А. М. Каган, Л. Б. Клебанов, С. М. Финтушал, Асимптотическое поведение полиномиальных оценок Питмэна, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1974, том 43, 30–39

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОЦЕНОК ПИТМЭНА

А.М.Каган, Л.Б.Клебанов, С.М.Финтушал

§ I. Введение.

Полиномиальные (степени k) оценки Питмэна $t_n^{(k)}$ для параметра сдвига θ , введенные одним из авторов в [I] (см.также [2, гл.7]), изучаются здесь с точки зрения их асимптотического поведения при неограниченном увеличении числа n наблюдений. Вводятся модифицированные полиномиальные оценки Питмэна $\tau_n^{(k)}$, которые существенно проще оценок $t_n^{(k)}$, но асимптотически эквивалентны последним. Доказана асимптотическая нормальность величины $\sqrt{n}\,(t_n^{(k)} - \theta)$ и получено явное выражение для главного члена $D t_n^{(k)}$. В дополнение к установленной в [I] при фиксированном n допустимости $t_n^{(k)}$ в классе полиномиальных степени $\leqslant k$ оценок θ , мы доказываем здесь асимптотическую оптимальность $t_n^{(k)}$ в классе состоятельных в среднем квадратичном полиномиальных степени $\leqslant k$ оценок θ .

С нашей точки зрения, интерес представляют не только окончательные результаты, но и метод их получения, основанный на понятии фишеровской информации $\bar{I}^{(k)}$ о параметре θ , содержащейся в полиномах степени $\leqslant k$ от наблюдения.

Получен аналог неравенства Рао-Крамера для полиномиальных оценок и при естественных условиях доказана сходимость $\bar{I}^{(k)}$ при $k \to \infty$ и классической фишеровской информации I . Возникающие здесь задачи о характеризации распределений, для которых $I = \bar{I}^{(k)}$ при некотором $k \geqslant 1$, или для которых классическая оценка Питмэна t_n асимптотически эквивалентна $t_n^{(k)}$, рассмотрены в последнем параграфе статьи.

§ 2. Полиномиальные и модифицированные полиномиальные оценки Питмэна.

Во всем дальнейшем предполагается, что наблюдения имеют вид

$$x_i = \theta + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (I)$$

где $\theta \in R^1$ - подлежащий оцениванию (сдвиговый) параметр, ε_i - независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$. Оценки, конструируемые ниже, используют не всю $F(x)$, а лишь некоторое число $2k$ первых ее моментов

$$\mu_1 = \int x\,dF, \ldots, \mu_{2k} = \int x^{2k}\,dF, \qquad (2)$$

которые мы считаем известными (и конечными). В остальном же $F(x)$ может быть произвольной. Не умаляя общности, будем считать $\mu_1 = 0$.

Положим $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_1^n x_i$, $Y = (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x})$,

$m_j = \frac{1}{n} \sum_1^n (x_i - \bar{x})^j$ и обозначим через Λ_k пространство всех полиномов степени $\leqslant k$ от $x_1 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x}$.

Оценки Питмэна параметра θ были введены в [3] как

$$t_n = \bar{x} - E(\bar{x} \mid Y), \tag{3}$$

а полиномиальные оценки Питмэна - в работе [I] как

$$t_n^{(k)} = \bar{x} - \hat{E}(\bar{x} \mid \Lambda_k), \tag{4}$$

где $E(\cdot \mid Y)$ (соответственно $\hat{E}(\cdot \mid \Lambda_k)$) обозначает условное математическое ожидание (соотв. условное математическое ожидание в широком смысле), отвечающее значению $\theta = 0$. Уже при небольших значениях k ($k = 5, 6$) оценка (4) выглядит достаточно громоздко. Поэтому, мы, воспользовавшись тем обстоятельством, что при условии $\mu_{2k} < \infty$ распределение случайного вектора

$$(\sqrt{n}(\bar{x} - \theta), \sqrt{n}(m_2 - \mu_2), \ldots, \sqrt{n}(m_k - \mu_k)) \tag{5}$$

