A. M. Nakhushev, On the theory of fractional calculus, *Differ. Uravn.*, 1988, Volume 24, Number 2, 313–324

$$D_\beta^{(1)}(J_\mu) \geqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt \int_0^1 (1-z)^\beta \left(\frac{\partial J_\mu}{\partial r}\right)^2 dz \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} c_0^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt \int_{1-\delta}^{1} (1-z)^{(\beta+4\mu-3)-1} dz =$$

$$= \frac{\pi}{2} c_0^2 \int_{1-\delta}^{1} (1-z)^{(\beta+4\mu-3)-1} dz.$$

Последний интеграл сходится только в том случае, если $\beta > 3 - 4\mu$. Таким образом, $D_{3-4\mu}^{(1)}(J_\mu) = +\infty$ для граничной функции $f(y) = \cos y$. Но теперь из теорем вложения для весовых пространств следует, что все интегралы $D_{2,2m-4\mu+1}^{(m)}(J_\mu(x, f))$ для $f(y) = \cos y$ и подавно бесконечны. Мы установили неулучшаемость в классах $W_{2,\beta}^m(K)$ и второго условия.

Замечание. Доказанная теорема показывает на данном примере, как будет вести себя решение задачи Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения в зависимости от гладкости граничной функции. Эти вопросы сейчас интенсивно исследуются, но полной ясности здесь нет. В этой связи укажем на цикл работ П. И. Лизоркина и С. М. Никольского (см. [4] и имеющиеся там ссылки). Уравнение (8) для таких задач является в некотором смысле модельным. Мы видим, что имеет место существенное отличие от случая невырождающегося уравнения.

Литература

1. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. М., 1984.
2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., 1965. Т. 1.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1973.
4. Лизоркин П. И., Никольский С. М. // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1983. Т. 161. С. 157—183.

Московский инженерно-физический институт,
Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступила в редакцию 13 мая 1986 г.

УДК 517.956.6 : 517.23

А. М. НАХУШЕВ

К ТЕОРИИ ДРОБНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1. Определения дробного интегро-дифференцирования и их взаимосвязь. Пусть α — любое действительное число, $[\alpha]$ — целая часть α, $[\alpha] \leqslant \alpha < [\alpha]+1$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Оператор D_{ax}^α: $\varphi(t) \to D_{ax}^\alpha \varphi(x)$, где $\varphi(t) \in L[A, B]$,

$$D_{ax}^\alpha \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)} \displaystyle\int_a^x \dfrac{\varphi(t)\, dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ \varphi(x), \quad \alpha = 0, & \\ \operatorname{sign}(x-a) \dfrac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1} \varphi(x), & \alpha > 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

назовем оператором дробного (в смысле Римана—Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка $|\alpha|$ с началом в точке $a \in [A, B]$. При $\alpha < 0$ $D_{ax}^\alpha \varphi(x)$ представляет собой дробный интеграл порядка $-\alpha$, а при $\alpha > 0$ — дробную производную порядка α.

Отображение $\varphi(t)\to D^{\alpha}_{ax}\varphi(x)$ естественно называть интегральным или дифференциальным преобразованием Римана—Лиувилля в зависимости от того, если $\alpha<0$ или $\alpha>0$.

Интегральное преобразование Римана—Лиувилля можно переписать в виде

$$D^{\alpha}_{ax}\varphi(x)=\frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)}|x-a|^{-\alpha-1}\int_a^x\left(1-\frac{t-a}{x-a}\right)^{-\alpha-1}\varphi(t)\,dt=$$

$$=\frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)|x-a|^{\alpha+1}}\int_0^x F\left(\alpha+1,\ \beta,\ \beta,\ \frac{t-a}{x-a}\right)\varphi(t)\,dt,$$

где $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса [1].

Исходя из этого, можно ввести обобщенный дробный интеграл $D^{\alpha,\beta,\gamma}_{ax}\varphi(x)$ порядка $-\alpha$ с началом в точке a от функции $\varphi(t)$:

$$D^{\alpha,\beta,\gamma}_{ax}\varphi(x)=\frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)|x-a|^{\alpha+1}}\int_a^x F\left(\alpha+1,\ \beta,\ \gamma,\ \frac{t-a}{x-a}\right)\varphi(t)\,dt, \quad (1.2)$$

где $\alpha+\beta<\gamma\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$

Обобщенным интегральным преобразованием Римана — Лиувилля можно назвать (см. [2]) и преобразование вида

$$D^{\alpha,\beta,\gamma}_{cx,a}\varphi(x)=\frac{\operatorname{sign}(x-c)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(1-\beta)}|x-a|^{-\alpha-1}\times$$

$$\times\int_c^x F\left(\alpha+1,\ \gamma,\ 1-\beta,\ \left|\frac{t-a}{x-a}\right|^{\operatorname{sign}(x-c)}\right)\varphi(t)\,dt, \quad (1.3)$$

$$\alpha+\beta+\gamma<1,\ \alpha,\ \beta-1\neq 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad x,\ a,\ c\in[A,\ B].$$

Если $x>a$, то $D^{\alpha,\beta,\gamma}_{ax,a}\varphi(x)=D^{\alpha,\gamma,1-\beta}_{ax}\varphi(x)$.

Преобразование Эрдейи — Кобе $E^{\alpha,\beta}_{ax}$ определяется формулой [3]

$$E^{\alpha,\beta}_{ax}\varphi(x)=\frac{(x-a)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta}\varphi(t)\,dt, \quad (1.4)$$

$$x>a,\quad \alpha>0,\quad \beta>-1.$$

В силу (1.1) из (1.4) имеем

$$E^{\alpha,\beta}_{ax}\varphi(x)=(x-a)^{-\alpha-\beta}D^{-\alpha}_{ax}(x-a)^{\beta}\varphi(x)=$$

$$=\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}\left(1-\frac{x-t}{x-a}\right)^{\beta}\varphi(t)\,dt=$$

$$=\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}F\left(-\beta,\ \gamma,\ \gamma,\ \frac{x-t}{x-a}\right)\varphi(t)\,dt.$$

Поэтому разумно отображение

$$E^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}_{ax}\varphi(x)=\frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(\alpha)}|x-a|^{-\alpha}\times$$

$$\times\int_a^x|x-t|^{\alpha-1}F\left(-\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \frac{x-t}{x-a}\right)\varphi(t)\,dt, \quad (1.5)$$

$$\gamma-\beta-1<\delta\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$$

называть обобщенным преобразованием Эрдейи — Кобе.

