

## МЕТОДЫ ОБОБЩЕННОЙ ЭРМИТОВОЙ ГЕОМЕТРИИ В ТЕОРИИ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

*В. Ф. Кириченко*

### Предисловие

Почти эрмитовы многообразия, в частности, келеровы многообразия являются предметом интенсивного исследования в дифференциальной геометрии. Однако, хотя геометрия таких многообразий является частным случаем римановой геометрии, традиционные методы римановой геометрии плохо улавливают специфику почти эрмитовой структуры, вносимую наличием почти комплексной структуры на таком многообразии. В последнее время в ряде работ был разработан более эффективный аппарат исследования таких многообразий. Его применение позволило получить ряд сильных результатов, касающихся геометрии почти эрмитовых структур. Естественное развитие этого аппарата привело к понятию обобщенной почти эрмитовой структуры, охватывающему, наряду с классическим понятием почти эрмитовой структуры, ряд других дифференциально-геометрических структур, широко обсуждаемых в печати, таких, как почти эрмитовы структуры гиперболического типа, почти контактные метрические структуры классического и гиперболического типов, метрические  $f$ -структуры и другие. Цель настоящей работы — осветить новые результаты в геометрии почти контактных метрических структур, недавно полученные с использованием этого аппарата. В первой главе мы рассмотрим алгебраический аспект упомянутого выше аппарата. Центральным понятием этого аспекта является понятие  $Q$ -алгебры над кольцом с инволюцией. Антилинейность операции композиции в  $Q$ -алгебре определяет существенную специфику ее свойств по сравнению с классическими алгебраическими конструкциями. В то же время условие согласованности операции композиции с метрикой позволяет выявить большое значение в теории  $Q$ -алгебр таких классических понятий, как абелевость, полупро-

стота, простота и редуцируемость. Здесь же обсуждается понятие спектра тензора в  $Q$ -алгебре, играющее большую роль в последующем изложении. Вторая глава посвящена введению и рассмотрению обобщенных почти эрмитовых структур на гладких многообразиях. Здесь рассмотрен ряд фактов теории обобщенных почти эрмитовых структур, играющих фундаментальную роль в последующем изложении и широко обобщающих многие хорошо известные факты классической теории почти эрмитовых структур. В третьей главе приведен краткий обзор теории почти контактных метрических структур и их основных подклассов. Рассмотрен класс обобщенных почти контактных структур как обобщенных почти эрмитовых структур дефекта 1. Последнее обстоятельство накладывает существенную специфику на методы исследования таких структур. Показано, как использование техники обобщенных почти эрмитовых структур позволяет не только широко обобщить основные понятия и задачи классической теории почти контактных метрических структур, но и получить ряд окончательных результатов, касающихся геометрии некоторых их важнейших классов.

## Глава I

### $Q$ -АЛГЕБРЫ

$Q$ -алгебра является весьма естественным алгебраическим объектом. Это подтверждается тем, что основные свойства  $Q$ -алгебр остаются справедливыми в гораздо более общей ситуации, чем та, которая нужна для непосредственных геометрических приложений. Своеобразие понятия  $Q$ -алгебры заключается в том, что в отличие от классических алгебраических конструкций основные операции в  $Q$ -алгебре нелинейны, точнее, антилинейны. Ввиду этого наряду с определенным параллелизмом свойств некоторых типов  $Q$ -алгебр с классическими алгебраическими конструкциями (например, редуцируемыми алгебрами Ли), подчас имеет место существенное расхождение с классической ситуацией. В свою очередь, в таких свойствах  $Q$ -алгебр заложено объяснение ряда «загадочных» свойств топологического характера, которые в последние годы стали обнаруживаться рядом авторов (см., например, [22], [23], [25], [38]).