сходится при $n \to \infty$ к нормальному с вектором средних $\mathbb{0}$ и матрицей ковариаций $\mathbb{C} = \| c_{ij} \|$, где

$$c_{1j} = c_{j1} = \mu_{j+1} - j\mu_2\mu_{j-1}, \quad c_{ij} = c_{ji} = \mu_{i+j} - i\mu_{i-1}\mu_{j+1} - j\mu_{i+1}\mu_{j-1} - \mu_i\mu_j + ij\mu_2\mu_{i-1}\mu_{j-1}$$

для $i \geqslant 2$, $j \geqslant 2$ (см.[4, стр.365]; в русском переводе имеется неточность в выражении для c_{ij}), введем модифицированные полиномиальные оценки Питмэна $\tau_n^{(k)}$ следующим образом. Обозначим через C_{ij} алгебраическое дополнение элемента c_{ij} матрицы $\mathbb{C}$ и предположим, что $\mathbb{C}_{11} > 0$ (это условие заведомо выполнено, например, если $F(x)$ имеет более чем k точек роста). Определим теперь оценку $\tau_n^{(k)}$ как

$$\tau_n^{(k)} = \bar{x} - A_0 + \sum_2^k A_j m_j, \tag{6}$$

где

$$A_j = \frac{\mathbb{C}_{1,j+1}}{\mathbb{C}_{11}}, \quad A_0 = \sum_2^k A_j \mu_j \tag{7}$$

Конструкция оценки (6) довольно прозрачная: $\tau_n^{(k)}$ представляет собой наилучшую оценку для θ вида $\bar{x} + \psi(m_2, \ldots, m_k)$, полученную в предположении, что вектор (5) следует нормальному распределению $N(\mathbb{0}, \mathbb{C})$. Преимущество оценки $\tau_n^{(k)}$ сравнительно с $t_n^{(k)}$ состоит в том, что первая представляет собой линейную функцию от выборочных моментов.

Из приведенного выше результата об асимптотической нормальности вектора (5), сходимости его моментов к моментам предельного распределения и известного выражения для остаточной дисперсии (см. [4, стр.350, 305]) непосредственно вытекает следующая теорема

<u>Теорема I</u>. Если $\mu_{2k} < \infty$ и $C_{11} > 0$, то при $n \to \infty$ распределение величины $\sqrt{n}(\tau_n^{(k)} - \theta)$ сходится к нормальному $N\left(0, \frac{|\mathbb{C}|}{C_{11}}\right)$. Кроме того,

$$E_\theta\left[\sqrt{n}(\tau_n^{(k)} - \theta)\right]^2 = \frac{|\mathbb{C}|}{C_{11}}(1 + o(1)). \tag{8}$$

В § 4 мы увидим, что правая часть (8) представляет собой асимптотически минимальное значение для $E_\theta[\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta)]^2$ в классе состоятельных полиномиальных оценок $\tilde{\theta}_n$.

§ 3. Фишеровская информация, содержащаяся в полиномах.

Обозначим через $L_2(F) = L_2$ пространство функций $\varphi(x)$, для которых $\|\varphi\|^2 = \int \varphi(x)^2 dF < \infty$. Если $F(x) = \int_{-\infty} f(u)du$, $f(x)$ абсолютно непрерывна и

$$J = \frac{f'}{f} \in L_2, \tag{9}$$

то фишеровская информация о параметре θ, содержащаяся в одном наблюдении вида (I), равна по определению

$$I = \|J\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{f'}{f}\right) f\,dx. \tag{I0}$$

Предполагая выполненным условие $\mu_{2k} < \infty$, обозначим через $L_2^{(k)}$ подпространство L_2, натянутое на функции $1, x, x^2, \ldots, x^k$, и положим

$$J^{(k)} = \hat{E}(J \mid L_2^{(k)}), \quad I^{(k)} = \|J^{(k)}\|^2, \tag{II}$$

где $\hat{E}(\cdot \mid L_2^{(k)})$ – оператор проектирования (условного математического ожидания в широком смысле) на $L_2^{(k)}$.

