# Решения задач из прошлых выпусков

Серия 2, вып. 1, с. 220, задача 6. Условие. Из таблицы

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \dots & n^2 \end{matrix}$$

выбраны $n$ чисел так, что никакие два из выбранных чисел не стоят в одной и той же строке или в одном и том же столбце таблицы. Какова сумма выбранных чисел?

Ответ. $\dfrac{n^3+n}{2}$.

Решение. В каждой клетке записана сумма двух слагаемых. Левое слагаемое может принимать значения $0, n, 2n, \dots, (n-1)n$, правое — значения $1, 2, \dots, n$. Отдельно просуммируем левые и правые слагаемые. Так как из каждой строки выбрали по одному числу, среди левых слагаемых есть все варианты по одному разу, и их сумма равна

$$n + 2n + \ldots + (n-1)n = \frac{n^2(n-1)}{2}.$$

Аналогично правые слагаемые в сумме дают

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Итого сумма будет $\dfrac{n^3+n}{2}$. (*Ю. Раскин*)

Серия 2, вып. 1, с. 221, задача 7. Условие. Расположенная внутри выпуклого $n$-угольника $A_1A_2A_3\dots A_n$ точка $O$ соединена со всеми вершинами; далее $n$ сторон $n$-угольника произвольным образом нумеруются числами от 1 до $n$ и независимо от этого $n$ отрезков $OA_1$, $OA_2$, …, $OA_n$ нумеруются теми же числами, причём никакие две стороны или два отрезка $OA_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) не получают одинакового номера.

(a) При $n = 9$ указать такую нумерацию сторон и отрезков $OA_i$, при которой сумма номеров сторон любого из треугольников $OA_1A_2$, $OA_2A_3$, …, $OA_nA_1$ будет одна и та же.

(b) Доказать, что при $n = 10$ такую нумерацию осуществить нельзя.

Решение. Расстановка чисел для пункта (a) показана на рис. 1.

(b) Предположим, что сумма чисел в каждом треугольнике равна $s$. Тогда сумма чисел на всех десяти треугольниках равна $10s$. С другой стороны, в этой сумме каждое число на границе многоугольника посчитано один раз, а каждое число на внутреннем отрезке — два раза, поэтому эта сумма равна

$$(1 + \ldots + 10) + 2 \cdot (1 + \ldots + 10) = 55 \cdot 3.$$

Но тогда $s = 55 \cdot 3/10$ — не целое число. Противоречие.

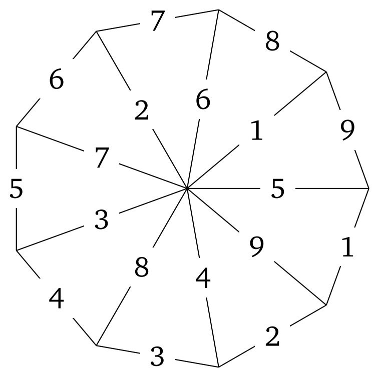


Рис. 1

Замечание. Аналогично можно показать, что для 9-угольника сумма на каждом треугольнике должна быть равна $45 \cdot 3/9 = 15$, это соображение помогает расставить цифры в пункте (a).

(*Ю. Раскин*)

12.2. Условие. В пространстве расположено несколько плоскостей общего положения (никакие три не параллельны одной прямой, и все не пересекаются в одной точке). Они делят пространство на несколько частей, и в каждой части записан знак — плюс или минус. Разрешается изменить все знаки во всех частях внутри любого тетраэдра, образованного данными плоскостями. Докажите, что за несколько операций можно сделать так, чтобы во всех ограниченных частях стояли плюсы.

(*А. Канель*)

Решение. Назовём *многогранной областью* пересечение нескольких полупространств в $\mathbb{R}^3$ (нам не важно, принадлежит ли полупространству его граничная плоскость, и в дальнейшем мы не обращаем внимание на подобного рода тонкости.) Ограниченные многогранные области — это выпуклые многогранники; плоскости, содержащие грани многогранника, назовём его *опорными плоскостями*.

*Побитовой суммой* конечного набора множеств является множество, состоящее из всех элементов, содержащихся в нечётном числе множеств из набора. Утверждение задачи вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Пусть дан многогранник $M$. Назовём опорным тетраэдром внутренность тетраэдра, каждая грань которого — опорная плоскость многогранника $M$. Тогда $M$ является побитовой суммой нескольких опорных тетраэдров.*

Доказательство индукцией по количеству граней $k$. База индукции $k=4$ очевидна. Пусть у $M$ имеется $k \geqslant 5$ граней. Проведём переход от $k-1$ к $k$.

Поверхность $M$ гомеоморфна сфере, а на сфере, как известно, нельзя нарисовать без пересечений рёбер полный граф на 5 вершинах. Поэтому какие-то две грани $M$ не являются смежными по ребру. Обозначим их $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$. Многогранник $M$ является пересечением $k$ полупространств. Пусть $M_1$ обозначает пересечение $k-1$ полупространств — тех же самых, что и для $M$, за исключением того, которое соответствует грани $\Gamma_1$. Аналогично построим множество $M_2$.