#### § 1. Понятие $Q$ -алгебры

Пусть  $\mathfrak{R}$  — кольцо с инволюцией  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$  ( $\alpha \in \mathfrak{R}$ ),  $V$  — левый  $\mathfrak{R}$ -модуль,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — невырожденная эрмитова форма на  $V$ , т. е. отображение  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathfrak{R}$  такое, что:

$$1. \langle X + Y, Z \rangle = \langle X, Z \rangle + \langle Y, Z \rangle;$$

2.  $\langle X, Y \rangle = \overline{\langle Y, X \rangle}$ ;
3.  $\langle X, Y \rangle = 0 \forall Y \in V \Rightarrow X = 0$ ;  $X, Y, Z \in V$ .

Форма  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  называется скалярным произведением. Если дополнительно выполняется условие  $\langle \alpha X, Y \rangle = \alpha \langle X, Y \rangle$  ( $\alpha \in \mathfrak{R}$ ;  $X, Y \in V$ ); форма  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  называется собственно эрмитовой.

Форма  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  называется расщепляющим скалярным произведением, или метрикой, если для каждого подмодуля  $U \subset V$ , ограничение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  на который невырождено,  $V = U \oplus U^\perp$ , где  $U^\perp$  — ортогональное дополнение  $U$ . Метрика  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  называется строго невырожденной, если для всякого подмодуля  $U \subset V$  ее ограничение на  $U$  невырождено. Например, скалярное произведение в конечномерном векторном пространстве расщепляющее, а в евклидовом пространстве строго невырожденное.

Определение 1.  $Q$ -алгебра  $V$  определяется свойствами:

1.  $V$  —  $\mathfrak{R}$ -модуль с расщепляющим скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ;
2.  $V$  —  $\mathfrak{R}$ -алгебра с бинарной операцией композиции  $*$ :  $V \times V \rightarrow V$ , антилинейной по каждому аргументу;
3.  $\langle X * Y, Z \rangle + \langle Y, X * Z \rangle = 0$ ;  $X, Y, Z \in V$ . (1)

$Q$ -алгебра с собственно эрмитовой метрикой называется эрмитовой.  $Q$ -алгебра  $V$  называется правильной, если всякий ее левый идеал  $\mathcal{I}$  является двусторонним, т. е.  $V * \mathcal{I} \subset \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{I} * V \subset \mathcal{I}$ .

Рассмотрим важные примеры правильных  $Q$ -алгебр.

Пример 1.  $K$ -алгеброй называется антикоммутативная  $Q$ -алгебра. Очевидно,  $K$ -алгебра правильна, причем ее левый и правый аннуляторы совпадают с двусторонним аннулятором:  $\mathfrak{A}_l(V) = \mathfrak{A}_r(V) = \mathfrak{A}(V)$ .

Пример 2.  $A$ -алгеброй называется  $Q$ -алгебра  $V$  такая, что  $\langle X * Y, Z \rangle + \langle Y * Z, X \rangle + \langle Z * X, Y \rangle = 0$  ( $X, Y, Z \in V$ ).

Теорема 1 ([6]). Левый аннулятор  $A$ -алгебры совпадает с двусторонним аннулятором.  $A$ -алгебра со строго невырожденной метрикой является правильной.

Приведем пример  $Q$ -алгебры, сконструированной явным образом.

Пример 3. Пусть  $\mathfrak{F}$  — полупростая комплексная алгебра Ли,  $\mathfrak{F}_R$  — ее вещественная форма,  $\sigma: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$  — инволюция, соответствующая  $\mathfrak{F}_R$  [2]. Хорошо известно, что  $\mathfrak{F}_R$  может быть выбрана компактной [2]. Определим в  $\mathfrak{F}$  операцию «\*» формулой  $X * Y = \sigma([X, Y])$  ( $X, Y \in \mathfrak{F}$ ) и форму  $\langle X, Y \rangle = -\mathcal{H}(X, \sigma Y)$ ;  $X, Y \in \mathfrak{F}$ , где  $\mathcal{H}(\cdot, \cdot)$  — форма Киллинга алгебры  $\mathfrak{F}$ . Очевидно, форма  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  эрмитова и невырождена, более того, она положительно определена тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{F}_R$  — компактная вещественная форма). Используя хорошо известные свойства формы Киллинга, легко показать справедливость (1) в  $\mathfrak{F}$ . Следовательно, в  $\mathfrak{F}$  введена структура  $K$ -алгебры над полем  $\mathbb{C}$