В соответствии с (1.2) и отображение $\varphi(t)\to|x-a|^{-\alpha-\beta}D_{ax}^{-\alpha,\gamma,\delta}|x-a|^{\beta}\varphi(x)$ обобщает преобразование Эрдейи — Кобе.

Введем оператор $H_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}$, который действует на $\varphi(t)\in L[A,\ B]$, по формуле

$$H_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x)=\frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_a^x|x-t|^{\gamma-1}F\left(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \frac{x-t}{x-a}\right)\varphi(t)\,dt.$$

Исследованию свойств этого оператора при $a=0,\ 1,\ \infty$ посвящены работы [5, 6] (см. также [4]). Легко видеть, что

$$H_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x)=|x-a|^{\gamma}E_{ax}^{\gamma,-\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x). \tag{1.6}$$

Оператор $I_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}:\varphi(t)\to I_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x)$, где $\varphi(t)\in L[A,\ B]$, $\beta-\gamma<1$,

$$I_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x)=\frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(\alpha)\,|x-a|^{\alpha+\beta}}\int\limits_a^x|x-t|^{\alpha-1}\times$$

$$\times F\left(\alpha+\beta,\ -\gamma,\ \alpha,\ \frac{x-t}{x-a}\right)\varphi(t)\,dt,$$

назовем обобщенным оператором дробного (в смысле Саиго [3]) интегрирования порядка $\alpha>0$ с началом в точке $a\in[A,B]$. Из (1.5) и (1.6) следует, что

$$I_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x)=|x-a|^{-\alpha-\beta}H_{ax}^{\alpha+\beta,-\gamma,\alpha}\varphi(x)=$$

$$=|x-a|^{-\beta}E_{ax}^{\alpha,-\alpha-\beta,-\gamma,\alpha}\varphi(x).$$

Важную роль в теории дробного исчисления играет оператор

$$I_{ab}^{\alpha}\varphi(x)=(D_{ax}^{\alpha}-\operatorname{sign}\alpha\cdot D_{bx}^{\alpha})\,\varphi(x),\quad a<x<b, \tag{1.7}$$

который можно назвать оператором дробного интегро-дифференцирования порядка $|\alpha|$ с фиксированными началом и концом в точках a и $b\in[A,B]$.

Нетрудно видеть, что

$$I_{ab}^{\alpha}\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int\limits_a^b\frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, & \alpha<0,\\[2ex] \dfrac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}}I_{ab}^{\alpha-[\alpha]-1}\varphi(x), & \alpha>0,\end{cases} \tag{1.8}$$

$$\lim_{\alpha\to-0}I_{ab}^{\alpha}\varphi(x)=2\varphi(x)\quad\forall\ \varphi(t)\in C[a,\ b],$$

$$\lim_{\alpha\to+0}I_{ab}^{\alpha}\varphi(x)=0\quad\forall\ \varphi(t)\in C^1[a,\ b].$$

В справедливости последних двух равенств убеждаемся следующим образом:

$$\lim_{\alpha\to-0}I_{ab}^{\alpha}\varphi(x)=\lim_{\alpha\to-0}\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\left[\int\limits_a^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha+1}}+\int\limits_x^b\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha+1}}\right]=$$

$$=\lim_{\alpha\to-0}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left\{(x-a)^{-\alpha}\int\limits_0^1\varphi\left[x-(x-a)\,\xi^{-1/\alpha}\right]d\xi+\right.$$

$$\left.+(b-x)^{-\alpha}\int\limits_0^1\varphi\left[x+(b-x)\,\eta^{-1/\alpha}\right]d\eta\right\}=2\varphi(x),$$

$$\lim_{\alpha\to+0} I_{ab}^{\alpha}\varphi(x) = \lim_{\alpha\to+0}\frac{\partial}{\partial x}\int_a^b \frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{\alpha}} =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0}\frac{\partial}{\partial x}\int_{x-b}^{x-a}\varphi(x-\xi)\,|\xi|^{-\alpha}d\xi = \varphi(a)-\varphi(b)+$$

$$+\lim_{\alpha\to+0}\int_{x-b}^{x-a}|\xi|^{-\alpha}\varphi_x(x-\xi)\,d\xi = -\int_{x-b}^{x-a}\varphi_\xi(x-\xi)\,d\xi+\varphi(a)-\varphi(b)=0.$$

Напомним, что $\ln(1-z) = -zF(1,\,1,\,2,\,z)$, $|\arg(1-z)|<\pi$, и вычислим

$$\lim_{\alpha\to-0}\Gamma(-\alpha)\,D_{ax}^{\alpha;\,1,2}\varphi(x) = \operatorname{sign}(x-a)\times$$

$$\times\lim_{\alpha\to-0}|x-a|^{-\alpha-1}\int_a^x F(\alpha+1,\ 1,\ 2,\ (t-a)/(x-a))\,\varphi(t)\,dt =$$

$$= (x-a)^{-1}\int_a^x F(1,\ 1,\ 2,\ (t-a)/(x-a))\,\varphi(t)\,dt =$$

$$= -\int_a^x\frac{\varphi(t)}{t-a}\ln\left(1-\frac{t-a}{x-a}\right)dt.$$

Итак, установлено, что

$$\lim_{\alpha\to-0}\Gamma(-\alpha)\,D_{ax}^{\alpha;\,1,2}\varphi(x) = \int_a^x\ln\left(\frac{x-t}{x-a}\right)\frac{\varphi(t)}{a-t}\,dt. \qquad (1.9)$$

