В. В. Васин, Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов,
Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, том 19, номер 1, 11–21

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 19 Январь 1979 Февраль № 1

УДК 519:517.988.8

ДИСКРЕТНАЯ СХОДИМОСТЬ И КОНЕЧНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕГУЛЯРИЗУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ

В. В. ВАСИН

(Свердловск)

Для линейного операторного уравнения I рода $Au=f$ исследуется сходимость общей схемы конечномерной аппроксимации (дискретизации) регуляризованного (по А. Н. Тихонову) семейства приближенных решений и приложение этой схемы к проекционным и квадратурным методам.

§ 1. Введение

Рассмотрим линейное операторное уравнение I рода

(1.1) $\bar{A}u=\bar{f}$

в линейных нормированных пространствах, где при заданных $\bar{A}$ и $\bar{f}\in F$ элемент $u\in U$ является искомым. Предположим, что исходная задача неустойчива (некорректно поставлена), т. е. оператор либо необратим, либо обратный к нему $\bar{A}^{-1}$ не ограничен. При численном решении корректно поставленной задачи ($\|\bar{A}^{-1}\|<\infty$) обычно переходят к некоторому ее дискретному аналогу

(1.2) $\bar{A}_n u_n=\bar{f}_n$

и решение u_n этого «приближенного» уравнения принимается за приближенное решение уравнения (1.1) (см. [1-4]). Если задача (1.1) некорректно поставлена, то такой подход, вообще говоря, нельзя использовать, поскольку решение u_n неустойчиво к возмущениям оператора и правой части. В этом случае устойчивое приближенное решение можно получить на основе метода регуляризации [5].

В работе предлагается следующая схема решения задачи, включающая два этапа:

1) построение регуляризующего алгоритма (регуляризация задачи);

2) конечномерная аппроксимация регуляризующего алгоритма (дискретизация регуляризованной задачи).

На первом этапе задача регуляризуется методом А. Н. Тихонова.

Приведем известный результат о сходимости регуляризованного семейства приближенных решений в этом методе.

Пусть $\{A,f\}$ — некоторые приближенные данные задачи (1.1), аппроксимирующие точные данные $\{\bar{A},\bar{f}\}$:

(1.3) $\|\bar{A}-A\|\leqslant h,\qquad \|\bar{f}-f\|\leqslant\delta,\qquad \Delta=(h,\delta).$

Пусть пространство U обладает свойством Ефимова — Стечкина и строго выпукло, а F рефлексивно. Обозначим через $u(\alpha, \Delta)$ экстремальный элемент параметрической вариационной задачи

$$(1.4) \qquad \inf\{\|Au-f\|^2+\alpha\|u\|^2 : u\in U\}=d$$

при заданных $\Delta\geqslant 0$ и $\alpha>0$.

Теорема 1. *Для любого линейного замкнутого оператора A и элемента $f\in F$, удовлетворяющих соотношениям* (1.3), *задача* (1.4) *разрешима единственным образом и последовательность экстремальных элементов $u(\alpha, \Delta)$ сходится к единственному решению $\bar{u}$ с минимальной нормой уравнения* (1.1), *т. е.* $\|u(\alpha,\Delta)-\bar{u}\|\to 0$, *где* $\inf\{\|u\| : \bar{A}u=\bar{f}\}=\|\bar{u}\|$, *при* $\Delta\to 0$, $\alpha(\Delta)\to 0$ *и* $(\delta+h)^2/\alpha(\Delta)\to 0$.

На втором этапе осуществляется аппроксимация задачи (1.4) последовательностью конечномерных задач

$$(1.5) \qquad \inf\{\|A_nu_n-f_n\|^2+\alpha\|u_n\|^2 : u_n\in U_n\}=d_n,$$

где A_n, f_n, U_n — конечномерные приближения исходных объектов A, f, U. В терминах дискретной аппроксимации (см. § 2) устанавливается сходимость конечномерных приближений $u_n(\alpha, \Delta)$, т. е. экстремальных элементов задачи (1.5) к $u(\alpha, \Delta)$ (§ 3). Ввиду теоремы 1 тем самым достигается (дискретная) аппроксимация решения уравнения (1.1). Из основной теоремы 2, в частности, вытекают известные результаты о сходимости проекционных (§ 4) и квадратурных (§ 6) (для интегральных уравнений) методов дискретизации регуляризованной задачи [5–13]. В § 5 обсуждаются возможные обобщения теоремы 2 на более широкий класс пространств и операторов.