Сперва докажем, что хотя бы одна из многогранных областей $M_1$, $M_2$ ограниченна. Предположим противное и выберем точку $O$ внутри $M$. Так как область $M_1$ выпукла и неограниченна, найдётся луч $l_1$, выходящий из точки $O$ и целиком содержащийся внутри $M_1$. Аналогично из $O$ выходит луч $l_2$, целиком содержащийся внутри $M_2$. Так как все плоскости — общего положения, лучи можно немного пошевелить, поэтому можно считать, что $l_1$ и $l_2$ не лежат на одной прямой, а плоскость, содержащая эти лучи, не содержит ни одну из вершин многогранника $M$. Обозначим через $U$ угол между $l_1$ и $l_2$, т. е. часть плоскости, ограниченную лучами $l_1$ и $l_2$. Пусть $P$ — одна из $k-2$ оставшихся (т. е. не содержащих $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$) опорных плоскостей многогранника $M$. Ни $l_1$, ни $l_2$ не пересекают $P$. Значит, эти лучи лежат целиком в одном и том же полупространстве относительно $P$. По соображениям выпуклости весь угол $U$ лежит в этом же полупространстве.

Таким образом, угол $U$ не пересекает ни одну из граней многогранника $M$, кроме $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$. С другой стороны, пересечение $U$ с границей $M$ — ломаная, один конец которой лежит в $\Gamma_1$, а второй в $\Gamma_2$. Какая-то точка этой ломаной принадлежит тогда и $\Gamma_1$, и $\Gamma_2$. Так как она не может быть вершиной многогранника $M$, грани $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ смежны в $M$ по ребру. Это противоречие показывает, что либо $M_1$, либо $M_2$ — ограниченная область.

Пусть это $M_1$. Плоскость грани $\Gamma_1$ делит $M_1$ на две части. Одна из них — $M$, обозначим вторую $M'$. Понятно, что $M$ — побитовая сумма множеств $M_1$ и $M'$. Оба эти множества — многогранники. Многогранник $M_1$ — пересечение $k-1$ полупространств, и у него не более чем

$k-1$ грань. Плоскость грани $\Gamma_1$ делит поверхность $M_1$ на две части, при этом часть, соответствующая $M'$, не пересекается с $\Gamma_2$. Значит, у $M'$ не более чем $k-1$ грань. Применяя предположение индукции к $M'$ и $M_1$, завершаем доказательство леммы. $\square$

Из леммы следует, что в любой ограниченной области можно за несколько действий поменять знак (меняем знаки в тех тетраэдрах, побитовой суммой которых эта область является). Если затем мы таким же образом поменяем знак в другой ограниченной области, то в первой области знак не изменится, так как она принадлежит чётному числу тетраэдров, в которых мы меняем знак. Последовательно применяя лемму к ограниченным областям, мы сможем добиться требуемой расстановки знаков.

(*И. В. Митрофанов*)

15.11. Условие. (а) Пусть $M=(a,b)$ — интервал на положительной полупрямой $(0,+\infty)$. Доказать, что интервалы $nM=(na,nb)$ ($n=1,2,\ldots$) покрывают полупрямую $(c,+\infty)$ для достаточно большого $c$ и, значит, дополнение к их объединению имеет конечную меру.

(б) Придумать пример подмножества $M\subset(0,+\infty)$, не обладающего указанным выше свойством, т. е. такого, что дополнение к объединению подмножеств $nM$ ($n=1,2,\ldots,$) имеет бесконечную меру.

Решение. (а) Покажем, что при любом достаточно большом $n$ интервалы $nM$ и $(n+1)M$ пересекаются. Действительно, для этого необходимо и достаточно, чтобы точка $nb$ лежала правее точки $(n+1)a$, т. е. чтобы было $n/(n+1)>a/b$. Если $n>1/(b/a-1)$, это неравенство автоматически выполняется. Значит, объединение всех интервалов $nM$ при $n$, превосходящих некоторое $n_0$, — связное множество. Очевидно, оно содержит сколь угодно большие числа, а значит, является полупрямой.

(б) Для множества $X\subset(0,+\infty)$ обозначим

$$M_X=\bigcup_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}X;$$

пересечение $M_X$ с отрезком $[1;2]$ назовём *тенью* $S_X$ множества $X$. Очевидно, что тень объединения множеств — объединение их теней. Кроме того, если подмножество $M\subset[1;2]$ не пересекается с тенью множества $X$, то объединение подмножеств $nM$ не пересекается с $X$.

Лемма. *Для любого $T>0$ существует множество $X\subset(T,+\infty)$, являющееся объединением отрезков суммарной длины хотя бы 1 и такое, что мера $S_X$ меньше, чем $1/T$.*

Доказательство. Будем обозначать $I_{(x,a)}$ отрезок длины $a$ с левым концом в точке $x$. Пусть $X = I_{(x,a)}$, а $m$ — наименьшее натуральное, большее чем $x/2$. Тогда $S_{I_{(x,a)}}$ состоит из не более чем $m+1$ отрезков (это $\frac{1}{k}X$ для $k = m, m+1, \ldots, 2m$). Длина каждого отрезка не превосходит $a/m$, поэтому мера $S_X$ не больше, чем $2a$.