Отображение $\varphi(t)\to H_{ax}^0\varphi(x)$, где

$$H_{ax}^0\varphi(x) = \int_a^x\varphi(t)\ln|x-t|\,dt, \qquad (1.10)$$

назовем дробным интегралом бесконечно малого порядка с началом в точке $a\in[A,B]$ от функции $\varphi(t)\in L[A,B]$, а оператор

$$H_{ax}^1 = (\partial/\partial x)\,H_{ax}^0 \qquad (1.11)$$

— оператором Адамара.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 1.1 [7, с. 535]. *Пусть последовательность* $\{f_\varepsilon\}$, $1/\varepsilon=1,\,2,\,3,\,\ldots$, *непрерывно дифференцируемых на сегменте* $[a,b]$ *функций* $f_\varepsilon=f_\varepsilon(x)$ *сходится хотя бы в одной точке* $c\in[a,b]$, *а последовательность* $\{f'_\varepsilon\}$ *их производных* $f'_\varepsilon(x)$ *равномерно сходится на* $[a,b]$. *Тогда* $\{f_\varepsilon\}$ *равномерно сходится на* $[a,b]$, *ее предел — непрерывно дифференцируемая на этом сегменте функция и* $\lim\limits_{\varepsilon\to0}f'_\varepsilon(x)=\dfrac{d}{dx}\lim\limits_{\varepsilon\to0}f_\varepsilon(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$.

Докажем, что для любой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей на $[a,b]$ условию Гёльдера, справедливы равенства

$$H_{ax}^1\varphi(x) = \int_a^x\frac{\varphi(t)\,dt}{x-t}, \qquad (1.12)$$

$$\lim_{\alpha\to-0}\Gamma(-\alpha)\frac{\partial}{\partial x}D_{ax}^{\alpha;\,1,2}\varphi(x) = (a-x)^{-1}H_{ax}^1\varphi(x), \qquad (1.13)$$

где интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару [8]:

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{x-t} \equiv \left|\int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{x-t}\right. = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{x_\varepsilon} \frac{\varphi(t)\,dt}{x-t} + \right.$$

$$\left. + \varphi(x_\varepsilon)\ln\varepsilon\right], \quad x_\varepsilon = x + \varepsilon\,\mathrm{sign}\,(a-x). \tag{1.14}$$

В самом деле, из (1.10) на основании (1.11) и леммы 1.1 имеем

$$H_{ax}^1\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x} H_{ax}^0\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{x_\varepsilon} \varphi(t)\ln|x-t|\,dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\partial}{\partial x}\int_a^{x_\varepsilon}\varphi(t)\ln|x-t|\,dt = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\varphi(x_\varepsilon)\ln\varepsilon + \int_a^{x_\varepsilon}\frac{\varphi(t)\,dt}{x-t}\right].$$

Аналогично, исходя из (1.9), проверяется и (1.13). Условие Гёльдера гарантировало существование интеграла в смысле (1.14).

Пусть $\overset{\varkappa}{\mathrm{Lip}}\,[A,B]$ — множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих на $[A,B]$ условию Липшица ($0<\varkappa\leqslant 1$) или Гёльдера ($0<\varkappa<1$) порядка $\varkappa$. Для функции $\varphi(t)$ из класса $\overset{\varkappa}{\mathrm{Lip}}\,[A,B]$ интеграл (1.12) можно вычислить одним из следующих способов:

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{x-t} = \frac{\partial}{\partial x}\int_a^x \varphi(t)\ln|x-t|\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{[\varphi(x_\varepsilon)-\varphi(x)]\ln\varepsilon +$$

$$+\varphi(x)\ln|x-a| + \int_a^{x_\varepsilon}\frac{\varphi(t)-\varphi(x)}{x-t}\,dt\Big\} = \int_a^x \frac{\varphi(t)-\varphi(x)}{x-t}\,dt + \varphi(x)\ln|x-a|.$$

С оператором дробного интегро-дифференцирования существенно связаны сингулярные операторы вида

$$S_{ab}^\alpha\varphi(x) = \frac{\mathrm{sign}\,(b-a)}{\pi}\int_a^b \left|\frac{t-a}{x-a}\right|^\alpha \frac{\varphi(t)\,dt}{t-x},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Пусть $\dot{\Gamma} D_{ax}^{\alpha\to-1}\varphi(x) = \lim\limits_{\alpha\to-1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Gamma(-\alpha)\,D_{ax}^\alpha\,\varphi(x)$, $\dot{\Gamma} I_{ab}^{\alpha\to-1}\,\varphi(x) = \lim\limits_{\alpha\to-1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Gamma(-\alpha)\,I_{ab}^\alpha\,\varphi(x)$. В силу определения (1.1) получаем

$$\dot{\Gamma} D_{ax}^{\alpha\to-1}\varphi(x) = \mathrm{sign}\,(a-x)\lim_{\alpha\to-1}\int_a^x \frac{\varphi(t)\ln|x-t|}{|x-t|^{\alpha+1}}\,dt.$$

Стало быть,

$$\dot{\Gamma} D_{ax}^{\alpha\to-1}\,\varphi(x) = \mathrm{sign}\,(a-x)\,H_{ax}^0\,\varphi(x),\quad \dot{\Gamma} I_{ab}^{\alpha\to-1}\,\varphi(x) = -\int_a^b \varphi(t)\ln|x-t|\,dt.$$

Нетрудно заметить, что если функция $\varphi(t)/(t-x)$ интегрируема на сегменте $a\leqslant t\leqslant b$ в смысле (1.14), то

$$\frac{\partial}{\partial x}\dot{\Gamma} I_{ab}^{\alpha\to-1}\varphi(x) = H_{bx}^1\,\varphi(x) - H_{ax}^1\,\varphi(x), \tag{1.15}$$

если же $\varphi(t)\in\overset{\varkappa}{\mathrm{Lip}}\,[a,\ b]$, то

$$(H_{bx}^1 - H_{ax}^1)\,\varphi(x) = \pi S_{ab}^0\varphi(x). \tag{1.16}$$

Формулы (1.15), (1.16) широко используются в теории краевых задач для уравнений смешанного типа с оператором Лаврентьева—Бицадзе в главной части [9].

