

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Сисоев, В. Я. Шкадов, Неустойчивости и переформирования регулярных волн в стекающих пленках вязкой жидкости,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2000, номер 4, 44–48

<https://www.mathnet.ru/vmumm1593>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.80

22 мая 2025 г., 03:24:07



Профили распределения плотности и скорости потока для трех последовательных моментов времени представлены на рис. 5. Из графиков видно, что скорость движения (штриховые линии) линейно возрастает в волне ускорения от 0 до v_{\max} , плотность же потока экспоненциально убывает от ρ_0 до $\rho_0 e^{-3/2}$. В волне торможения затем плотность возрастает в 4 раза до величины $\rho = 4\rho_0 e^{-3/2} < \rho_0$. Графики распределения плотности и скорости для всех моментов времени, пока существует данное решение, проходят через одни и те же точки при $x = x_2$: $\rho = \rho_0/e$, $v = k$.

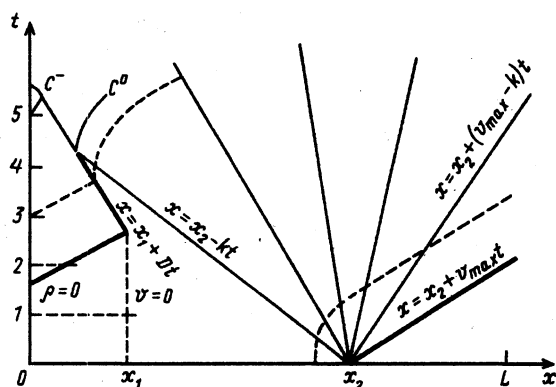


Рис. 4. Волновая картина движения, полученная из точного решения модельной задачи о неустановившемся движении по кольцевой однонаправленной дороге

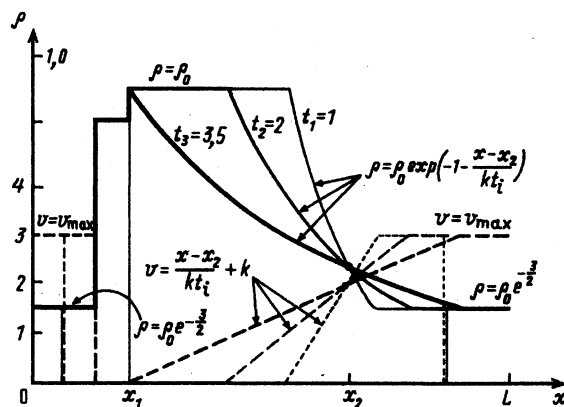


Рис. 5. Профили распределения плотности и скорости на кольцевой полосе, полученные из точного решения для трех последовательных моментов времени

Построенное решение ограничено областью под характеристиками C^- и C^0 (рис. 4). Для более поздних моментов времени необходимо строить численное решение.

Заключение. Разработанная математическая модель удовлетворительно описывает особенности движения транспорта по однополосной дороге, результаты количественно хорошо согласуются с проводившимися экспериментальными измерениями.

Анализ модели и решений типичных задач показывает, что, несмотря на напрашивающуюся аналогию с течением сжимаемого газа, данная среда (потoki транспорта) обладает целым рядом принципиальных отличий от традиционно рассматриваемых в МСС сред. Эти отличия наиболее ярко проявляются при решении классических задач о распаде разрывов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lighthill M.J., Whitham G.B. On kinetic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads // Proc. Roy. Soc. London A. 1955. 229, N 1178. 317-345.
2. Richards P.L. Shock waves on the highway // Oper. Res. 1956. 4. 42-51.
3. Greenberg H. An analysis of traffic flow // Oper. Res. 1959. 7. 79-85.
4. Уизем Дж.Б. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

Поступила в редакцию
04.03.99

УДК 532.516:532.59

НЕУСТОЙЧИВОСТИ И ПЕРЕФОРМИРОВАНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ВОЛН В СТЕКАЮЩИХ ПЛЕНКАХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Г. М. Сисоев; В. Я. Шкадов

Исследуются свойства нелинейных волновых решений системы эволюционных уравнений работы [1]. Эта система наряду с безволновым решением имеет двухпараметрическое многообразие решений в виде регулярных волн [2]. Подмножество этого многообразия составляют доминирующие

волны, обладающие наибольшими значениями фазовой скорости и амплитуды среди всех регулярных волн, существующих при фиксированной длине волны. Ранее обнаружено [3], что доминирующие волны образуют аттрактор для периодических по пространству нестационарных решений с начальными данными в форме малых возмущений безволнового решения. В данной статье показывается, что притягивающие свойства доминирующих волн сохраняются и при выборе начальных условий в малой окрестности других регулярных волн.