Будем искать $X$ в виде объединения

$$X = \bigcup_{t \in \mathscr{B}} I_{(tx,a)},$$

где $\mathscr{B}$ — конечное множество натуральных чисел, которое опишем позже, $x$ — достаточно большое число, которое укажем ещё позже, $a$ подберём тоже потом. Понятно, что мера $S_X$ не превосходит суммы мер $S_{I_{(tx,a)}}$, что не больше, чем $2a|\mathscr{B}|$. Наша цель — подобрать параметры $\mathscr{B}, x, a$ так, чтобы тени отрезков $I_{(tx,a)}$ сильно пересекались между собой и мера множества $S_X$ была ещё меньше.

Пусть $t = t_1 t_2$, где $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$, тогда для любого целого $k$

$$\frac{1}{t_1 k} I_{(tx,a)} \subset \frac{1}{k} I_{(t_2 x,a)}.$$

Значит, каждый $t_1$-й отрезок из $M_{I_{(tx,a)}}$ лежит в $M_{I_{(t_2x,a)}}$.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_L$ — первые $L$ простых чисел, $N$ достаточно большое (уточним $L$ и $N$ позже). Обозначим $P = p_1 p_2 \ldots p_L$. Положим

$$\mathscr{B} = \left\{ p_1^{d_1} \ldots p_L^{d_L} \mid 0 \leqslant d_1, \ldots, d_L \leqslant N \right\}.$$

Будем по очереди добавлять отрезки в $X$ слева направо и смотреть, как при этом меняется тень. Всего $(N+1)^L$ шагов, на каждом шаге размер тени увеличивается не более чем на $2a$.

Назовём число $t \in \mathscr{B}$ *богатым*, если оно делится на $P$. Пусть $t$ богатое. К моменту добавления $I_{(tx,a)}$ все отрезки вида $I_{(tx/p_i,a)}$ уже добавлены. Каждый второй отрезок в $M_{I_{(tx,a)}}$ содержится в $M_{I_{(tx/2,a)}}$, каждый третий содержится в $M_{I_{(tx/3,a)}}$ и так далее.

Значит, в множестве $M_{I_{(tx,a)}}$ из любых $P$ отрезков подряд будет только $(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_L-1)$ таких, которые не являются подмножествами уже добавленных отрезков. Потребуем теперь, чтобы $x$ было достаточно большим в сравнении с $P$ для отсутствия краевых эффектов, тогда можно будет считать, что при добавлении $I_{(tx,a)}$ к $X$ мера $S_X$ возрастает не более чем на

$$4\Big(1-\frac{1}{p_1}\Big)\Big(1-\frac{1}{p_2}\Big)\ldots\Big(1-\frac{1}{p_L}\Big)a.$$

Заодно наложим условие $x > T$.

Выберем маленькое $\varepsilon$. Как известно, сумма чисел, обратных к простым, расходится, поэтому для некоторого $L$ (зафиксируем его) будет

$$4\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_L}\right)<\varepsilon.$$

Выберем теперь $N$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$1-\left(\frac{N}{N+1}\right)^L<\varepsilon$$

(левая часть неравенства — это доля не богатых чисел в $\mathscr{B}$).

Ввиду сказанного, мера множества $S(X)$ оценивается сверху как $\varepsilon a|\mathscr{B}|+2\varepsilon a|\mathscr{B}|$. Возьмём теперь $a=1/\mathscr{B}$, тогда мера $X$ будет равна 1, а мера $S(X)$ не будет превосходить $3\varepsilon$, что завершает доказательство леммы. □

Пользуясь леммой, построим такие множества $(X_1, X_2, \ldots,)$, что мера $S_{X_i}$ не превосходит $2^{-(i+1)}$, все $X_i$ имеют меру 1 и попарно не пересекаются. Возьмём

$$M:=[1;2]\setminus\bigcup_{i=1,\,2,\,\ldots}S_{X_i}.$$

Множество $M$ имеет меру не меньше $1/2$. При этом объединение множеств $nM$ $(n=1,2,\ldots)$ не пересекается ни с каким из $X_i$, а значит, его дополнение обладает бесконечной мерой.

(*И. В. Митрофанов*)

18.5. Условие. Дано выпуклое тело $T$ в пространстве и точка $M$ внутри него. Докажите, что найдётся плоское сечение $T$, для которого $M$ есть центр тяжести. (*М. Л. Концевич*)

Решение 1. Воспользуемся знаменитой *теоремой о причёсывании ежа*.