Заметим, что основной результат (теорему 2) можно интерпретировать как обоснование сходимости дискретных алгоритмов в обобщенном методе наименьших квадратов.

§ 2. Дискретная сходимость элементов и операторов

Приведем необходимые сведения, относящиеся к дискретной аппроксимации, принимая за основу схему, изложенную в [2–4].

Пусть даны банаховы пространства U, U_n, $n=1, 2, \ldots$, где U_n не обязаны быть подпространствами U, и семейство $\mathscr{P}=\{p_n\}$ операторов $p_n : U\to U_n$, удовлетворяющих условиям (см. [2, 3])

$$(2.1) \qquad \|p_nu\|_{U_n}\to\|u\|_U, \qquad n\to\infty \quad \forall u\in U,$$

$$(2.2) \qquad \|p_n(au+a'u')-ap_nu-a'p_nu'\|_{U_n}\to 0,\ n\to\infty\ \forall u, u'\in U$$
$$\text{и } \forall a, a'=\text{const}.$$

Определение 1. Операторы p_n, обладающие свойствами (2.1) и (2.2), называются связывающими (см. [2]).

Определение 2. Последовательность пространств $\{U_n\}$ образует дискретную аппроксимацию пространства U, если существует семейство связывающих операторов $\mathscr{P}=\{p_n\}$ (см. [3]).

Определение 3. Последовательность $\{u_n\}$, где $u_n \in U_n$, дискретно сходится (или $\mathscr{P}$-сходится) к $u \in U$, если

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - p_n u\|_{U_n} = 0$$

(см. [2, 3]). Для дискретной сходимости примем обозначение $u_n \to u$.

Непосредственно из определения 3 следует, что для дискретной сходимости выполнены основные свойства обычной сходимости:

единственность предела:

$$(2.3) \qquad u_n \to u, \qquad u_n \to u' \Rightarrow u = u'$$

(здесь и далее при предельном переходе индекс n пробегает натуральный ряд или его бесконечное подмножество, т. е. $n \to \infty$);

сходимость подпоследовательности:

$$(2.4) \qquad u_n \to u \Rightarrow u_{n_k} \to u \text{ для } \{n_k\} \subseteq \{n\};$$

линейность предельного перехода

$$(2.5) \qquad u_n \to u, \ u_n' \to u' \Rightarrow a u_n + a' u_n' \to a u + a' u',$$

где $a, a' = \text{const}$;

$$(2.6) \qquad u_n \to \theta \Leftrightarrow \|u_n\| \to 0,$$

где θ — нулевой элемент пространства U (для упрощения записи в дальнейшем используется единое обозначение для нормы $\|\cdot\|$ вместо $\|\cdot\|_U$, $\|\cdot\|_{U_n}$ и т. д.);

согласованность норм:

$$(2.7) \qquad u_n \to u \Rightarrow \|u_n\| \to \|u\|;$$

$$(2.8) \qquad p_n u \to u \qquad \forall u \in U.$$

Пусть последовательность пространств $\{F_n\}$ образует дискретную аппроксимацию пространства F и семейство $Q = \{q_n\}$ операторов $q_n : F \to F_n$ удовлетворяет условиям (2.1), (2.2).

Определение 4. Последовательность $\{A_n\}$ операторов $A_n : U_n \to F_n$ дискретно сходится (или $\mathscr{P}\mathscr{Q}$-сходится) к A, если для любой дискретно сходящейся последовательности $\{u_n\}$ имеет место соотношение (см. [2, 3])

$$u_n \to u \Rightarrow A_n u_n \to A u.$$

Определение 5. Последовательность $\{g_n\}$ линейных функционалов $g_n \in U_n^*$ дискретно слабо сходится (или слабо $\mathscr{P}$-сходится) к $g \in U^*$, если (см. [2, 3])

$$u_n \to u \Rightarrow g_n(u_n) \to g(u);$$

обозначаем это так: $g_n \rightharpoonup g$.