Рассмотрим обобщенные конечно-разностные отношения

$$\Delta_n^\alpha \varphi(x) = \delta_n^{-\alpha} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \varphi(x - k\delta_n),$$

где $\delta_n = (x-a)/n$, $\quad \binom{\alpha}{k} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)/k!$, $x > a$.

Если существует предел обобщенных конечно-разностных отношений $\Delta_n^\alpha \varphi(x)$ при $n \to \infty$, то этот предел назовем дробной или междупредельной по Летникову производной порядка $|\alpha|$ от функции $\varphi(t)$, взятой в пределах от a до x.

А. В. Летниковым установлено (см. [10, с. 521]), что если $\alpha < 0$ и $\varphi(t) \in L[a, x]$, то

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n^\alpha \varphi(x) = D_{ax}^\alpha \varphi(x); \tag{1.17}$$

если же $\alpha > 0$ и $\varphi(t) \in C^{[\alpha]}[a, x]$, $\varphi^{([\alpha]+1)}(t) \in L[a, x]$, то

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n^\alpha \varphi(x) = \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha} +$$

$$+ D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1} \varphi^{([\alpha]+1)}(x) = D_{ax}^\alpha \varphi(x). \tag{1.18}$$

Поскольку задача дифференцирования функции, заданной приближенно, является некорректной [11], то определение дробной производной по Летникову может быть успешно использовано при реализации на компьютерах задач дробного исчисления. В частности, выраженная формулой (1.17), (1.18) взаимосвязь определений дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля и Летникова весьма полезна при введении дискретного (разностного) аналога операций дробного дифференцирования и интегрирования.

2. Формула обращения дробного интеграла бесконечно малого порядка и обыкновенные непрерывные дифференциальные уравнения. Если придерживаться определения производной по Летникову, то задача обращения оператора $H_{ax}^\alpha \equiv D_{ax}^\alpha H_{ax}^0$ приводит к обыкновенным непрерывным (по терминологии Вольтерра [12, с. 100]) дифференциальным уравнениям. К таким уравнениям относится, например, уравнение

$$M_{ax}^{\alpha,\beta} y(x) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m(x) D_{ax}^{\alpha m} y(x) = f(x), \tag{2.1}$$

где $y(x)$ — неизвестная функция,

$$M_{ax}^{\alpha,\beta} y(x) = \int_\alpha^\beta a_\xi(x) D_{ax}^\xi y(x) d\xi. \tag{2.2}$$

Мандельброит [13] (см. также [12, с. 99]) показал, что функция $y(x)$, доставляющая экстремум величины (2.2), удовлетворяет уравнению вида (2.1).

С целью обращения оператора H_{ax}^0 и установления его связи с оператором $M_{ax}^{\alpha;\beta}$ рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра первого рода с логарифмическим ядром

$$H_{ax}^0 \varphi(x) = f(x), \quad a < x < b. \tag{2.3}$$

Справедлива следующая

Лемма 2.1. *Пусть* $\varphi(t)\in L[a, b]$ *и существует* $H_{ax}^{\alpha}\varphi(x)$. *Тогда если* $a_{\mu}=\exp(-\mu\Gamma'(1))$, *то*

$$-H_{ax}^{\alpha}\varphi(x)=\begin{cases} a_{-\alpha}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\,a_{\alpha}D_{ax}^{\alpha-1}\varphi(x), & \alpha<0,\\ a_{-\alpha}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\,a_{\alpha}\dfrac{\partial^{[\alpha]}}{\partial x^{[\alpha]}}\,D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1}\varphi(x), & \alpha>0. \end{cases}$$

Действительно, для всех $\mu<0$ имеем

$$D_{ax}^{\mu}H_{ax}^{0}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(-\mu)}\int_a^x\frac{dt}{(x-t)^{\mu+1}}\int_a^t\varphi(\xi)\ln(t-\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(-\mu)}\int_a^x\varphi(\xi)\,d\xi\int_{\xi}^{x}(x-t)^{-\mu-1}\ln(t-\xi)\,dt.$$

Во внутреннем интеграле произведем замену $t=\xi+(x-\xi)\eta$. В результате получим

$$H_{ax}^{\mu}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(-\mu)}\int_a^x(x-\xi)^{-\mu}\varphi(\xi)\,d\xi\int_0^1\frac{\ln\eta(x-\xi)}{(1-\eta)^{\mu+1}}\,d\eta.$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$\int_0^1\frac{\ln t\,dt}{(1-t)^{\mu+1}}=\lim_{\varepsilon\to1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_0^1 t^{\varepsilon-1}(1-t)^{-\mu-1}dt=\Gamma(-\mu)\lim_{\varepsilon\to1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\,\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon-\mu)}=$$

$$=\frac{\Gamma(-\mu)}{\Gamma(1-\mu)}\left[\Gamma'(1)-\frac{\Gamma'(1-\mu)}{\Gamma(1-\mu)}\right]\equiv-\frac{\gamma_{\mu}}{\mu},$$

с учетом равенства $\Gamma(1-\mu)=-\mu\Gamma(-\mu)$ находим

$$\int_0^1(1-\eta)^{-\mu-1}\ln\eta(x-\xi)\,d\eta=-[\ln(x-\xi)+\gamma_{\mu}]/\mu.$$

Но это говорит о том, что для любого $\mu<0$

$$H_{ax}^{\mu}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\int_a^x(x-\xi)^{-\mu}[\ln(x-\xi)+\gamma_{\mu}]\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{2.4}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\,a_{\mu}\frac{(x-\xi)^{-\mu}}{\Gamma(1-\mu)}=-\frac{(x-\xi)^{-\mu}}{\Gamma(1-\mu)}\,a_{\mu}[\ln(x-\xi)+\gamma_{\mu}],$$

то формулу (2.4) можно переписать в виде

$$H_{ax}^{\mu}\varphi(x)=-a_{-\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\,a_{\mu}D_{ax}^{\mu-1}\varphi(x). \tag{2.5}$$

Из (2.5) при $\mu=\alpha<0$ следует лемма 2.1.