Теорема. *На двумерной сфере не существует непрерывного касательного векторного поля, которое нигде не обращается в нуль.*

Пусть $v$ — вектор длины 1. Проведём через $M$ плоскость, нормалью к которой является $v$. Пусть $M'$ — центр масс сечения тела $T$ этой плоскостью. Поставим в соответствие вектору $v$ вектор $f(v):=MM'$. Отображение $f$ определено на всех единичных векторах, т. е. на всех точках единичной сферы, и каждой точке сферы ставит в соответствие вектор из касательного пространства. Это отображение непрерывно, поэтому, по теореме о причёсывании ежа, в какой-то точке сферы вектор нулевой. А это значит, что в перпендикулярном ему сечении точка $M$ является центром тяжести.

Замечание 1. Доказательство теоремы о причёсывании ежа см. в [1].

В решении задачи мы не использовали почти никакие свойства центра масс, помимо того, что если выпуклую фигуру слегка «пошевелить», то центр масс изменится тоже не сильно.

Недостатком этого решения является то, что оно обобщается только на пространства нечётной размерности, так как на сфере $S^{2n-1}$, вложенной в $\mathbb{R}^{2n}$, существуют непрерывные векторные поля, нигде не обращающиеся в нуль. Предлагаем вам проверить, что формула

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = (x_2, -x_1, \ldots, x_{2n}, -x_{2n-1})$$

задаёт ненулевое касательное векторное поле на единичной сфере. Тем не менее, утверждение задачи верно в любой размерности, и мы это сейчас покажем.

Решение $1'$. Как и раньше, построим на сфере непрерывное векторное поле. Заметим, что в противоположных точках сферы находятся одинаковые векторы, так как две противоположные нормали задают одну и ту же плоскость. Нам осталось доказать следующее утверждение.

Лемма. *На единичной сфере $S^n$, расположенной в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, не существует непрерывного нигде не ненулевого касательного векторного поля, которое принимает одинаковые значения (векторы размерности $n+1$) в любых двух антиподально противоположных точках сферы.*

Доказательство. Пусть такое поле $f(v)$ существует. Для $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ определим отображение $h_\alpha : S^n \to S^n$. Если $x \in S^n$, проведём через $x$ большую окружность, содержащую $f(x)$, и пусть $h_\alpha(x)$ — такая точка на этой окружности, что наименьший ориентированный угол от $x$ до неё равен $\alpha$. Несложно понять, что все эти отображения непрерывны и мы построили гомотопию, соединяющую отображения $h_0$ и $h_{\pi/2}$. Отображение $h_0$ тождественное, его степень $\deg(h_0) = 1$.

Так как степень непрерывного отображения — гомотопический инвариант, получаем, что $\deg(h_{\pi/2}) = \deg(h_0) = 1$. Но про отображение $h_\alpha$ мы знаем, что любые антиподальные точки переходят в одну и ту же. Степень такого отображения должна быть чётна. Противоречие. □

(*А. Балицкий*)

Замечание 2. Представим, что у вас есть воздушный шарик, чёрный снаружи и белый изнутри. Внутри шарика находится сферический мяч, и шарик плотно прилегает к мячу. Если на поверхности шарика есть складки, то разные точки мяча могут быть покрыты разным числом слоёв. Но если слои, которые лежат чёрным вверх, считать со знаком плюс, а белым вверх со знаком минус, то все точки мяча покрыты одним и тем же числом слоёв, и это число называется *степенью отображения*.

Фразу из решения «степень непрерывного отображения — гомотопический инвариант» можно понимать так, что если шарик приподнять над мячом, порастягивать и снова прижать к мячу (рвать не разрешается), то число слоёв не изменится. Оно не меняется даже если в процессе манипуляций поверхность шарика пересекается сама с собой. Если вам интересно разобраться в деталях, то советуем почитать про эти понятия в книге [2, p. 174–178].

Приведём ещё одно решение, обобщающееся на все размерности.

Решение 2. Пусть $v$ — ненулевой вектор. Проведём через $M$ плоскость, перпендикулярную к $v$. Она разрезает $T$ на два выпуклых тела, и пусть $V(v)$ — объём того из них, которое находится в одном полупространстве с нормалью $v$. Как и в первом решении, обозначим $f(v)$ вектор, соединяющий $M$ с центром масс сечения. Площадь этого сечения обозначим $S(v)$.

Лемма. *Функция $V(x)$, определённая на единичной сфере, гладкая. В точке $v$ её дифференциал — скалярное произведение вектора $dv$ с вектором $S(v)f(v)$.*