Отметим, что дискретная слабая сходимость удовлетворяет (2.3)—(2.6), а аналогом (2.7) является

$$(2.9) \qquad g_n \rightharpoonup g \Rightarrow \|g\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|g_n\|.$$

В случае гильбертовых пространств можно рассматривать для последовательностей элементов как дискретную сходимость, так и дискретную слабую сходимость, поскольку можно отождествить $U=U^*$ и $U_n=U_n^*$. Эти понятия связаны соотношением (см. [2], стр. 28)

$$(2.10)\qquad u_n\to u \Leftrightarrow u_n \rightharpoonup u, \qquad \|u_n\|\to\|u\|.$$

Определение 6. Пара A, (A_n) называется дискретно слабо замкнутой, если выполнено соотношение (см. [4])

$$u_n \rightharpoonup u, \qquad A_n u_n \rightharpoonup f \Rightarrow u\in D(A), \qquad Au=f.$$

§ 3. Дискретная аппроксимация в методе регуляризации Тихонова

Будем считать, что выполнены следующие условия.

Условие 1. U, U_n, F, F_n — гильбертовы пространства, причем U, F сепарабельны.

Условие 2. Последовательность пространств $\{U_n\}$ ($\{F_n\}$) образует дискретную аппроксимацию пространства U (F).

Условие 3. Последовательность линейных ограниченных операторов A_n: $U_n\to F$ дискретно сходится к A: $U\to F$.

Условие 4. Пара A, (A_n) дискретно слабо замкнута.

Условие 5. $f_n\to f$, т. е. дискретно сходится.

Теорема 2. *Если выполнены условия* 1—5, *то задача* (1.5) *имеет единственное решение* $u_n(\alpha, \Delta)$ *и* $u_n(\alpha, \Delta)\to u(\alpha, \Delta)$.

Доказательство. Поскольку A_n — линейный ограниченный оператор, а U_n гильбертово, то разрешимость задачи (1.5) устанавливается стандартным способом. Единственность решения вытекает из строгой выпуклости функционала

$$\Phi_n[u_n]=\|A_n u_n-f_n\|^2+\alpha\|u_n\|^2.$$

Вполне очевидны следующие неравенства при $\alpha>0$:

$$\|u_n(\alpha, \Delta)\|^2\leqslant\frac{d_n}{\alpha}\leqslant\frac{1}{\alpha}\Phi_n[p_n u(\alpha, \Delta)]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\alpha}\{[\|A_n\|\|p_n u(\alpha, \Delta)\|+\|f_n\|]^2+\alpha\|p_n u(\alpha, \Delta)\|^2\}.$$

Так как $f_n\to f$, то, по (2.7), $\|f_n\|\to\|f\|$, откуда $\|f_n\|\leqslant c_1$; по той же причине (см. (2.8)) $\|p_n u(\alpha, \Delta)\|\leqslant c_2$. По условию 3, последовательность $A_n\to A$, поэтому $\|A_n\|\leqslant c_3$ (см. [3], стр. 52—53). Окончательно $\|u_n(\alpha, \Delta)\|\leqslant c$, где c — константа, не зависящая от n.

Докажем справедливость соотношения

$$(3.1)\qquad \limsup_{n\to\infty} d_n\leqslant d.$$

Принимая во внимание дискретную сходимость $p_n u(\alpha, \Delta)\to u(\alpha, \Delta)$ и условие 3, имеем

$$A_n p_n u(\alpha, \Delta)\to Au(\alpha, \Delta);$$

так как $f_n \to f$, то с учетом (2.5)

$$A_n p_n u(\alpha, \Delta) - f_n \to Au(\alpha, \Delta) - f.$$

Ввиду (2.7) получаем

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n p_n u(\alpha, \Delta) - f_n\|^2 = \|Au(\alpha, \Delta) - f\|^2,$$

$$\lim_{n\to\infty} \|p_n u(\alpha, \Delta)\|^2 = \|u(\alpha, \Delta)\|^2.$$

Из полученных соотношений вытекает (3.1). Действительно,

$$\limsup_{n\to\infty} d_n = \limsup_{n\to\infty} \Phi_n[u_n(\alpha, \Delta)] \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty} \Phi_n[p_n u(\alpha, \Delta)] = d.$$