Лемма I. Если $\mu_{2k} < \infty$ и выполнено условие (9), то

$$\bar{I}^{(k)} = \frac{C_{11}}{|\mathbb{C}|} \qquad (12)$$

Доказательство. Можно считать, что подпространство $L_2^{(k)}$ порождено функциями I, x, $\varphi_j = x^j - \mu_j - j\mu_{j-1}x$, $j = 2,\ldots,k$. Поскольку $(\mathfrak{I},1)=0$ и $(1,x)=(1,\varphi_j)=0$, $j = 2,\ldots,k$, то

$$\mathfrak{I}^{(k)} = \hat{E}\,(\mathfrak{I}\,|\,L_2^{(k)} \ominus 1). \qquad (13)$$

Положим

$$D = |d| = \begin{vmatrix} (\mathfrak{I},\mathfrak{I})(\mathfrak{I},x)(\mathfrak{I},\varphi_2) & \ldots & (\mathfrak{I},\varphi_k) \\ (x,\mathfrak{I})(x,x)(x,\varphi_2) & \ldots & (x,\varphi_k) \\ (\varphi_2,\mathfrak{I})(\varphi_2,x)(\varphi_2,\varphi_2) & \ldots & (\varphi_2,\varphi_k) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \ldots & \cdot \\ (\varphi_k,\mathfrak{I})(\varphi_k,x)(\varphi_k,\varphi_2) & \ldots & (\varphi_k,\varphi_k) \end{vmatrix} \qquad (14)$$

и пусть D_{11} обозначает алгебраическое дополнение элемента d_{11}. Согласно формуле для остаточной дисперсии [4, стр.305], имеем

$$\|\mathfrak{I} - \mathfrak{I}^{(k)}\|^2 = \frac{D}{D_{11}}. \qquad (15)$$

В знаменателе правой части (I5) стоит определитель Грама система функций $x, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$, совпадающий с $|\mathbb{C}|$. Он заведомо отличен от нуля, если $F(x)$ имеет более чем k точек роста. В частности, $D_{11} = |\mathbb{C}| > 0$, если распределение $F(x)$ задается плотностью $f(x)$; в этом случае, разумеется, и $C_{11} > 0$. Далее,

$$\bar{I}^{(k)} = \|\mathfrak{I}^{(k)}\|^2 = \|\mathfrak{I}\|^2 - \|\mathfrak{I} - \mathfrak{I}^{(k)}\|^2 = \bar{I} - \frac{D}{D_{11}}. \qquad (16)$$

Разлагая определитель (I4) по элементам первого столбца и учитывая легко проверяемые соотношения

$$(\mathfrak{I},x) = -1, \quad (\mathfrak{I},\varphi_j) = 0, \quad j = 2,\ldots,k,$$

получим

$$D = \bar{I}\cdot D_{11} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ (\varphi_2,x) & (\varphi_2,\varphi_2) & \ldots & (\varphi_2,\varphi_k) \\ (\varphi_k',x) & (\varphi_k,\varphi_2) & \ldots & (\varphi_k,\varphi_k) \end{vmatrix} = \bar{I}\cdot D_{11} - C_{11}.$$

Отсюда и из (I6) получаем искомое соотношение (I2). Сравнивая (I2) с (8), видим, что $\frac{1}{n\bar{I}^{(k)}}$ совпадает с главным членом выражения для $E_\theta\left[\sqrt{n}\,(\tau_n^{(k)} - \theta)\right]^2$

Предположим теперь, что

$$\int |x|^k dF < \infty \text{ для } k = 1,2,\ldots, \qquad (17)$$

обозначим через $\tilde{L}_2$ замыкание полиномов в L_2 и положим

$$\tilde{\mathcal{J}} = \hat{E}(\mathcal{J} \mid \tilde{L}_2), \quad \tilde{I} = \| \tilde{\mathcal{J}} \|^2. \tag{18}$$

Очевидно, $\breve{I} \leqslant I$. В качестве непосредственного следствия леммы I получаем следующий результат (первоначально доказанный С.М.Финтушал).