Пусть теперь $\alpha>0$. Тогда из (1.1) и (2.5) имеем

$$H_{ax}^{\alpha}\varphi(x)=(\partial^{[\alpha]+1}/\partial x^{[\alpha]+1})\,H_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1}\varphi(x)=$$

$$=(\partial^{[\alpha]+1}/\partial x^{[\alpha]+1})\,a_{1+[\alpha]-\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\,a_{\alpha-[\alpha]-1}D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-2}\varphi(x)=$$

$$=-a_{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\,a_{\alpha}(\partial^{[\alpha]}/\partial x^{[\alpha]})\,D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1}\varphi(x),$$

что и требовалось доказать.

Пользуясь леммой 2.1 и тем, что постоянная Эйлера $-\Gamma'(1)>0$, легко видеть, что

$$-\int_{-\infty}^{1} a_\alpha H_{ax}^{\alpha}\varphi(x)\,d\alpha = a_\alpha D_{ax}^{\alpha-1}\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{1} = a_1\varphi(x).$$

Следовательно,

$$\varphi(x) = -\int_{-\infty}^{1} a_{\alpha-1}H_{ax}^{\alpha}\varphi(x)\,d\alpha = -\int_{-\infty}^{1} a_{\alpha-1}D_{ax}^{\alpha}H_{ax}^{0}\varphi(x)\,d\alpha. \tag{2.6}$$

Из (2.6) заключаем: если $f(t)\in L[a,b]\cap C^1[a,b]$, то единственное решение уравнения (2.3) задается формулой

$$\varphi(x) = -\int_{-\infty}^{1} a_{\xi-1}D_{ax}^{\xi}f(x)\,d\xi = -a_{-1}M_{ax}^{-\infty,1}f(x). \tag{2.7}$$

Известную (см. [14, с. 575]) в случае, когда $f(t)\in C^2[a,b]$, формулу обращения

$$\varphi(x) = \int_a^x f''(t)\,dt\int_0^\infty (x-t)^\nu \exp(\Gamma'(1)\nu)\,\Gamma^{-1}(\nu+1)\,d\nu -$$

$$-f'(a)\int_0^\infty x^\nu \exp(\Gamma'(1)\nu)\,\Gamma^{-1}(\nu+1)\,d\nu$$

уравнения (замкнутого цикла) (2.3) нетрудно получить из (2.7).

Рассмотрим теперь уравнение

$$\boxed{\int_a^x \frac{\varphi(t)}{x-t}\,dt} = f(x),\quad a<x<b, \tag{2.8}$$

с правой частью $f(x)\in \overset{\varkappa}{\mathrm{Lip}}[a,b]$.

В классе функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих на сегменте $a\leqslant t\leqslant x$ условию Гёльдера, уравнение (2.8) эквивалентно уравнению $H_{ax}^{0}\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$.

Поэтому на основании (2.7) можно утверждать, что единственное решение $\varphi(x)$ уравнения (2.8) задается формулой

$$\varphi(x) = -M_{ax}^{-\infty,0}f(x) \equiv -\int_{-\infty}^{1} a_{\xi-1}D_{ax}^{\xi}\int_a^x f(t)\,dt d\xi = -\int_{-\infty}^{0} a_\alpha D_{ax}^{\alpha}f(x)\,d\alpha.$$

3. Правила композиции операторов дробного интегро-дифференцирования с различными началами. Закон композиции $D_{ax}^{\alpha}D_{ax}^{\beta}=D_{ax}^{\alpha+\beta}$ операторов дробного интегрирования порядка $\alpha<0$ и $\beta<0$ с началом в одной и той же точке $a\in[A,B]$ допускает следующее обобщение.

Лемма 3.1. *Пусть* $\varphi(t)\in L[a,b]\cap C]a,b[$. *Тогда для любых* $\alpha<0$, $\beta<0$ *и* $x\in]a,b[$

$$D_{ax}^{\alpha}D_{bx}^{\beta}\varphi(x) = D_{ax,a}^{\alpha,\beta,1}(x-a)^{-\beta}\varphi(x) + (x-a)^{\beta-\alpha+1}D_{bx,a}^{\beta,\alpha,1}(x-a)^{-\beta-1}\varphi(x).$$

Доказательство начнем с очевидных равенств

$$\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)D_{ax}^{\alpha}D_{bx}^{\beta}\varphi(x) = \int_a^x (x-\xi)^{-\alpha-1}d\xi\left[\int_\xi^x + \int_x^b\right]\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-\xi)^{\beta+1}} =$$

$$= \int_a^x \varphi(t)\,dt\int_a^t \frac{(x-\xi)^{-\alpha-1}}{(t-\xi)^{\beta+1}}\,d\xi + \int_x^b \varphi(t)\,dt\int_a^x (x-\xi)^{-\alpha-1}(t-\xi)^{-\beta-1}d\xi. \tag{3.1}$$