В силу ограниченности последовательностей $\{u_n(\alpha, \Delta)\}$, $\{A_n u_n(\alpha, \Delta)\}$ существуют дискретно слабо сходящиеся подпоследовательности (см. [2], стр. 25—26)

$$(3.2)\qquad u_{n_k}(\alpha, \Delta) \dashrightarrow \hat{u}, \quad A_{n_k} u_{n_k}(\alpha, \Delta) \dashrightarrow \hat{f}, \quad \{n_k\} \subseteq \{n\}.$$

Объединяя соотношения (2.10), (3.2) и условия 4, 5, получаем $\hat{u} \in D(A)$, $A\hat{u} = \hat{f}$ и

$$(3.3)\qquad A_{n_k} u_{n_k}(\alpha, \Delta) - f_{n_k} \dashrightarrow A\hat{u} - f,$$

откуда вместе с (3.1) и (2.9) находим

$$(3.4)\qquad d \leqslant \|A\hat{u} - f\|^2 + \alpha\|\hat{u}\|^2 \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|A_{n_k} u_{n_k}(\alpha, \Delta) - f_{n_k}\|^2 +$$

$$+ \|u_{n_k}(\alpha, \Delta)\|^2 \leqslant \liminf_{k\to\infty} d_{n_k} \leqslant \limsup_{k\to\infty} d_{n_k} \leqslant d.$$

Из предыдущих неравенств следует, что $\hat{u}$ — экстремальный элемент в задаче (1.4), следовательно, $\hat{u} = u(\alpha, \Delta)$.

Выберем подпоследовательность номеров $\{n_m\} \subseteq \{n_k\}$ такую, что существуют пределы

$$\lim_{m\to\infty} \|A_{n_m} u_{n_m}(\alpha, \Delta) - f_{n_m}\|^2 = \varkappa, \quad \lim_{m\to\infty} \|u_{n_m}(\alpha, \Delta)\|^2 = \lambda.$$

Вследствие (3.4) выполнено равенство $\varkappa + \alpha\lambda = d$. Покажем, что $\varkappa = \|Au(\alpha, \Delta) - f\|^2$, $\lambda = \|u(\alpha, \Delta)\|^2$. Предположим, что или $\|u(\alpha, \Delta)\| < \lambda$, или $\|Au(\alpha, \Delta) - f\|^2 < \varkappa$ (противоположных неравенств быть не может в силу (3.2), (3.3) и (2.9)). Тогда приходим к невозможному неравенству

$$d = \|Au(\alpha, \Delta) - f\|^2 + \alpha\|u(\alpha, \Delta)\|^2 < \lim_{m\to\infty} \{\|A_{n_m} u_{n_m}(\alpha, \Delta) -$$

$$- f_{n_m}\|^2 + \alpha\|u_{n_m}(\alpha, \Delta)\|^2\} = d.$$

Таким образом,

$$\lim_{m\to\infty} \|u_{n_m}(\alpha, \Delta)\| = \|u(\alpha, \Delta)\|;$$

кроме того, выше установлено, что

$$u_{nm}(\alpha, \Delta) \dashrightarrow u(\alpha, \Delta).$$

Согласно (2.10), окончательно получаем

$$u_{nm}(\alpha, \Delta) \to u(\alpha, \Delta). \tag{3.5}$$

Поскольку из любой последовательности $\{n_k\} \subseteq \{n\}$ можно выделить подпоследовательность со свойством (3.5), то это означает дискретную сходимость всей последовательности.

Замечание. Если связывающие операторы p_n и q_n линейны, ограничены и удовлетворяют (2.1), то в теореме 2 можно опустить требование сепарабельности пространств.

§ 4. Проекционные методы

Пусть в гильбертовом пространстве U (F) задана цепочка конечномерных подпространств $U_n \subset U$ $(F_n \subset F)$, удовлетворяющих условию

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n} = U \qquad \left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n} = F\right).$$

Тогда линейные операторы ортогонального проектирования P_n: $U \to U_n$ обладают свойствами

$$p_n U = U_n \qquad (Q_n F = F_n), \tag{4.1}$$

$$P_n u \to u \quad \forall u \in U \qquad (Q_n f \to f \quad \forall f \in F), \tag{4.2}$$

$$\|P_n\| \leqslant 1 \qquad (\|Q_n\| \leqslant 1). \tag{4.3}$$

1. В качестве связывающих операторов p_n и q_n возьмем проекционные операторы P_n и Q_n соответственно.