Доказательство. Пусть между единичными векторами $v$ и $v'$ маленький угол $\alpha$. Выберем систему координат $Mxyz$ так, чтобы вектор $v$ имел координаты $(0,0,1)$, а $v'$ имел координаты $(-\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$. Тогда $V(v)$ — это объём части тела $T$, лежащей в полупространстве $z \geqslant 0$, а $V(v')$ — объём части тела $T$, лежащей в полупространстве $z \geqslant x \operatorname{tg}\alpha$. Обозначим через $V_-$ множество точек из $T$, для которых $x \geqslant 0$ и $0 \leqslant z \leqslant x \operatorname{tg}\alpha$. Аналогично пусть $V_+$ — множество точек из $T$, для которых $x \leqslant 0$ и $x \operatorname{tg}\alpha \geqslant z \geqslant 0$. Эти множества выглядят как две узкие апельсиновые дольки, касающиеся по отрезку на оси $Mz$. Очевидно,

$$V(v') - V(v) = \operatorname{Vol}(V_+) - \operatorname{Vol}(V_-).$$

Обозначим $\Phi$ пересечение тела $T$ с плоскостью $z=0$, оно разбивается прямой $x=0$ на две части. Часть с положительной координатой $x$ обозначим $\Phi_+$, с отрицательной $\Phi_-$ и заметим, что по определению центра тяжести фигуры $\Phi$ его координаты $\bar{x}$ и $\bar{y}$ равны

$$\bar{x} = \frac{1}{S(v)} \iint\limits_{\Phi} x\,dx\,dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{S(v)} \iint\limits_{\Phi} y\,dx\,dy.$$

Сечения тела $T$ плоскостями, параллельными плоскости $z=0$ и близкими к ней, похожи на фигуру Φ. Несложно вывести (опустим технические подробности), что

$$\operatorname{Vol}(V_-) = \iint\limits_{\Phi_+} x \operatorname{tg}\alpha\, dx\, dy + o(\alpha),$$
$$-\operatorname{Vol}(V_+) = \iint\limits_{\Phi_-} x \operatorname{tg}\alpha\, dx\, dy + o(\alpha).$$

Таким образом,

$$V(v') - V(v) = -\operatorname{tg}\alpha\; S(v)\bar{x} + o(\alpha) \sim S(v)\langle f(v), v'-v\rangle + o(|v'-v|),$$

откуда следует лемма. □

Теперь мы можем решить задачу. Возьмём на единичной сфере точку $v$ с минимальным значением $V(v)$. В ней дифференциал функции $V$ равен нулю, а значит, $f(v)=0$.

(*И. Митрофанов*)

## Список литературы

[1] *Eisenberg M.*, *Guy R.* A Proof of the Hairy Ball Theorem // Amer. Math. Monthly. 1979. Vol. 86, № 7. P. 571–574.

[2] *Хатчер А.* Алгебраическая топология. М.: МЦНМО, 2011.

29.3. Условие. Дан эллипс с фокусом $F$. Найдите геометрическое место проекций $F$ на хорды, видные из $F$ под фиксированным углом.

(*А. Заславский, по мотивам А. Сгибнева*)

Решение. Искомое ГМТ — окружность. Действительно, хорошо известна

Лемма. *Геометрическое место точек, из которых данная окружность видна под данным углом, есть окружность, концентрическая данной.*

Доказательство. Пусть данный угол равен $\alpha$, $O$ — центр данной окружности, $R$ — её радиус (рис. 2). Если из точки $A$ данная окружность видна под углом $\alpha$, то $AO = \dfrac{R}{\sin(\alpha/2)} = \text{const}$. □

Перейдём к решению задачи. Пусть фиксированный угол равен $\alpha$; точка $F_1$ — второй фокус данного эллипса; точки $A, B$ выбраны на эллипсе так, что $\angle AFB = \alpha$; точка $X$ симметрична точке $F$ относительно $AB$ (рис. 3). Докажем, что искомое ГМТ — окружность.

Достаточно доказать, что точка $X$ лежит на фиксированной окружности. Пусть $\Omega$ — окружность с центром $F_1$ и радиусом $AF+AF_1$. Тогда окружность с центром в точке $A$ и радиусом $AF$ касается окружности $\Omega$ в точке её пересечения с прямой $AF_1$. Сделаем инверсию с центром в точке $F$ и любым радиусом. Образы при этой инверсии будем обозначать штрихами (рис. 4).

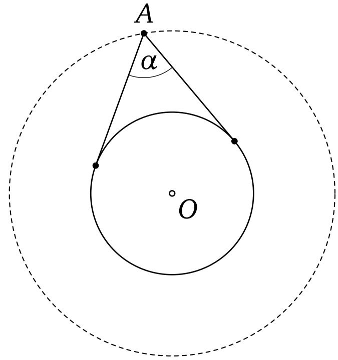


Рис. 2

Точка $X'$ — центр описанной окружности треугольника $FA'B'$, а серединные перпендикуляры к отрезкам $FA'$, $FB'$ касаются окружности $\Omega'$. Следовательно, окружность $\Omega'$ видна из точки $X'$ под углом $180^\circ - \alpha$, и по лемме точка $X'$ лежит на фиксированной окружности.

(*К. А. Бельский, ученик ЮМШ, Санкт-Петербург*)

30.9. Условие. Дан произвольный треугольник $ABC$. Пусть $O, H$ — центр его описанной окружности и его ортоцентр соответственно, а $P$ — произвольная точка плоскости.

(а) Докажите, что касательные к окружностям $\odot(AOP)$, $\odot(BOP)$, $\odot(COP)$ в точках $A, B, C$ конкурентны тогда и только тогда, когда $P$ лежит на гиперболе $ABCOH$.