В первом и втором внутренних интегралах произведем замену $\xi=a+(t-a)\eta$ и $\xi=a+(x-a)\eta$ соответственно. В результате получим, что правая часть (3.1) равна

$$\int_a^x \frac{(t-a)^{-\beta}\varphi(t)}{(x-a)^{\alpha+1}}\,dt\int_0^1 (1-\eta)^{-\beta-1}\left(1-\frac{t-a}{x-a}\eta\right)^{-\alpha-1}d\eta+$$

$$+\int_x^b \frac{(t-a)^{-\beta-1}}{(x-a)^{\alpha}}\varphi(t)\,dt\int_0^1 (1-\eta)^{-\alpha-1}\left(1-\frac{x-a}{t-a}\eta\right)^{-\beta-1}d\eta=$$

$$=\frac{\Gamma(-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}(x-a)^{-\alpha-1}\int_a^x (t-a)^{-\beta}F\left(\alpha+1,\ 1,\ 1-\beta,\ \frac{t-a}{x-a}\right)\varphi(t)\,dt+$$

$$+\frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}\int_x^b (t-a)^{-\beta-1}F\left(\beta+1,\ 1,\ 1-\alpha,\frac{x-a}{t-a}\right)\varphi(t)\,dt,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3.1. *Пусть* $\varphi(t)\in L[a,b]\cap C]a,b[$. *Тогда* *) *для любых* $\alpha<0$, $\beta<0$, *удовлетворяющих условию* $\alpha+\beta<-1$:

$$\frac{\partial}{\partial x}D^{\alpha}_{ax}D^{\beta}_{bx}\varphi(x)=D^{\alpha+1,\beta,1}_{ax,a}(x-a)^{-\beta}\varphi(x)+(x-a)^{\beta-\alpha}D^{\beta,\alpha+1,1}_{bx,a}(x-a)^{-\beta-1}\varphi(x). \tag{3.2}$$

Хорошо известно [1, 15], что

$$\frac{\partial}{\partial z}z^{a}F(a,\ b,\ c,\ z)=az^{\alpha-1}F(a+1,\ b,\ c,\ z),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}z^{c-1}F(a,\ b,\ c,\ z)=(c-1)z^{c-2}F(a,\ b,\ c-1,\ z),$$

$$\lim_{z\to 1-0}F(a,\ b,\ c,\ z)=\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)/[\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)],$$

если $\operatorname{Re}(c-a-b)>0$.

Опираясь на эти свойства гипергеометрической функции, нетрудно убедиться в достоверности следующих вычислений:

$$\Gamma(-\alpha)\Gamma(1-\beta)\frac{\partial}{\partial x}D^{\alpha,\beta,1}_{ax,a}(x-a)^{-\beta}\varphi(x)=$$

$$=(x-a)^{-\alpha-\beta-1}F(\alpha+1,\ 1,\ 1-\beta,\ 1)\varphi(x)+$$

$$+\int_a^x (t-a)^{-\alpha-\beta-1}\varphi(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\alpha+1}F\left(\alpha+1,\ 1,\ 1-\beta,\ \frac{t-a}{x-a}\right)dt=$$

$$=F(\alpha+1,\ 1,\ 1-\beta,\ 1)\varphi(x)(x-a)^{-\alpha-\beta-1}-$$

$$-(\alpha+1)\int_a^x\frac{\varphi(t)(t-a)^{-\beta}}{(x-a)^{\alpha+2}}F\left(\alpha+2,\ 1,\ 1-\beta,\ \frac{t-a}{x-a}\right)dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}D^{\alpha,\beta,1}_{ax,a}(x-a)^{-\beta}\varphi(x)=$$

$$=-\frac{\varphi(x)(x-a)^{-\alpha-\beta-1}}{(\alpha+\beta+1)\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}+D^{\alpha+1,\beta,1}_{ax,a}(x-a)^{-\beta}\varphi(x), \tag{3.3}$$

$$\Gamma(1-\alpha)\Gamma(-\beta)\frac{\partial}{\partial x}(x-a)^{1-\alpha+\beta}D^{\beta,\alpha,1}_{bx,a}(x-a)^{-\beta-1}\varphi(x)=$$

*) В [2, с. 159] коэффициент $\Gamma(\beta+1)/\Gamma(-\beta)$ лишний.

$$= -(x-a)^{-\alpha-\beta-1} F(\beta+1,\ 1,\ 1-\alpha,\ 1)\,\varphi(x) +$$

$$+ \int_x^b (t-a)^{-\alpha-\beta-1} \varphi(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{-\alpha} F\left(\beta+1,\ 1,\ 1-\alpha,\ \frac{x-a}{t-a}\right) dt =$$

$$= -(x-a)^{-\alpha-\beta-1} F(\beta+1,\ 1,\ 1-\alpha,\ 1)\,\varphi(x) -$$

$$-\alpha (x-a)^{-\alpha-1} \int_x^b F\left(\beta+1,\ 1,\ -\alpha,\ \frac{x-a}{t-a}\right)(t-a)^{-\beta-1}\varphi(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (x-a)^{1-\alpha+\beta} D_{bx,a}^{\beta,\alpha,1} (x-a)^{-\beta-1}\varphi(x) = \tag{3.4}$$

$$= \frac{\varphi(x)(x-a)^{-\alpha-\beta-1}}{(\alpha+\beta+1)\,\Gamma(-\alpha)\,\Gamma(-\beta)} + (x-a)^{\beta-\alpha} D_{bx,a}^{\beta,\alpha+1,1} (x-a)^{-\beta-1}\varphi(x).$$

Правило композиции (3.2) вытекает из леммы 3.1 и равенств (3.3), (3.4).

Теорема 3.2. *Если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера и интегрируема на $]a, b[$, то для всех $\alpha \in]0, 1[$*

$$D_{ax}^{\alpha} D_{bx}^{-\alpha} \varphi(x) = \cos \pi\alpha \varphi(x) + \sin \pi\alpha S_{ab}^{\alpha} \varphi(x). \tag{3.5}$$

Достоверность закона композиции (3.5) нетрудно усмотреть из следующих истинных в силу лемм 1.1, 3.1 равенств:

$$D_{ax}^{\alpha} D_{bx}^{-\alpha} \varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x} D_{ax}^{\alpha-1} D_{bx}^{-\alpha} \varphi(x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\partial}{\partial x} [D_{ax-\varepsilon,a}^{\alpha-1,-\alpha,1} (x-a)^{\alpha} + (x-a)^{2-2\alpha} D_{bx+\varepsilon,a}^{-\alpha,\alpha-1,1} (x-a)^{\alpha-1}]\, \varphi(x).$$