В (1.5) полагаем $A_n = q_n A p_n$, $f_n = q_n f$ и приходим к проекционной схеме конечномерной аппроксимации, применявшейся в [9, 10].

Проверим условия теоремы 2. Условия 1, 2 и 5, очевидно, выполнены в силу (4.2). Ввиду (4.2), (4.3) для линейного ограниченного оператора A имеем

$$\begin{gathered} \|A_n\| \leqslant \|q_n\| \, \|A\| \, \|p_n\| \leqslant \|A\|, \\ \|A_n p_n u - q_n A u\| \leqslant \|q_n\| \, \|A p_n u - A u\| \to 0, \qquad n \to \infty. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Согласно теореме 1 из [2], стр. 18, из (4.4) следует дискретная сходимость $A_n \to A$, т. е. выполнено условие 3.

Чтобы убедиться в дискретной слабой замкнутости пары A, (A_n), предварительно докажем две леммы для случая $U_n \subseteq U$ и $\|p_n u - u\| \to 0$ (линейность и ограниченность p_n не предполагается).

Лемма 1. *Справедливо соотношение* $u_n \to u \Leftrightarrow \|u_n - u\| \to 0$.

Доказательство. Пусть $u_n \to u$, т. е. $\|u_n - p_n u\| \to 0$, тогда с учетом (4.2)

$$\|u_n - u\| \leqslant \|u_n - p_n u\| + \|p_n u - u\| \to 0;$$

обратно, пусть $\|u_n-u\|\to 0$, тогда

$$\|u_n-p_nu\|\leqslant\|u_n-u\|+\|u-p_nu\|\to 0.$$

Обозначим через $u_n\to u$ (слабо) слабую сходимость в пространстве U.

Лемма 2. *Справедливо соотношение* $u_n\dashrightarrow u\Leftrightarrow u_n\to u$ (слабо).

Доказательство. Пусть $u_n\dashrightarrow u$; это значит (см. определение 5), что для любой дискретно сходящейся последовательности $u_n'\to u'$ имеет место соотношение

$$(u_n', u_n)\to(u', u). \tag{4.5}$$

Покажем, что $(z, u_n)\to(z, u)$ для всех $z\in U$. Обозначим $z_n=p_nz$, тогда имеем

$$|(z, u_n)-(z, u)|\leqslant|(z, u_n)-(z_n, u_n)|+|(z_n, u_n)-(z, u)|.$$

Второе слагаемое стремится к нулю, так как $z_n\to z$ и выполнено (4.5). Первое слагаемое также стремится к нулю, ибо

$$|(z, u_n)-(z_n, u_n)|\leqslant|(z-z_n, u_n)|\leqslant\|u_n\|\|z-z_n\|,$$

где последовательность $\{\|u_n\|\}$ ограничена (см. [3], стр. 57), а $\|z_n-z\|=$ $=\|p_nz-z\|\to 0$.

Вернемся теперь к вопросу о замкнутости пары A, (A_n). Пусть $u_n\dashrightarrow u$, т. е. дискретно слабо сходится. Покажем, что выполнено более сильное свойство, чем замкнутость для пары A, (A_n), а именно

$$u_n\dashrightarrow u\Rightarrow A_nu_n\dashrightarrow Au.$$

В самом деле, согласно критерию слабой дискретной сходимости (см. [2], стр. 21), для этого достаточно проверить, что

$$(A_nu_n, q_nf)\to(Au, f)\qquad\forall f\in F.$$

Заметим, что, по лемме 2, $u_n\to u$ (слабо) и, следовательно, $Au_n\to Au$ (слабо) (см. [14], стр. 217), кроме того, $\|q_nf-f\|\to 0$. Так как

$$|(A_nu_n, q_nf)-(Au, f)|=|(q_nAp_nu_n, q_nf)-(Au, f)|=$$
$$=|(Au_n, q_nf)-(Au, f)|,$$

то последнее выражение стремится к нулю в силу непрерывности скалярного произведения при таком типе сходимости (см. [14], стр. 221).