Теорема 2. Если выполнены условия (9) и (18), то

$$\lim_{k \to \infty} I^{(k)} = \tilde{I}. \tag{19}$$

Если дополнительно предположить, что $\mathcal{J} \in \tilde{L}_2$, то получаем следующее представление фишеровской информации в терминах моментов распределения наблюдений:

$$I = \lim_{k \to \infty} I^{(k)} = \lim_{k \to \infty} \frac{C_{11}}{|\mathbb{C}|}. \tag{20}$$

Переходя к изучению повторной выборки, введем обозначения:

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad \vec{\mathcal{J}} = \mathcal{J}(\vec{x}) = \sum_1^n \mathcal{J}(x_i),$$

$\vec{L}_2$ – пространство функций $\varphi(\vec{x})$, для которых

$$\|\varphi\|^2 = \int \varphi^2 dF(x_1) \ldots dF(x_n) < \infty;$$

$\vec{L}_2^{(k)}$ – подпространство $\vec{L}_2$, образованное полиномами степени $\leqslant k$ от $x_1, \ldots, x_n$;

$$\vec{\mathcal{J}}^{(k)} = \hat{E}(\vec{\mathcal{J}} \mid \vec{L}_2^{(k)}). \tag{21}$$

Хорошо известным свойством фишеровской информации является следующее:

$$\|\vec{\mathcal{J}}\|^2 = n I. \tag{22}$$

Мы хотим доказать аналогичное соотношение для $\vec{\mathcal{J}}^{(k)}$.

Теорема 3. Если $\mu_{2k} < \infty$ и выполнено условие (9), то

$$\|\vec{\mathcal{J}}^{(k)}\|^2 = n I^{(k)}. \tag{23}$$

Доказательство. Покажем, прежде всего, что

$$\hat{E}(\mathcal{J}(x_i) \mid \vec{L}_2^{(k)}) = \mathcal{J}^{(k)}(x_i). \tag{24}$$

Пусть

$$\hat{E}(\mathcal{J}(x_i) \mid \vec{L}_2^{(k)}) = \sum_{j=0}^{k} q_j(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, x_i^{k-j} \tag{25}$$

где q_j – многочлен степени $\leqslant j$. Полагая $\bar{q}_j = E q_j$, будем иметь

$$E\Big[\mathcal{J}(x_i) - \sum_{j=0}^{k} q_j\, x_i^{k-j}\Big]^2 = E\Big[\mathcal{J}(x_i) - \sum_{j=0}^{k} \bar{q}_j\, x_i^{k-j}\Big]^2 + E\Big[\sum_{j=0}^{k} (q_j - \bar{q}_j)\, x_i^{k-j}\Big]^2 -$$

$$-2E\left[\left(\mathfrak{I}(x_i)-\sum_0^k \bar{q}_j\, x_i^{k-j}\right)\sum_0^k (q_j-\bar{q}_j)\, x_i^{k-j}\right].$$

Поскольку

$$E\left[\left(\mathfrak{I}(x_i)-\sum_0^k \bar{q}_j\, x_i^{k-j}\right)\sum_0^k (q_j-\bar{q}_j)\, x_i^{k-j}\right] =$$

$$=E\left\{E\left[\left(\mathfrak{I}(x_i)-\sum_0^k \bar{q}_j\, x_i^{k-j}\right)\sum_0^k (q_j-\bar{q}_j)\, x_i^{k-j} \,\Big|\, x_i\right]\right\} =$$

$$= E\left\{\left(\mathfrak{I}(x_i)-\sum_0^k \bar{q}_j\, x_i^{k-j}\right)\sum_0^k x_i^{k-j}\, E(q_j-\bar{q}_j \mid x_i)\right\}=0,$$

то

$$E\left[\mathfrak{I}(x_i)-\sum_0^k q_j\, x_i^{k-j}\right]^2 = E\left[\mathfrak{I}(x_i)-\sum_0^k \bar{q}_j\, x_i^{k-j}\right]^2 + \sum_0^k E(q_j-\bar{q}_j)^2 \mu_{2(k-j)}$$