Поскольку для любого $\alpha \in]0, 1[$ $D_{ax}^{\alpha} D_{ax}^{-\alpha} \varphi(x) = \varphi(x)$, то из (3.5) получаем формулу для дробной производной потенциала со степенным ядром

$$D_{ax}^{\alpha} I_{ab}^{-\alpha} \varphi(x) = 2\cos^2 \frac{\pi\alpha}{2} \varphi(x) + \sin \pi\alpha S_{ab}^{\alpha} \varphi(x). \tag{3.6}$$

При $a = 0$, $b = 1$, $\varphi(x) \equiv \nu(x)$, $\alpha = 2/(m+2)$, $m = 1, 2, \dots,$ из (3.6) имеем

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 \left[\int_0^x |\xi - y|^{-m/(m+2)} (x-\xi)^{-2/(m+2)}\right] \nu(y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y}{x}\right)^{2/(m+2)} \frac{\nu(y)\,dy}{y-x} + \pi \operatorname{tg} \frac{\pi m}{2m+4} \nu(x). \tag{3.7}$$

Формула (3.7), устанавливающая связь интеграла Коши с интегралами Римана—Лиувилля, впервые получена Трикоми [15, гл. VI, § 7] в случае, когда $m=1$, и Геллерстедтом [17] в общем случае; и она играет важную роль при доказательстве существования решения задачи Трикоми для уравнений смешанного типа с оператором $y^m \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ в главной части. Легко увидеть, что при выводе формулы (3.7) Геллерстедт [17, с. 71—73] нигде не пользуется тем, что m нечетно. Ему достаточно, чтобы положительное число $\beta = m/(2m+4) < 1/2$.

Пусть соблюдены условия теоремы 3.2. Тогда из (3.6) и равенства $D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^{\alpha} \varphi(x) = \varphi(x)$ имеем [18, 19]

$$D_{bx}^{-\alpha} \varphi(x) = \cos \pi\alpha D_{ax}^{-\alpha} \varphi(x) + \sin \pi\alpha D_{ax}^{-\alpha} S_{ax}^{\alpha} \varphi(x).$$

Лемма 3.2. *Пусть* $(x-a)^{-\alpha}\varphi(x)\in L[a,\ b]$, $D_{bx}^{\alpha}\varphi(x)\in C[a,\ b[$. *Тогда для любых* $\alpha\in]0,\ 1[$ *и* $x\in]a,\ b[$

$$D_{ax}^{-\alpha}D_{bx}^{\alpha}\varphi(x)=\sin\pi\alpha R_{ab}^{-\alpha}\varphi(x)-D_{ax}^{1-\alpha}D_{bx}^{\alpha-1}\varphi(x), \tag{3.8}$$

$$R_{ab}^{-\alpha}\varphi(x)=(S_{ab}^{1-\alpha}-S_{ab}^{-\alpha})\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_a^b\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\alpha}\frac{\varphi(t)\,dt}{x-a}. \tag{3.9}$$

Лемма 3.2 вытекает из равенств $\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)=\pi/\sin\pi\alpha$,

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[D_{ax-\varepsilon}^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial x}D_{bx}^{\alpha-1}+\frac{\partial}{\partial x}D_{ax-\varepsilon}^{-\alpha}D_{bx}^{\alpha-1}-\sin\pi\alpha R_{ab}^{-\alpha}\right]\varphi(x)=0.$$

Теорема 3.3 *Пусть* $\varphi(x)\in\overset{\varkappa}{\mathrm{Lip}}]a,\ b[$, $(x-a)^{-\alpha}\varphi(x)$ *и* $I_{ab}^{\alpha}\varphi(x)\in L[a,\ b]$. *Тогда для любого* $\alpha\in]0,\ 1[$

$$D_{ax}^{-\alpha}I_{ab}^{\alpha}\varphi(x)=2\sin\frac{\pi\alpha}{2}\varphi(x)+\sin\pi\alpha S_{ab}^{-\alpha}\varphi(x). \tag{3.10}$$

Формула (3.10) следует из (3.5), (3.8) и (3.9):

$$D_{ax}^{-\alpha}I_{ab}^{\alpha}\varphi(x)=(D_{ax}^{-\alpha}D_{ax}^{\alpha}-D_{ax}^{-\alpha}D_{bx}^{\alpha})\varphi(x)=\varphi(x)+D_{ax}^{1-\alpha}D_{bx}^{\alpha-1}\varphi(x)-$$

$$-\sin\pi\alpha R_{ab}^{-\alpha}\varphi(x)=[1+\cos(1-\alpha)\pi]\varphi(x)+\sin(1-\alpha)\pi S_{ab}^{1-\alpha}\varphi(x)-$$

$$-\sin\pi\alpha R_{ab}^{-\alpha}\varphi(x)=2\sin^2(\pi\alpha/2)\varphi(x)+$$

$$+\sin\pi\alpha(S_{ab}^{-\alpha}+R_{ab}^{-\alpha})\varphi(x)-\sin\pi\alpha R_{ab}^{-\alpha}\varphi(x).$$

Пусть функция $\psi(x)$ такова, что $\varphi(x)\equiv D_{bx}^{-\alpha}\psi(x)\in\overset{\varkappa}{\mathrm{Lip}}]a,\ b[$, $(x-a)^{-\alpha}\varphi(x)$ и $I_{ab}^{\alpha}\varphi(x)\in L[a,\ b]$. Тогда

$$D_{ax}^{-\alpha}\psi(x)=\cos\pi\alpha D_{bx}^{-\alpha}\psi(x)-\sin\pi\alpha S_{ab}^{-\alpha}D_{bx}^{-\alpha}\psi(x). \tag{3.11}$$

Действительно, согласно теореме 3.3, имеем $D_{ax}^{-\alpha}I_{ab}^{\alpha}D_{bx}^{-\alpha}\psi(x)=$ $=D_{ax}^{-\alpha}(D_{ax}^{\alpha}-D_{bx}^{\alpha})D_{bx}^{-\alpha}\psi(x)=(D_{bx}^{-\alpha}-D_{ax}^{-\alpha})\psi(x)=2\sin^2(\pi\alpha/2)D_{bx}^{-\alpha}\psi(x)+$ $+\sin\pi\alpha S_{ab}^{-\alpha}D_{bx}^{-\alpha}\psi(x)$.