2. Рассмотрим частный случай метода конечномерной аппроксимации (см. п. 1), положив $q_n=I$ (тождественный оператор) для всех n. Тогда $A_n=Ap_n'$, и мы получаем проекционный метод Ритца. Этот метод применительно к регуляризованной задаче (1.4) исследовался в [11, 13].

3. Пусть $p_n=q_n=I$ (тождественный оператор). В этом случае дискретная сходимость линейных ограниченных операторов A_n означает поточечную сходимость к оператору A, т. е. сходимость на каждом элементе u:

$$A_n\to A\Leftrightarrow\|A_nu-Au\|\to 0\quad\forall u\in U.$$

Если дополнительно потребовать $U=F$, $U_n=F_n$ и самосопряженность операторов A, A_n, то условие 4 также будет выполнено, поскольку если $u_n \dashrightarrow u$, то $u_n \to u$ (слабо) и

$$|(A_n u_n, f)-(Au, f)|=|(u_n, A_n f)-(u, Af)| \to 0.$$

Таким образом, выполнены все условия (теоремы 2), гарантирующие сходимость экстремальных элементов $u_n(\alpha, \Delta)$ задачи (1.5) к экстремальному элементу $u(\alpha, \Delta)$ задачи (1.4). В общем случае для сходимости конечномерных приближений поточечной сходимости недостаточно (см. пример в [6]).

§ 5. Некоторые обобщения основной теоремы

1. Пусть пространства U_n (F_n) являются подпространствами пространства U (F). Тогда утверждение теоремы 2 справедливо, если вместо условия 1 выполнено более слабое

Условие 6. Пространство F рефлексивное, U строго выпуклое и обладает свойством Ефимова — Стечкина, т. е. наряду с рефлексивностью выполнено соотношение

$$u_n \to u\,(\text{слабо}), \qquad \|u_n\| \to \|u\| \Rightarrow \|u_n-u\| \to 0.$$

При этом замкнутость пары A, (A_n) в условии 4 понимается относительно слабой сходимости в пространствах U, F.

Доказательство этого обобщения теоремы проводится без каких-либо существенных изменений.

2. Пусть последовательность пространств U_n (F_n) образует дискретную аппроксимацию U (F) и существует изометрический изоморфизм φ (ψ), при котором пространства U_n (F_n) отображаются на (конечномерные) подпространства $U_n' \subset U$ $(F_n' \subset F)$. Тогда для операторов $p_n' = \varphi p_n$ $(q_n' = \psi q_n)$ выполнены свойства (2.1), (2.2), поэтому пространства $\{U_n'\}$ $(\{F_n'\})$ образуют дискретную аппроксимацию пространства U (F).

В этом случае задача (1.5) эквивалентна задаче

$$\inf\{\|\psi A_n \varphi^{-1} u_n' - f_n'\|^2 + \alpha\|u_n'\|^2 :\ u_n' \in U_n'\}, \tag{5.1}$$

причем их решения связаны равенством $u_n(\alpha, \Delta)=\varphi^{-1} u_n'(\alpha, \Delta)$.

Таким образом, для операторов $B_n=\psi A_n \varphi^{-1}$ может быть применено обобщение теоремы 2, рассмотренное в п. 1.

Пример. Пусть $U=L_p[0, 1]$. Определим какой-нибудь квадратурный процесс, например правых прямоугольников:

$$\int_0^1 u(s)\,ds=\sum_{j=1}^n a_j^{(n)} u(s_j^{(n)})+r_n(u), \qquad a_j^{(n)} \geqslant 0 \quad \forall j, \forall n,$$

где $r_n(u) \to 0$ для любой непрерывной функции $u(t)$. Если $u(t)$ — непрерывная функция, то определим оператор $\bar{p}_n$: $u(t) \to (u(s_1^{(n)}), \ldots, u(s_n^{(n)}))$. В качестве связывающих операторов p_n возьмем продолжение операторов

$\bar{p}_n$ на все пространство $L_p[0, 1]$. Это продолжение существует и в определенном смысле единственно (см. [2], стр. 14). Пусть U_n есть n-мерное пространство с нормой

$$\|u_n\| = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{(n)} (u_{nj})^p \right)^{1/p}, \text{ где } u_n = (u_{n1}, \ldots, u_{nn}) \in U_n.$$

Отображение φ, которое ставит в соответствие элементу $u_n = (u_{n1}, \ldots$ $\ldots, u_{nn})$ кусочно-постоянную функцию $u(t) = u_{ni}$ при $t \in (s_{i-1}^{(n)}, s_i^{(n)}]$, является изометрическим изоморфизмом пространства U на подпространство $U_n' \in U$.