комплексных чисел. Отметим, что в этой  $K$ -алгебре фиксирована инволюция  $\sigma$ , являющаяся антиавтоморфизмом этой  $K$ -алгебры, в том смысле, что  $\sigma(X*Y) = \sigma X * \sigma Y$ ;  $\langle \sigma X, \sigma Y \rangle = \langle X, Y \rangle$ ;  $X, Y \in \mathfrak{S}$ . Назовем эту  $K$ -алгебру с инволюцией групповой  $K$ -алгеброй (компактной в случае, если  $\mathfrak{S}_R$  — компактная вещественная форма) и обозначим ее  $\mathfrak{B}(\mathfrak{S}, \sigma)$ . Очевидно, группа автоморфизмов  $\text{Aut } \mathfrak{B}(\mathfrak{S}, \sigma)$  групповой  $K$ -алгебры совпадает с группой автоморфизмов алгебры Ли  $\mathfrak{S}$ , сохраняющих инволюцию, т. е. с группой автоморфизмов  $\text{Aut } \mathfrak{S}_R$ . Алгебра Ли этой группы есть алгебра Ли дифференцирований  $\text{Der } \mathfrak{S}_R$ , которая в силу полупростоты  $\mathfrak{S}_R$  совпадает с идеалом внутренних дифференцирований, изоморфным  $\mathfrak{S}_R/\mathfrak{Z}(\mathfrak{S}_R)$  [2], где  $\mathfrak{Z}(\mathfrak{S}_R)$  — центр алгебры  $\mathfrak{S}_R$ , равный нулю в силу ее полупростоты. Значит, связанная группа Ли, соответствующая алгебре Ли  $\mathfrak{S}_R$ , является компонентой единицы группы Ли  $\text{Aut } \mathfrak{S}_R$ , и мы получаем следующий результат:

**Теорема 2.** Группа автоморфизмов групповой  $K$ -алгебры — вещественная полупростая группа Ли. Обратно, всякая связанная полупростая вещественная группа Ли является компонентой единицы группы автоморфизмов некоторой групповой  $K$ -алгебры. Компактность этой группы равносильна компактности этой  $K$ -алгебры. ►

Пусть  $Q$ -алгебра  $V$  является унитарным нётеровым модулем над коммутативным кольцом  $\mathfrak{K}$ . В силу невырожденности ее метрики  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $\exists e_1 \in V: \langle e_1, e_1 \rangle \neq 0$ . Значит, сужение  $g|_{\mathfrak{K}e_1}$  невырождено, и в силу расщепляемости метрика  $g|_{(\mathfrak{K}e_1)^\perp}$  невырождена. Следовательно, в  $(\mathfrak{K}e_1)^\perp$  существует вектор  $e_2$  такой, что  $\langle e_2, e_2 \rangle \neq 0$ , и т. д. В силу нётеровости  $V$  процесс нахождения таких векторов оборвется на конечном шаге, когда мы найдем такой вектор  $e_n$ , что  $V = \left( \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{K}e_i \right) \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{K}e_i \right)^\perp$ . Поскольку процесс непродолжаем,  $\left( \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{K}e_i \right)^\perp = \{0\}$ , и  $V = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{K}e_i$ , т. е.  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — семейство образующих модуля  $V$ . Обозначим  $\text{Ann } U$   $\mathfrak{K}$ -аннулятор подмножества  $U \subset V$ , т. е.  $\text{Ann } U = \{\alpha \in \mathfrak{K} \mid \alpha U = 0\}$ . Построим отображения  $\varphi_i: \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}e_i$ ;  $\varphi_i(X) = Xe_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Это, очевидно, эпиморфизм  $\mathfrak{K}$ -модулей, и по теореме об эпиморфизме [3],  $\mathfrak{K}e_i \cong \mathfrak{K}/\text{Ann } e_i$ . отождествляя эти модули, мы можем записать, что  $\forall X \in V$  однозначно представляется в виде суммы  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $X_i \in \mathfrak{K}/\text{Ann } e_i$ . Ввиду этого, систему векторов  $\{e_1, \dots, e_n\}$  назовем ортогональным базисом  $Q$ -алгебры  $V$ , а элементы  $X_i$  — координатами  $X$  в этом базисе. В частном случае, когда  $\text{Ann } e_i = \{0\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), ортогональный базис  $Q$ -алгебры будет ее базисом как  $\mathfrak{K}$ -модуля. В другом частном случае, когда аннуляторы всех элементов ортогонального базиса совпадают и, следовательно, совпадают с аннулятором

