma\, \big(\chi(t_\mathrm{f}, \sigma) - \chi(t_\mathrm{i}, \sigma)\big),$$

$$\mathcal{H}_\mathrm{ph}(X^M, P_M) = G P_M \mathcal{G}^{MN} P_N + \frac{e^{-2\varkappa(t-t_\mathrm{i})}}{4G}\, (\partial_\sigma X^M) \mathcal{G}_{MN} (\partial_\sigma X^N).$$

Гамильтониан, ответственный за эволюцию физических динамических переменных, явно зависит от времени. То есть рассмотренное однопараметрическое (параметр $\varkappa \neq 0$) семейство калибровочных классов описывает нестационарную теорию поля, что соответствует наблюдениям в физике гравитации.

Параметр $\varkappa$ не определяется исходным действием, а должен быть задан дополнительно. Значения $\varkappa > 0$ соответствуют красному смещению спектра [4] гравитационной волны, а $\varkappa < 0$ – фиолетовому. Поэтому в быстрых локальных процессах (например, в процессах рассеяния) можно считать, что $\varkappa(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{i}) \to 0$. В этом пределе гамильтониан динамических переменных действительно можно получить из действия для струны на фоне пространства AdS со струнной константой (здесь без кавычек)

$$\alpha_\mathrm{str} = \frac{e^{-\varkappa(t-t_\mathrm{i})}}{4G} \to \frac{1}{4G}$$

и метрикой мирового листа

$$h_{\alpha\beta} = \begin{Vmatrix} e^{-2\varkappa(t-t_\mathrm{i})} & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

5. УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНЫ

Уравнения, описывающие гравитационную волну, получаются варьированием действия (2) по δX^K или исключением обобщенного импульса P_K из уравнений (8):

$$\frac{1}{\sqrt{-h}}\, \partial_\alpha\big(\sqrt{-h}\, \alpha_\mathrm{str} h^{\alpha\beta}\, \partial_\beta X^K\big) + \alpha_\mathrm{str} h^{\alpha\beta} (\partial_\alpha X^M) \mathcal{T}^K_{MN} (\partial_\beta X^N) = 0, \qquad (10)$$

где $\mathcal{T}^K_{MN}$ – символы Кристоффеля, построенные по метрике $\mathcal{G}_{MN}$.

Итак, гравитационная волна распространяется по нестационарному, фиксированному выбором калибровочного класса, мировому листу, причем характер ее нелинейности напрямую связан с нетривиальностью фонового пространства.

В пределе $\varkappa(t_\mathrm{f} - t_\mathrm{i}) \to 0$ уравнения (10) принимают вид

$$(\partial_0 + \partial_\sigma)(\partial_0 - \partial_\sigma) X^K + \big((\partial_0 + \partial_\sigma) X^M\big) \mathcal{T}^K_{MN} \big((\partial_0 - \partial_\sigma) X^N\big) = 0.$$

Существуют решения этих уравнений движения гравитационной волны в виде уединенной волны, распространяющейся справа налево или слева направо вдоль оси x_d:

$$X^K(t, \sigma) = f^K(t \pm \sigma).$$

Однако из-за нелинейности уравнений движения вопрос о рассеянии таких уединенных волн, безусловно, требует дальнейшего изучения.

Благодарности. Мы благодарим П. Гавриленко и А. Маршакова за стимулирующие дискуссии, а также участников семинара под руководством П. Арсеева за интерес к работе и обсуждения. В. В. Лосяков благодарен И. Кричеверу за прочитанный им курс классической механики.

Список литературы

[1] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott et al. [LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration], "Observation of gravitational waves from a binary black hole merger", *Phys. Rev. Lett.*, **116**:6 (2016), 061102, 16 pp., arXiv: 1602.03837.

[2] P. A. M. Dirac, "The theory of gravitation in Hamiltonian form", *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **246**:1246 (1958), 333–343.

[3] Д. М. Гитман, И. В. Тютин, *Каноническое квантование полей со связями*, Наука, М., 1986.

[4] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, М., 1973.

[5] А. М. Поляков, *Калибровочные поля и струны*, ИТФ им. Л. Д. Ландау, М., 1995.

Поступила в редакцию 8.10.2018,
после доработки 8.10.2018,
принята к публикации 9.10.2018