Аналогично можно получить дискретную аппроксимацию в многомерном случае $L_p[D]$, $D \in R_n$ (см. [3], стр. 88).

3. Теорема 2 о сходимости конечномерных приближений формулировалась в предположении ограниченности операторов A, (A_n), в то время как теорема 1 о сходимости регуляризованных решений справедлива при условии лишь замкнутости оператора A. Укажем прием, позволяющий свести общий случай линейного неограниченного оператора A к рассмотренному в § 3.

Пусть T — линейный, вообще говоря, неограниченный оператор с областью определения $D(T) \subseteq U$ и областью значений $R(T) \subseteq F$, являющимися линейными многообразиями. Нормируем множество $D = D(T)$, введя T-норму:

$$\|u\|_D = \|u\|_U + \|Tu\|_F.$$

Тогда линейный оператор A: $D \to F$, определяемый соотношением $Au = Tu$, $u \in D = D(T)$, является ограниченным и $\|A\| \leqslant 1$. Аналогично можно определить T_n-норму на $D(T_n)$ и, таким образом, получить ограниченные операторы A_n: $A_n u = T_n u$, $u \in D(T_n)$ (см. подробности в [3]).

Замечание. Полученные результаты о дискретной аппроксимации регуляризованного семейства приближенных решений переносятся на случай, когда вместо метода регуляризации Тихонова используются другие вариационные методы, например метод (обобщенной) невязки и квазирешений.

§ 6. Квадратурные методы

Исследуем квадратурные (конечно-разностные) методы с общих позиций дискретной аппроксимации. Для этого рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма I рода

$$(6.1) \qquad Au = \int_0^1 K(t, s) u(s)\, ds = f(x), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где $K(t, s)$ — непрерывная по совокупности переменных функция, считая оператор A действующим из $U = L_2[0, 1]$ в $F = L_2[0, 1]$ (пространство интегрируемых с квадратом по Лебегу функций).

Пусть Φ — подмножество непрерывных функций. Тогда каждая функция $u(t)\in\Phi$ интегрируема по Риману и замыкание — по норме

$$\|u\|=\left(\int_0^1 U^2(t)\,dt\right)^{1/2},\qquad \bar{\Phi}=L_2.$$

Зададим некоторый сходящийся квадратурный процесс, например правых прямоугольников:

$$\int_0^1 u(s)\,ds=\sum_{j=1}^n a_j^{(n)}u(s_j^{(n)})+r_n(u),\qquad a_j^{(n)}\geqslant 0\quad \forall j,\forall n.$$

Пусть Φ_n есть n-мерное евклидово пространство с нормой

$$\|u_n\|_{\Phi_n}=\left(\sum_{j=1}^n a_j^{(n)}\,(u_{nj})^2\right)^{1/2}.$$

Определим связывающие операторы для Φ и Φ_n:

$$p_nu=q_nu=(u(s_1^{(n)}),\ldots,u(s_n^{(n)}))\in\Phi_n.$$

Поскольку для операторов p_n, очевидно, выполнены условия (2.1), (2.2), то мы имеем дискретную аппроксимацию всюду плотного множества Φ в пространстве L_2 $[0,1]$. Согласно результату из [3], стр. 78—79, тогда существует единственное продолжение дискретной аппроксимации на все пространство. Если определить

$$(A_nu_n)_i=\sum_{j=1}^n a_j^{(n)}\,K(s_i^{(n)},s_j^{(n)})\,u_{nj},$$

то задача (1.5) принимает в этом случае вид

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^n a_i^{(n)}\left[\sum_{j=1}^n a_j^{(n)}\,[K(s_i^{(n)},s_j^{(n)})u_{nj}-f(s_i^{(n)})]^2\right]+\right. \tag{6.2}$$

$$\left.+\alpha\sum_{i=1}^n a_i^{(n)}\,(u_{ni})^2:\{u_{nj}\}_1^n\right\}.$$

Нахождение экстремального элемента задачи (6.2) сводится к решению соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.