1. Рассматриваемая система эволюционных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) &= \frac{1}{5\delta} \left(h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + h - \frac{q}{h^2} \right). \end{aligned} \tag{1}$$

Пространственно-периодические решения (1) представляются в виде конечных рядов Фурье

$$\begin{aligned} h &= \sum_{k=-N}^N h_k(t) \exp i\alpha kx, & q &= \sum_{k=-N}^N q_k(t) \exp i\alpha kx, \\ h_k &= h_{-k}^*, & q_k &= q_{-k}^*, & h_0 &= 1, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\alpha = 2\pi/L$, L — период решения, верхний индекс * обозначает комплексное сопряжение. Применив метод Галеркина, можно получить динамическую систему для коэффициентов h_k , q_k , нелинейные члены которой определяются численно псевдоспектральным методом.

Среди решений (2) имеются те, которые соответствуют движущимся с постоянной скоростью нелинейным периодическим волнам, называемым регулярными. Для их нахождения из системы (1) выводится задача на собственные значения [1]

$$\begin{aligned} h^3 h''' + \delta \left[(q_0 - c)^2 - c^2 h^2 \right] h' + h^3 - q_0 - c(h - 1) &= 0, \\ h(\xi) = h(\xi + L), & h'(\xi) = h'(\xi + L), & h''(\xi) = h''(\xi + L), \\ \frac{1}{L} \int_{\xi}^{\xi+L} h d\xi &= 1 \end{aligned} \tag{3}$$

для функции $h(\xi)$, $\xi = x - ct$, и величин c и q_0 . Постановка (3) дополняется условием инвариантности решений относительно сдвига вдоль переменной ξ .

Система (1) получена в [1] при математическом моделировании волновых движений в тонких капиллярных пленках вязкой жидкости, исследование которых инициировано экспериментальной работой [4]. Эта система выводится из полной системы уравнений Навье–Стокса и соответствующих граничных условий при достаточно обоснованных предположениях. Механический смысл переменных в уравнениях (1) устанавливается соотношениями

$$\begin{aligned} T &= \frac{H_*}{\kappa U_*} t, & X &= \frac{H_*}{\kappa} x, & H &= H_* h, & Q &= H_* U_* q, & U_* &= \frac{g H_*^2}{3\nu}, \\ \delta &= \frac{1}{45\nu^2} \left(\frac{\rho H_*^{11} g^4}{\sigma} \right)^{1/3}, & \kappa &= \left(\frac{2025 \delta^2}{\gamma^3} \right)^{1/11}, & \gamma &= \frac{\sigma}{\rho(\nu^4 g)^{1/3}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь используются следующие обозначения для размерных величин: T — время, X — продольная координата, H — локальная толщина пленки и Q — расход жидкости. В (4) входят также плотность ρ и кинематическая вязкость ν жидкости, коэффициент поверхностного натяжения σ , ускорение силы тяжести g и средняя толщина пленки H_* . Влияние всех этих физических параметров на решения системы (1) проявляется через параметр подобия δ .

В работах [5–7] дается обобщение уравнений Шкадова (1) на некоторые другие механические задачи.

2. Сделаем несколько существенных для дальнейшего изложения замечаний о свойствах регулярных волн. Многообразие решений (3) включает три компоненты связности, которые в пространстве (δ, s, c) , где $s \equiv \alpha/\alpha_n \in (0, 1)$, $\alpha_n = \sqrt{15}\delta$, образуют три непрерывные поверхности с особенностями [2]. Решения, соответствующие гладким кривым в сечениях этих поверхностей плоскостями $\delta = \text{const}$, образуют семейства. Любое семейство рождается в точке бифуркации $s_n \approx 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, в которой решение близко к гармонической функции с периодом $2\pi/n$ по переменной ξ ; при этом имеются мягкий ($n = 1$) и жесткий ($n > 1$) виды бифуркаций. Решения каждого семейства преобразуются при $s \rightarrow 0$ в собственную уединенную волну, которая в зависимости от ее фазовой скорости c относится к типу быстрых ($c > 3$) или медленных ($c < 3$). Уединенные волны отличаются также числом главных горбов, которое служит отношением эквивалентности; в данной работе рассматриваются лишь одnogорбые и двугорбые семейства. Семейства обозначаются символами $\gamma_{\pm j, m}^n$, где верхний индекс n указывает на близость волны в точке бифуркации s_n к n -гармонической форме, нижний индекс содержит информацию о типе семейства (медленные — знак $-$, быстрые — знак $+$) и его номере (j) в классе одnogорбых ($m = 1$) или двугорбых ($m = 2$) решений [2]. В качестве примера на рис. 1 показаны некоторые семейства нелинейных решений (3) при $\delta = 0,1$ в проекции на плоскость (s, c) , причем график для первого семейства $\gamma_{-1,1}^1$ [1] может быть продолжен на интервал $s \in (0,6; 1,0)$. При уменьшении волнового числа s количество нелинейных решений (3) возрастает.