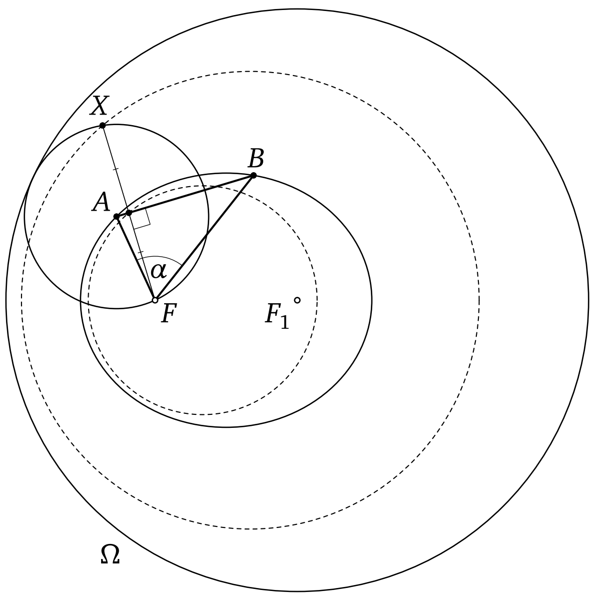


Рис. 3

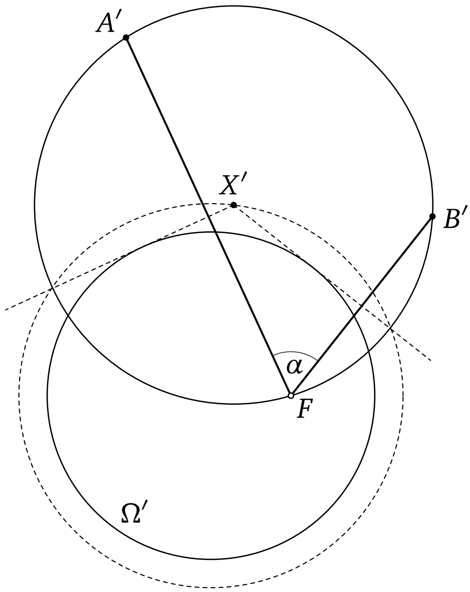


Рис. 4

(б) Пусть теперь $P$ лежит на гиперболе $ABCOH$. Обозначим через $A_1$ точку пересечения касательной к окружности $\odot(ABC)$ со стороной $BC$, а через $A_2$ — точку пересечения прямых $A_1B_1C_1$ и $AP$. Аналогично определим точки $B_1, B_2$ и $C_1, C_2$. Тогда радикальный центр окружностей $\odot(AA_1A_2)$, $\odot(BB_1B_2)$ и $\odot(CC_1C_2)$ — это точка пересечения прямых $OP$ и $A_1B_1C_1$.

(в) Если $P$ совпадает с точкой Лемуана $L$ треугольника $ABC$, то окружности из п. (б) соосны и пересекаются на окружности $\odot(ABC)$.

(*А. Жужлев, А. Шевцов*)

Решение. Теорема Дезарга об инволюции. *Даны четыре точки $A, B, C, D$ общего положения и прямая $l$, не проходящая через них. Пусть $l$ пересекает прямые $AB$, $CD$, $BC$, $AD$, $AC$, $BD$ в точках $X$, $X'$, $Y$, $Y'$, $Z$, $Z'$ соответственно, а конику, проходящую через $A, B, C, D$, — в точках $W$, $W'$. Тогда на прямой $l$ существует проективная инволюция $f: X \longleftrightarrow X'$, $Y \longleftrightarrow Y'$, $Z \longleftrightarrow Z'$, $W \longleftrightarrow W'$.*

Лемма. *Пусть чевианы $AD$, $BE$, $CF$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $P$, а окружности $\odot(AEF)$, $\odot(BDF)$, $\odot(CDE)$ пересекаются в точке $M$. Тогда окружности $\odot(AMD)$, $\odot(BME)$, $\odot(CMF)$ соосны.*

Доказательство. После инверсии с центром в точке $M$ и любым радиусом достаточно проверить условие теоремы Чевы. Но оно очевидно, если вычислить получившиеся отрезки. □