и из определения q_j посредством (25) выводим, что с вероятностью I должно быть $q_j=\bar{q}_j$. Тем самым (24) установлено. Искомое соотношение (23) следует теперь из того, что

$$\vec{\mathfrak{I}}^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{I}^{(k)}(x_i).$$

Перейдем к выводу аналога неравенства Рао–Крамера. Имея в виду предмет данной статьи, будем интересоваться оцениванием параметра θ, хотя переход к оцениванию произвольной (дифференцируемой) функции от θ потребует лишь очевидных изменений.

Пусть $q(x_1,\ldots,x_n)$ – полиномиальная степени $\leqslant k$ оценка θ. Положим $b_q(\theta)=E_\theta q-\theta$; очевидно, смещение $b_q(\theta)$ оценки q – полином степени $\leqslant k$.

Теорема 4. Если $\mu_{2k}<\infty$ и выполнено условие (9), то для любой полиномиальной степени $\leqslant k$ оценки θ справедливо неравенство

$$E_\theta(q-\theta)^2 \geqslant b_q(\theta)^2 + \frac{\left[1+b_q'(\theta)\right]^2}{n\,\mathrm{I}^{(k)}}. \qquad (26)$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что

$$E_\theta(q-\theta)^2 = b_q(\theta)^2 + E_\theta(q-E_\theta q)^2. \qquad (27)$$

Покажем теперь, что

$$-\frac{d}{d\theta}E_\theta q = \left(q(x_1+\theta,\ldots,x_n+\theta), \vec{\mathfrak{I}}^{(k)}\right). \qquad (28)$$

Очевидно, достаточно доказать (28) для мономов вида $x_{i_1}^{\alpha_1}\ldots x_{i_n}^{\alpha_n}$, где $\alpha_1>0,\ldots,\alpha_n>0$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_n\leqslant k$. Поскольку $\vec{\mathfrak{I}}^{(k)}=\sum_1^n \mathfrak{I}^{(k)}(x_i)$, то

$$\left((x_{i_1}+\theta)^{d_1}\dots(x_{i_r}+\theta)^{d_r}, \vec{J}^{(k)}\right) = \sum_{j=1}^{r}\left((x_{i_j}+\theta)^{d_j}, J^{(k)}(x_{i_j})\right)\prod_{l\neq j}\left((x_{i_l}+\theta)^{d_l}, 1\right),$$

откуда видно, что соотношение (28) достаточно доказать для многочленов от одной переменной. Для них имеем

$$-\frac{d}{d\theta} E_\theta x^j = -\sum_{i=0}^{j-1} C_j^i \mu_i (j-i)\theta^{j-i-1} \tag{29}$$

С другой стороны, воспользовавшись формулой

$$(x^j, J^{(k)}(x)) = (x^j, J(x)) = -j\mu_{j-1},$$

получим

$$((x+\theta)^j, J^{(k)}(x)) = -\sum_{i=1}^{j} C_j^i \theta^{j-i} i\mu_{i-1}. \tag{30}$$

Но правые части (29) и (30) совпадают. Тем самым (28) доказано.

Дальнейшая часть доказательства неравенства (26) ведется по традиционной схеме:

$$-\frac{d}{d\theta}E_\theta q = -(1+b_q'(\theta)) = (q(x_1+\theta,\dots,x_n+\theta), \vec{J}^{(k)}) =$$

$$= (q(x_1+\theta,\dots,x_n+\theta) - E_\theta q, \vec{J}^{(k)}),$$

поскольку $(1, \vec{J}^{(k)})=0$. Применяя неравенство Коши-Буняковского и вспоминая (23), получим

$$\|q(x_1+\theta,\dots,x_n+\theta)-E_\theta q\|^2 = E_\theta(q-E_\theta q)^2 \geqslant \frac{[1+b_q'(\theta)]}{n I^{(k)}},$$

что вместе с (27) дает (26).