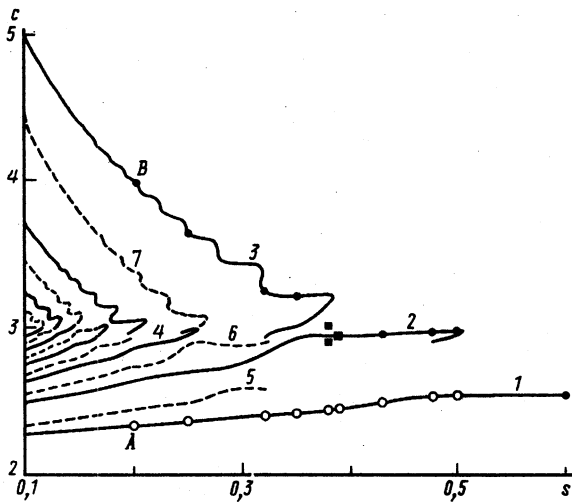


Рис. 1. Семейства нелинейных волн при $\delta = 0,1$:
 1 — $\gamma_{-1,1}^1$; 2 — $\gamma_{-2,1}^2$; 3 — $\gamma_{+1,1}^3$; 4 — $\gamma_{-3,1}^4$; 5 —
 $\gamma_{-1,2}^2$; 6 — $\gamma_{-2,2}^3$; 7 — $\gamma_{+1,2}^4$

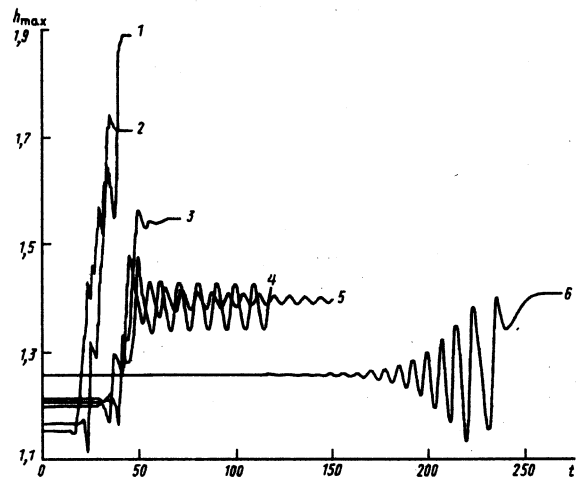


Рис. 2. Зависимость h_{\max} от времени при $\delta = 0,1$:
 1 — $s = 0,2$; 2 — $0,25$; 3 — $0,35$; 4 — $0,38$; 5 — $0,39$;
 6 — $0,5$

Среди всех возможных решений при фиксированном значении s можно выделить волны с минимальной и максимальной фазовыми скоростями. Волны с минимальной скоростью принадлежат первому семейству, бифурцирующему при $s = 1$ при любом значении δ ; при этом зависимость $c(s)$ непрерывная. Волны с максимальной скоростью принадлежат различным семействам: первому семейству для коротких волн, второму быстрому семейству [8] для длинных волн (например, семейство $\gamma_{+1,1}^3$ на рис. 1) и промежуточным медленным семействам ($\gamma_{-2,1}^2$ на рис. 1); при этом число промежуточных семейств увеличивается с ростом δ . При переходе с одного семейства на другое величина максимальной скорости изменяется скачком.

Неединственность решений (3) с заданной длиной волны при фиксированном значении параметра δ вызывает необходимость изучения их устойчивости для отбора тех, которые могут реализовываться в экспериментах. Впервые задача об устойчивости для волн первого семейства относительно малых возмущений произвольной длины рассмотрена в [9]. Показана их неустойчивость к боковым возмущениям, причем наименьшим коэффициентом усиления обладают волны с максимальным значением среднего по длине волны расхода жидкости q_0 ; такие волны были названы оптимальными режимами. Дальнейшие исследования (например, [10]) устойчивости волн первого и второго семейств в рамках линейной теории позволили определить для них отдельные области устойчивости и неустойчивости при малых значениях δ . С увеличением этого параметра и переходом к семействам с большим значением индекса j возрастают вычислительные трудности при реализации линейной теории;

поэтому полученные результаты имеют ограниченные приложения. Этим методом исследована устойчивость решений слабонелинейного уравнения, которое следует из (1) при $\delta \rightarrow 0$ [11].