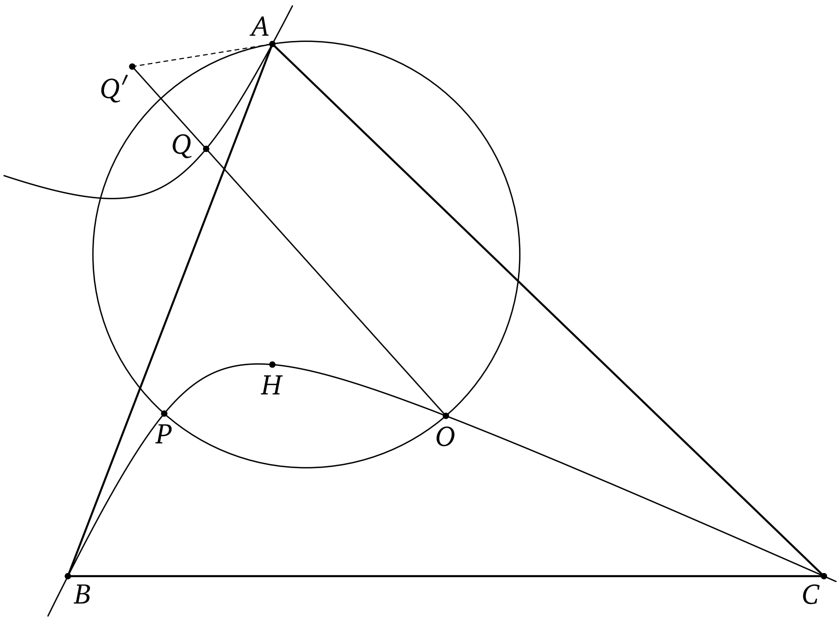


Рис. 5

Эта лемма появилась в качестве задачи на Южном математическом турнире 2022 г. (гранд-лига, 4 тур).

Решение пункта (а). Далее гипербола $ABCOH$ обозначается $\mathscr{C}$. Пусть точки $P, Q$ антигонально сопряжены в треугольнике $ABC$. Точка $Q'$ инверсна точке $Q$ относительно окружности $\odot(ABC)$, см. рис. 5. Если $P$ лежит на гиперболе $\mathscr{C}$, то $\angle(AP, OP) = \angle(AQ, OQ) = \angle(AO, AQ')$, поэтому прямая $AQ'$ касается окружности $\odot(AOP)$. Аналогично прямые $BQ', CQ'$ касаются окружностей $\odot(BOP)$, $\odot(COP)$ соответственно. В другую сторону утверждение доказывается точно так же.

Решение пункта (б). Точки $A_1, B_1, C_1$ лежат на поляре точки $L$ относительно окружности $\odot(ABC)$, поэтому $OL \perp A_1B_1C_1$, Прямые $OP$ и $A_1B_1C_1$ пересекаются в точке $R$. Прямая $A_1B_1C_1$ пересекает гиперболу $\mathscr{C}$ в точках $X$, $Y$ (рис. 6). Достаточно доказать, что существует проективная инволюция, которая меняет местами пары точек $A_1 \longleftrightarrow A_2$, $B_1 \longleftrightarrow B_2$, $C_1 \longleftrightarrow C_2$, $R \longleftrightarrow \infty_{A_1B_1C_1}$.

По теореме Дезарга об инволюции для четырёхугольника $ABCP$ и прямой $A_1B_1C_1$ существует проективная инволюция, которая меняет местами пары точек $A_1 \longleftrightarrow A_2$, $B_1 \longleftrightarrow B_2$, $C_1 \longleftrightarrow C_2$, $X \longleftrightarrow Y$. Точка $Q$ выбрана на $\mathscr{C}$ так, что $PQ \parallel A_1B_1C_1$. Прямые $A_1P$, $A_1O$ повторно пересекают $\mathscr{C}$ в точках $S, T$ соответственно. Так как $AL \perp OT$, точка $L$ является ортоцентром треугольника $AOT$, поэтому прямая $AT$ параллельна $PQ$.