Отметим, что для несмещенных полиномиальных (степени $\leqslant k$) оценок $q(x_1,\dots,x_n)$ параметра неравенство (26) принимает вид

$$E_\theta[q-\theta]^2 \geqslant \frac{1}{n I^{(k)}}. \tag{31}$$

Свойства (23) и (26) оправдывают предлагаемые нами для $I^{(k)}$ название фишеровской информации о параметре θ, содержащейся в полиномах степени $\leqslant k$ от наблюдения; $I^{(k)}$ определяется моментами $\mu_1,\dots,\mu_{2k}$ распределения $F(x)$.

Пусть теперь $\{q_n = q_n(x_1,x_2,\dots,x_n); n=1,2,\dots\}$ – состоятельная в среднем квадратичном оценка θ, q_n – полиномы степени $\leqslant k$. Из (26) выводим тогда, что $b_n(\theta) = E_\theta q_n - \theta \to 0$ при $n\to\infty$. Но так как $b_n(\theta)$ – полином степени $\leqslant k$, то тогда и $b_n'(\theta)\to 0$ при $n\to\infty$. Отсюда и из соотношений (8),(12),(26) выводим

<u>Следствие</u>. Модифицированная полиномиальная оценка Питмэна $\tau_n^{(k)}$ асимптотически оптимальна в классе состоятельных в среднем квадратичном полиномиальных степени $\leqslant k$ оценок θ.

§ 4. Асимптотическая нормальность полиномиальных оценок Питмэна

Покажем здесь, что полиномиальная оценка Питмэна $t_n^{(k)}$ ведет себя асимптотически так же, как $\tau_n^{(k)}$. Из определения $t_n^{(k)}$ формулой (4) видно, что $(t_n^{(k)}, q) = 0$ для любого $q \in \Lambda_k$. Поэтому $E_\theta\left[(t_n^{(k)} - \theta)(\tau_n^{(k)} - t_n^{(k)})\right] = 0$ и мы имеем

$$\frac{1}{n I^{(k)}}(1 + o(1)) = E_\theta(\tau_n^{(k)} - \theta)^2 = E_\theta(\tau_n^{(k)} - t_n^{(k)} + t_n^{(k)} - \theta)^2 =$$

$$= E_\theta(\tau_n^{(k)} - t_n^{(k)})^2 + E_\theta(t_n^{(k)} - \theta)^2 \geqslant E_q(\tau_n^{(k)} - t_n^{(k)})^2 + \frac{1}{n I^{(k)}},$$

откуда

$$E_\theta\left[\sqrt{n}(t_n^{(k)} - t_n^{(k)})\right]^2 = o(1). \tag{32}$$

Из (32) и теоремы I выводим следующий результат.

<u>Теорема 5</u>. Если $\mu_{2k} < \infty$ и $C_{11} > 0$, то при $n \to \infty$ распределение величины $\sqrt{n}(t_n^{(k)} - \theta)$ сходится к нормальному $N(0, \frac{1}{I^{(k)}})$. При этом

$$E_\theta\left[\sqrt{n}(t_n^{(k)} - \theta)\right]^2 = \frac{1}{I^{(k)}}(1 + o(1)). \tag{33}$$

Оценка $t_n^{(k)}$ асимптотически оптимальна в классе состоятельных в среднем квадратичном полиномиальных степени $\leqslant k$ оценок θ.

§ 5. Две характеризационных теоремы

Первая теорема этого параграфа дает ответ на вопрос, для каких распределений $F(x)$, задаваемых плотностью $f(x)$, вся информация о параметре θ схемы (I) содержится в полиномах степени $\leqslant k$.