Формула (3.11) в случае, когда $D_{bx}^{-\alpha}\psi(x)=(x-a)^{-\alpha_1}(b-x)^{-\beta_1}\psi_0(x)$, $\alpha_1,\ \beta_1\in[0,\ 1-\alpha]$, $\psi_0(x)\in\overset{\varkappa}{\mathrm{Lip}}[a,\ b]$, другим методом получена в [20].

Теорема 3.4. *Пусть суммируемая на* $[a,\ b]$ *функция* $\varphi(t)\in\overset{\varkappa}{\mathrm{Lip}}]a,\ c[$ *при* $c>x$, $\varphi(t)\in\overset{\varkappa}{\mathrm{Lip}}]c,\ b[$ *при* $x>c$. *Тогда для всех* $x\neq a,\ b,\ c$

$$D_{cx}^{\alpha}I_{ab}^{-\alpha}\varphi(x)=[2\cos^2(\pi\alpha/2)+\mathrm{sign}(x-c)\sin\pi\alpha(S_{ca}^{\alpha}+S_{cb}^{\alpha})]\varphi(x).$$

Эта формула, которая весьма полезна при решении задачи Геллерстедта [17], является следствием (3.6) и равенств

$$D_{cx}^{\alpha}I_{ac}^{-\alpha}\varphi(x)=[1-\mathrm{sign}(x-c)]\cos^2(\pi\alpha/2)\varphi(x)+\mathrm{sign}(x-c)S_{ac}^{\alpha}\varphi(x),$$

$$D_{cx}^{\alpha}I_{ac}^{-\alpha}\varphi(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int\limits_a^c\varphi(\eta)\,d\eta\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_c^x\left(\frac{\xi-\eta}{x-\xi}\right)^{\alpha}\frac{d\xi}{\xi-\eta}=$$

$$=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int\limits_a^c\varphi(\eta)\,d\eta\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^{(x-c)/(c-\eta)}t^{-\alpha}(1+t)^{-1}dt=\sin\pi\alpha S_{ca}^{\alpha}\varphi(x),\ x>c,$$

$$D_{cx}^{\alpha}I_{ac}^{-\alpha}\varphi(x)=D_{ay}^{\alpha}I_{ac}^{-\alpha}\varphi(a+c-y),\ y=a+c-x>a,$$

$$D_{cx}^{\alpha}I_{cb}^{-\alpha}\varphi(x)=D_{bz}^{\alpha}I_{cb}^{-\alpha}\varphi(b+c-z)=-\sin\pi\alpha S_{cb}^{\alpha}\varphi(x),\ z=b+c-x>b.$$

Автор выражает искреннюю благодарность М. С. Салахитдинову, соавтору леммы 3.1 и теоремы 3.1, за обсуждение результатов работы.

Литература

1. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.; Л., 1963.
2. Нахушев А. М., Салахитдинов М. С. // Нелокальные задачи для уравнений в частных производных и их приложения к моделированию и автоматизации проектирования сложных систем. Нальчик, 1986. С. 158—159.
3. Saigo M. // Math. Japon. 1979. Vol. 24, N 1. P. 377—385.
4. Love E. R. // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1967. Vol. 15, N 3. P. 169—198.
5. Higgins T. P. // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1963. Vol. 11, N 6. P. 886—893.
6. Wimp Jet. // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1965. Vol. 7, N 3. P. 42—44.
7. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. М., 1970.
8. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., 1978.
9. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
10. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1951.
11. Самарский А. А. Введение в численные методы. М., 1982.
12. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М., 1982.
13. Mandelbrojt S. // Rend. R. Accad. dei Lincei. 1925. Vol. 1, N 6. P. 151—156.
14. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. М., 1965.
15. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., 1957.
16. Tricomi F. Sulle equazioni lineari alle derivate pazziali di 2° ordine di tipo misto. // Mem. Lincei. 1923. Ser. 5, 14. Fasc. 7.
17. Gellerstedt S. Sur un probléme aux limites pour une éguation lineaire aux dériveés partielles du second ordre type mixte: Thés pour le doctorat. 1935.
18. Самко С. Г. // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 2. С. 298—314.
19. Рубин Б. С. // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 26, № 5. С. 917—927.
20. Wolfersdorf L. // Math. Zeit. 1965. Vol. 90, N 1. P. 24—28.

Кабардино-Балкарский государственный университет

Поступила в редакцию 16 апреля 1987 г.

УДК 517.956

ХОАНГ ДИНЬ ЗУНГ

О ФОРМУЛАХ ОБРАЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЕКОТОРЫХ p-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИИ

Настоящая работа является продолжением статьи [1]. В ней даны формулы обращения интегральных представлений решения некоторых систем эллиптических уравнений с переменными коэффициентами и их применение к решению краевых задач теории фильтрации в неоднородной среде.

А. ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ

§ 1. ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $e^{\lambda y}\, y^k$ - АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть G — произвольная односвязная область комплексной плоскости $z=x+iy$, $I_\nu(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента порядка ν, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ — произвольная аналитическая в G функция. Тогда, согласно работе [1], функция $F(z)=U(x,y)+iV(x,y)$, определенная формулой

$$e^{\lambda y/2}\, y^k\,[U(x,\ y)+C_1]+ie^{-\lambda y/2}\,[V(x,\ y)+C_2]=\int\limits_{\bar z}^{z}[(z-t)(\bar z-t)]^{k/4}\times$$
$$\times I_{k/2}\left[\frac{\lambda}{2}\sqrt{(t-z)(\bar z-t)}\right]f(t)\,dt-\int\limits_{\bar z}^{z}(\bar z-t)^{1/2}(z-t)^{-1/2}\times$$
$$\times[(z-t)(\bar z-t)]^{k/4}\, I_{k/2-1}\left[\frac{\lambda}{2}\sqrt{(t-z)(\bar z-t)}\right]f(t)\,dt, \qquad (1)$$