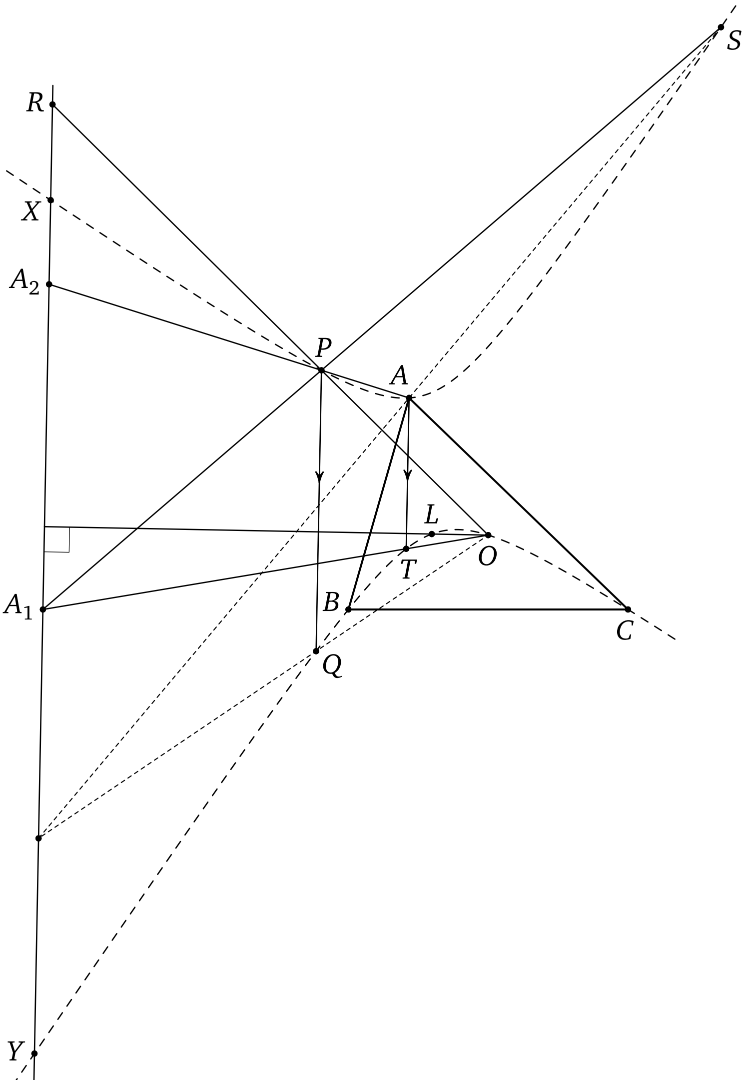


Рис. 6

Теперь достаточно доказать, что прямые $AS, OQ, XY$ пересекаются в одной точке, что верно по теореме Паскаля для шестиугольника $SATOQP$.

Решение пункта (в). Прямые $BL, CL$ повторно пересекают окружность $\odot(ABC)$ в точках $E, F$. Пусть $M$ — точка пересечения окружностей $\odot(ABC)$, $\odot(B_1CA_2)$, $\odot(C_1BA_2)$, см. рис. 7. Тогда

$$\angle AMA_2 = \angle BMA_2 + \angle BMA = \angle ACB + \angle BC_1A_2 = \\ = \angle C_1AA_2 + \angle BC_1A_2 = 180^\circ - \angle AA_1A_2.$$

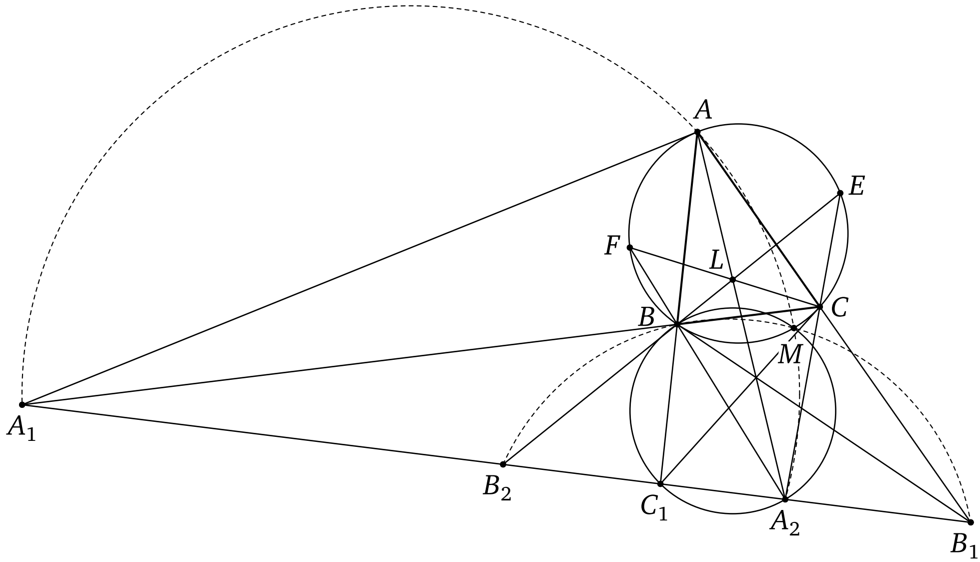


Рис. 7

Следовательно, точки $A, A_1, A_2, M$ лежат на одной прямой. Заметим, что $(A_1, A_2, C_1, B_1) = -1 = (C, F, A, B)$, поэтому точка $A_2$ лежит на прямой $BF$. Аналогично точка $A_2$ лежит на прямой $CE$. Следовательно,

$$\angle MBB_2 = \angle MBB_1 + \angle A_2BB_2 = \angle MCF + \angle ECF = \\ = 180^\circ - \angle MCA_2 = 180^\circ - \angle MB_1B_2,$$

поэтому точки $B, B_1, B_2, M$ лежат на одной окружности. Аналогично точки $C, C_1, C_2, M$ лежат на одной окружности. По лемме, применённой к треугольнике $AB_1C_1$, окружности $\odot(AMA_2)$, $\odot(BMB_2)$, $\odot(CMC_1)$ соосны, так как прямые $AA_2$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке.

Коника $\mathscr{C}$ называется *гиперболой Ерабека* для треугольника $ABC$. Она и раньше появлялась, например, в статье: *Zaslavsky A. A.* One property of the Jerabek hyperbola and its corollaries // Journal of Classical Geometry. 2013. Vol. 2. P. 53–56.

(*К. А. Бельский, ученик ЮМШ, Санкт-Петербург*)

К статье А.Б. Сосинского «Обман?!».

Определение производной как линейного оператора, удовлетворяющего правилу Лейбница, можно законно использовать только тогда, когда доказано, что это определение непротиворечиво, а для этого нужно построить теорию пределов.