Определим отображение $\varphi=\psi$, которое элемент $u_n=(u_{n1},\ldots,u_{nn})$ переводит в кусочно-постоянную функцию $u(t)=u_{nj}$ при $t\in(s_{j-1}^{(n)},s_j^{(n)}]$, $s_0^{(n)}=0$ (см. п. 2 из § 5). Тогда φ осуществляет изометрический изоморфизм пространства U_n на n-мерное подпространство $U_n'\subset U$.

Оператор $A_n'=\psi A_n\varphi^{-1}$ в задаче (5.1) совпадает на подпространстве U_n' с оператором

$$A^{(n)}u=\int_0^1 K^{(n)}(t,s)\,u(s)\,ds,$$

где $K^{(n)}(t,s)=K(s_i^{(n)},s_j^{(n)})$ при $s_{i-1}^{(n)}<t\leqslant s_i^{(n)}$, $s_{j-1}^{(n)}<s\leqslant s_j^{(n)}$.

Легко видеть, что $\|A-A^{(n)}\|\to 0$ при $n\to\infty$. Поэтому, имея в виду леммы 1 и 2, из неравенств

$$\|A^{(n)}u_n-Au\|\leqslant\|A^{(n)}u_n-Au_n\|+\|Au_n-Au\|,$$
$$|(A^{(n)}u_n-Au, f)|\leqslant|(A^{(n)}u_n-Au_n, f)|+|(Au_n-Au, f)|$$

заключаем о дискретной сходимости $A_n'\to A$ и дискретной слабой замкнутости пары A, (A_n').

Согласно теореме 2, это гарантирует разрешимость задачи (5.1), а следовательно, и задачи (6.2) и сходимость $u_n'(\alpha,\Delta)\to u$, и, значит, $u_n(\alpha,\Delta)\to u$.

Доказанные утверждения, касающиеся сходимости квадратурных (конечно-разностных) методов аппроксимации регуляризующих алгоритмов, обобщают и уточняют известные результаты, полученные в работах [5, 8] для интегральных уравнений типа (6.1).

Поступила в редакцию 20.06.1977
Переработанный вариант 30.08.1977

Цитированная литература

1. *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
2. *Г. Вайникко.* Анализ дискретизационных методов. Тарту, Изд-во Тартуского ун-та, 1976.
3. *F. Stummel.* Diskrete Konvergenz linearer operatoren. I. Math. Ann., 1970, 190, 45–92.
4. *R. D. Grigorieff.* Zur Theorie linearer approximations-regulärer Operatoren. I. Math. Nachr., 1973, 55, 233–249; II. 251–263.
5. *А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин.* Методы решения некорректных задач. М., «Наука», 1974.
6. *А. Р. Данилин, В. П. Танана.* О сходимости проекционных методов решения линейных некорректных задач. Матем. зап. Уральск. ун-та, 1975, 9, № 4, 3–13.
7. *А. Н. Тихонов.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. Докл. АН СССР, 1963, 153, № 3, 501–504.
8. *А. В. Гончарский, А. С. Леонов, А. Г. Ягола.* Конечно-разностная аппроксимация линейных некорректных задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, 14, № 1, 15–23.
9. *В. В. Васин.* Об одном проекционном методе приближенного решения некорректных задач. Изв. вузов. Математика, 1971, № 11, 28–32.
10. *В. В. Васин.* О β-сходимости проекционного метода для нелинейных операторных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, 12, № 2, 492–497.
11. *В. А. Морозов.* Применение метода регуляризации к решению одной некорректной задачи. Вестн. МГУ. Матем., механ., 1965, № 4, 13–21.
12. *В. В. Иванов, В. Ю. Кудринский.* Приближенное решение линейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве методом наименьших квадратов. I. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, 6, № 5, 831–841; II. 1967, 7, № 3, 475–496.
13. *В. В. Васин, В. П. Танана.* Приближенное решение операторных уравнений первого рода. Матем. зап. Уральск. ун-та, 1968, 6, № 2, 27–37.
14. *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев.* Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.