Э. Г. Шифрин, Обобщение теоремы существования Каратеодори для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, *Дифференц. уравнения*, 1995, том 31, номер 6, 1098–1099

ИЮНЬ 1995 г., ТОМ 31, № 6

УДК 517.925

Э. Г. ШИФРИН

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ КАРАТЕОДОРИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Показывается, что в теореме существования Каратеодори условие непрерывности правой части системы обыкновенных дифференциальных уравнений по зависимой переменной может быть заменено условием измеримости по этой переменной.

Теорема. *Пусть n-мерная вектор-функция $f(t,x)=\{f_i(t,x_j);\ i,j=1,2,\dots,n\}$ определена в области G: $-\infty<x_i<+\infty$, $0<t<T$ и i) $\forall x$ измерима по t, ii) $\forall t$ измерима по x_i, $i=1,2,\dots,n$, iii) $|f_i(t,x)|\leqslant M(t)\in L(0,T)$. Тогда для каждой точки $(t_0,x_0)\in G$ существует n-мерная вектор-функция $x(t)\in C(0,T)$, удовлетворяющая уравнению*

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(t,x(t))\,dt. \tag{1}$$

(В теореме Каратеодори [1] вместо *ii*) фигурирует условие непрерывности $f(t,x)$ по x почти при всех t.)

Рассмотрим уравнение относительно $x^{(h)}(t)$

$$x^{(h)}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} [f(t,x^{(h)}(t))]_h dt, \tag{2}$$

где квадратные скобки с нижним индексом h означают усреднение по Стеклову по n-мерному кубу со стороной $2h$

$$[f(t,x)]_h=(2h)^{-1}\int_{x-h}^{x+h} f(t,y)\,dy. \tag{3}$$

Здесь и ниже h — n-мерный вектор, каждая компонента которого равна h; интеграл понимается как n-кратный.

Из условия *iii*) следует, что $f(t,x)$ конечна почти при всех t, поэтому из *ii*) следует, что $f(t,x)$ суммируема по x по любому ограниченному множеству почти при всех t, а значит, $[f(t,x)]_h$ определена почти при всех t и в силу известных свойств оператора усреднения (3) [2] непрерывна по x почти при всех t. Так как $[f(t,x)]_h$ удовлетворяет условию *iii*)

$$|[f_i(t\,x)]_h|\leqslant(2h)^{-n}\int_{x-h}^{x+h}|f_i(t,y)|\,dy\leqslant M(t)\in L(0,T),\quad i=\overline{1,n}, \tag{4}$$

то $[f_i(t,x)]_h$ суммируемы по t при любом x и, значит, измеримы по t при любом x, т. е. удовлетворяют условию 1). Таким образом, $f[(t,x)]_h$ удовлетворяет всем условиям теоремы существования Каратеодори [1]. Итак, для любых $(t_0,x_0)\in G$ и $h>0$ существует функция $x^{(h)}(t)\in C(0,T)$, удовлетворяющая уравнению (2). Множество $\{x^{(h)}(t):h>0\}$ компактно в $C(0,T)$. Действительно, оно равномерно ограничено:

$$|x_i^{(h)}(t)|\leqslant|x_{0i}|+\int_0^T|[f_i(t,x^{(h)}(t))_h]|\,dt\leqslant|x_{0i}|+\int_0^T M(t)\,dt=|x_{0i}|+\|M(t)\|_{L(0,T)}$$

и равностепенно непрерывно

$$|x_i^{(h)}(t_1)-x_i^{(h)}(t_2)|\leqslant\int_{t_1}^{t_2}|[f_i(s,x^{(h)}(s))]_h|\,ds\leqslant\int_{t_1}^{t_2}M(s)\,ds.$$

Поэтому существует подпоследовательность $\{x^{(h_k)}(t)\}$, сходящаяся при $h_k\to0$ к пределу $x_*(t)\in C(0,T)$. Этот предел удовлетворяет (1).

Действительно, в силу известного свойства усреднения (3) [2] $[f(t,x)]_h\to f(t,x)$ в $L(E_n)$ почти при всех t, поэтому $[f(t,x)]_h\to f(t,x)$ почти при всех x и почти при всех t. Следовательно, $[f(t,x_*(t))]_h\to f(t,x_*(t))$ при $h_k\to0$ почти при всех t, за исключением случая, когда $x_*(t)\equiv\text{const}=x_0$ и эта постоянная принадлежит множеству точек расходимости последовательности $\{[f(t,x)]_h\}$. Но тогда из (2) следует, что $[f(t,x_0)]_h\to0$ при $h\to0$, а это противоречит предыдущему.

Из теоремы Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла следует с учетом оценки (4), что

$$x_*(t)=x_0+\lim_{h\to 0}\int_{t_0}^{t}[f(t,x_*(t))]_h dt=x_0+\int_{t_0}^{t}f(t,x_*(t))\,dt.$$

Литература

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1961.
2. Канторович Л. В. и Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1961.

Институт автоматизации проектирования РАН

Поступила в редакцию 22 февраля 1995 г.