<u>Теорема 6</u>. Если $f(x)$ абсолютно непрерывна, $J \in L_2$ и $\mu_{2k} < \infty$, то $I = I^{(k)}$ тогда и только тогда, когда

$$f(x) = exp(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k+1} x^{k+1}). \tag{34}$$

<u>Доказательство</u>. Имеем

$$I = \|J\|^2 = \|J^{(k)}\|^2 + \|J - J^{(k)}\|^2 = I^{(k)} + \|J - J^{(k)}\|^2.$$

Поэтому условие $I = I^{(k)}$ эквивалентно тому, что $J = J^{(k)} = \hat{E}(J|L_2^{(k)})$, т.е. что

$$\frac{f'}{f}(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_k x^k \tag{35}$$

почти всюду по мере F. Из (35) получаем, что для тех x, для которых $f(x) > 0$, выполняется (34). Но так как

$\exp(a_0 + a_1 x + a_{k+1} x^{k+1})$ при всех $x \in R^1$ и $f(x)$ непрерывна, то (34) выполняется всюду на R^1.

При $k = 1$ из теоремы 6 получаем, что $I = I^{(1)}$ эквивалентно нормальности $F(x)$. Этот результат доказывался ранее другим способом (см., например, [2, гл.13]).

Перейдем теперь к выяснению условия асимптотической эквивалентности оценки Питмэна t_n, определенной посредством (3), и полиномиальной оценки Питмэна $t_n^{(k)}$. Асимптотическое поведение оценки t_n изучено в работе [5], где показано, что если плотность $f(x)$ распределения $F(x)$ абсолютно непрерывна и $J \in L_2$, то величина $\sqrt{n}(t_n - \theta)$ распределена асимптотически нормально $N(0, \frac{1}{I})$, а при дополнительном условии $\int |x|^\delta dF < \infty$ для какого-нибудь $\delta > 0$

$$E_\theta[\sqrt{n}(t_n - \theta)]^2 = \frac{1}{I}(1 + o(1)). \tag{36}$$

Теорема 7. Пусть $f(x)$ абсолютно непрерывна, $J(x) \in L_2$ и $\mu_{2k} < \infty$. Для того, чтобы

$$E_\theta\left[\sqrt{n}(t_n - t_n^{(k)})\right]^2 \to 0, \quad n \to \infty \tag{37}$$

необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ имела вид (34).

Доказательство. Если соотношение (37) имеет место, то из (33) и (36) получаем:

$$\begin{aligned}\frac{1}{I^{(k)}}(1+o(1)) &= E_\theta\left[\sqrt{n}(t_n^{(k)} - \theta)\right]^2 = E_\theta\left[\sqrt{n}(t_n^{(k)} - t_n + t_n - \theta)\right]^2 = \\ &= E_\theta\left[\sqrt{n}(t_n^{(k)} - t_n)\right]^2 + E_\theta\left[\sqrt{n}(t_n - \theta)\right]^2 = \frac{1}{I}(1+o(1)),\end{aligned} \tag{38}$$

откуда $I = I^{(k)}$. Искомый результат следует из теоремы 6.

Пусть теперь $f(x)$ имеет вид (34). Согласно теореме 6, в этом случае $I = I^{(k)}$ и из (38) непосредственно получаем (37). Теорема 7 доказана; разумеется, в ее формулировке можно заменить полиномиальную оценку Питмэна $t_n^{(k)}$ на модифицированную оценку $\tau_n^{(k)}$.

Отметим, наконец, что, как показано в работе [6], при довольно общих условиях точное (не асимптотическое) совпадение оценки Питмэна t_n с полиномиальной оценкой $t_n^{(k)}$ имеет место только для нормальной $F(x)$. В этом случае $t_n = t_n^{(1)} = \bar{x}$.

Литература

[1] Kagan A.M. On the estimation theory of location parameter. - Sankhya, 1966, A 28, 4.

[2] Каган А.М., Линник Ю.В., Рао С.Р. Характеризационные задачи математической статистики. М., 1972.

[3] Pitman E.J.G. The estimation of location and scale parameters of a continuous population of any given form.- Biometrika, 1938, 30, III-IV.

[4] Cramer H.Mathematical methods of statistics.Princeton,1957.

[5] Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическое поведение некоторых статистических оценок в гладком случае. - Теор. вероятн. и ее примен., 1972, XVII, 3; 1973, XVIII, 1.

[6] Клебанов Л.Б. Недопустимость полиномиальных оценок параметра сдвига. - Матем.заметки, 1973, 14, 6.