Другой подход к исследованию устойчивости нелинейных решений предложен в [9], где для определения аттракторов уравнений (1) проводится прямое численное интегрирование задачи с начальными данными в виде малых возмущений безволнового решения. Систематические расчеты задачи Коши в [3] показали, что аттракторами являются лишь волны с максимальной фазовой скоростью. Притягивающие регулярные волны были названы доминирующими. Для значений волнового числа в окрестности перехода множества волн с максимальной скоростью с одного семейства на другое были также обнаружены колебательные режимы.

3. В данной работе продолжены эти исследования семейств динамических систем, порождаемых уравнениями (1), для коэффициентов h_k, q_k решений (2); параметры систем — δ и α (или s). Каждой регулярной волне — решению (3) в фазовом пространстве — соответствует тор размерности $2N$ в фазовом пространстве. Использование в качестве начальных условий численно найденных коэффициентов Фурье регулярных волн позволяет исследовать их устойчивость. Если изучаемая установившаяся волна устойчива, то нестационарное решение будет лишь уточнять ее, притягиваясь к соответствующему тору в фазовом пространстве; в противном случае волновая структура в физическом пространстве (x, h) будет преобразовываться с течением времени, в фазовом пространстве решение покинет окрестность тора.

Результаты расчетов показывают, что при заданных значениях s и δ : а) неустойчивы все регулярные волны за исключением доминирующей волны; б) аттрактором служит доминирующая волна или при особых значениях параметров колебательный режим. Это означает, что глобальный аттрактор (1), притягивающий решение из малой окрестности любого другого установившегося нелинейного решения, составлен преимущественно из доминирующих волн.

Примеры некоторых расчетов эволюции волн первого семейства и переходов к доминирующим волнам показаны на рис. 1, 2. На рис. 1 незаполненными и зачерненными кружками отмечены фазовые скорости начальных и предельных по времени волн соответственно. Различные сценарии переходов демонстрируются на рис. 2 на примере изменения максимальной толщины пленки h_{\max} .

Заштрихованными квадратами на рис. 1 отмечены два особых предельных случая при $s = 0,38$ и $s = 0,39$. При $s = 0,39$ решение выходит на доминирующий режим четко выраженным колебательным образом (рис. 2, кривая 5). При $s = 0,38$ (рис. 2, кривая 4) формируется колебательный режим с постоянной амплитудой (отмечены максимальное и минимальное значения скорости первой гармоники); подобные режимы обнаружены также в [3]. Единственный нелинейный режим при $s = 0,6$ — волна первого семейства — с течением времени не изменяется.

На рис. 3, а в различные моменты времени показаны волновые поверхности пленки при $s = 0,2$ (переход из точки А в точку В на рис. 1 и кривая 1 на рис. 2). Начальная волна первого семейства ($t = 0$) неустойчива, причем согласно линейной теории развиваются возмущения, соответствующие максимальному значению коэффициента усиления для пленки, толщина которой определяется на участке ее слабого изменения ($t = 20$). Дальнейшее нелинейное развитие приводит к формированию волновой поверхности с двумя горбами ($t = 28$). В результате сложной эволюции формируется волна второго семейства ($t = 48$). Нелинейная динамика

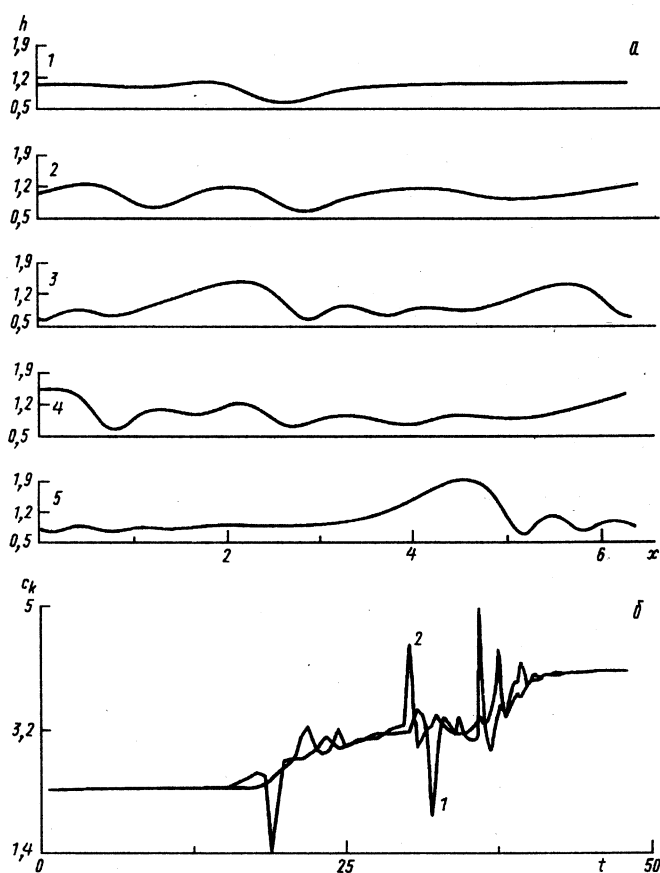


Рис. 3. Эволюция нелинейных волн: а — волновые поверхности: 1 — $t = 0$; 2 — 20; 3 — 28; 4 — 37; 5 — 48; б — скорости гармоник c_k : 1 — $k = 2$; 2 — 4

отражена также на рис. 3, б, где представлена временная зависимость фазовых скоростей некоторых гармоник c_k . В начальный момент времени скорости всех гармоник равны, нелинейное развитие решения сопровождается их рассогласованием; формирование доминирующей волны связано с синхронизацией фаз всех гармоник. Сложная динамика скоростей гармоник и их амплитуд, изменяющаяся поверхность пленки на промежуточном этапе эволюции демонстрируют переход от регулярного волнового режима к хаотическому и последующую самоорганизацию системы в новую упорядоченную структуру. Можно отметить, что для возникающей двугорбой волны (рис. 3, $t = 28$) скорости гармоник сближаются и образуется почти когерентная структура, близкая к доминирующей волне, длина которой составляет половину длины рассчитываемой волны; вследствие неустойчивости эта структура продолжает преобразовываться. В целом эволюция решений происходит по следующим этапам: разрушение нелинейной волны, нелинейное взаимодействие гармоник, синхронизация фаз и настройка амплитуд гармоник.

Согласно [3], притягивающие свойства доминирующих волн ослабляются при $s \rightarrow 0$. В [12] показано, что развитие предельно длинных волн может приводить к чередованию во времени сильно когерентных структур, близких к уединенным волнам, и нестационарных периодических решений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 97-01-00153, 98-01-03559.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шкадов В.Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1967. № 1. 43–50.
2. Сисоев Г.М., Шкадов В.Я. О двухпараметрическом многообразии волновых решений уравнения стекающей пленки вязкой жидкости // Докл. РАН. 1999. 367, № 1. 56–61.
3. Сисоев Г.М., Шкадов В.Я. Доминирующие волны в стекающих пленках вязкой жидкости // Докл. РАН. 1997. 357, № 4. 483–486.
4. Капица П.Л., Капица С.П. Волновые течения тонких слоев жидкости // Журн. эксперим. и теор. физ. 1949. 10, № 4. 105–120.
5. Yu L.-Q., Wasden F.K., Duckler A.E., Balakotaiah V. Nonlinear evolution of waves on falling films at high Reynolds numbers // Phys. Fluids. 1995. 7. 1886–1902.
6. Зейтунян Р.Х. Проблемы термокапиллярной неустойчивости Бенара–Марангони // Успехи физ. наук. 1998. 168, № 3. 259–286.
7. Ruyer-Quil C., Manneville P. Modeling film flows down inclined planes // Europ. Phys. J. 1998. B6. 277–292.
8. Бунов А.В., Демехин Е.А., Шкадов В.Я. О неединственности нелинейных волновых решений в вязком слое // Прикл. матем. и механ. 1984. 48, вып. 4. 691–696.
9. Шкадов В.Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1968. № 2. 20–25.
10. Демехин Е.А., Каплан М.А., Шкадов В.Я. Устойчивость двумерных стационарных волн в слое вязкой жидкости к трехмерным возмущениям // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1990. № 4. 48–52.
11. Demekhin Ye.A., Tokarev G.Yu., Shkadov V.Ya. Hierarchy of bifurcations of space-periodic structures in a nonlinear model of active dissipative media // Phys. D. 1991. 52. 338–361.
12. Сисоев Г.М., Шкадов В.Я. Неустойчивость и когерентность нестационарных уединенных волн в жидких пленках // Докл. РАН. 1998. 363, № 4. 489–493.

Поступила в редакцию
01.11.99