Апп  $V$ ,  $V$  не будет точным  $\mathbb{K}$ -модулем, и мы можем его отождествить с модулем над кольцом  $\mathbb{K}/\text{Апп } V$ . В этом случае элементы  $\{e_1, \dots, e_n\}$  будут образовывать базис  $V$ , рассматриваемый как  $\mathbb{K}/\text{Апп } V$ -модуль. С другой стороны, из нётеровости  $V = \mathbb{K}/\text{Апп } V \oplus \dots \oplus \mathbb{K}/\text{Апп } V$  ( $n$  слагаемых) следует нётеровость кольца  $\mathbb{K}/\text{Апп } V$  [1], следовательно, и любой базис  $V$ , рассматриваемый как  $\mathbb{K}/\text{Апп } V$ -модуль, в частности, любой ортогональный базис  $V$ , состоит из  $n$  элементов [1]. Такие  $Q$ -алгебры будут играть существенную роль в дальнейшем изложении, и мы примем следующее

**Определение 2.**  $Q$ -алгебру  $V$ , являющуюся унитарным нётеровым модулем над коммутативным кольцом  $\mathbb{K}$  и допускающую ортогональный базис, элементы которого имеют одинаковый  $\mathbb{K}$ -аннулятор (необходимо совпадающий с  $\text{Апп } V$ ), назовем голоморфной  $Q$ -алгеброй.  $Q$ -алгебру, распадающуюся в конечную ортогональную прямую сумму голоморфных идеалов, назовем полуголоморфной.

Согласно сказанному, полуголоморфная  $Q$ -алгебра допускает конечный ортогональный базис, составленный из ортогональных базисов ее голоморфных составляющих, и всякий такой базис содержит одинаковое число элементов. Назовем это число размерностью полуголоморфной  $Q$ -алгебры. Если элементы этого базиса имеют обратимые скалярные квадраты (рассматриваемые как элементы соответствующего факторкольца), ортогональный базис назовем псевдоунитарным.

**Предложение 1.** Эрмитова  $Q$ -алгебра  $V$ , являющаяся унитарным нётеровым модулем над областью целостности  $\mathbb{K}$ , голоморфна.

Пусть  $X \in V$ ,  $\langle X, X \rangle \neq 0$ ,  $\alpha \in \text{Апп } V$ . Тогда  $0 = \langle \alpha X, X \rangle = \alpha \langle X, X \rangle$ . Поскольку  $\mathbb{K}$  не имеет делителей нуля,  $\text{Апп } X = \{0\}$ .  $\blacktriangleright$

**Следствие.** Эрмитова  $Q$ -алгебра, являющаяся конечномерным векторным пространством над полем  $\mathbb{K}$ , является голоморфной.  $\blacktriangleright$

## § 2. Полупростые и редуцированные $Q$ -алгебры

**Определение 1.** Говорят, что  $Q$ -алгебра  $V$  распадается в прямое произведение подмодулей  $A_1, \dots, A_r$ , если

$$1. V = A_1 \oplus \dots \oplus A_r; \quad 2. A_i * A_j \subset \begin{cases} A_i & (i = j) \\ \{0\} & (i \neq j) \end{cases}$$

В этом случае подмодули  $A_1, \dots, A_r$  являются, очевидно, двусторонними идеалами  $V$ . Введем обозначение  $V = A_1 \times \dots \times A_r$ . Если  $A_i \perp A_j$  ( $i \neq j$ ), прямое произведение называется ортогональным.

В дальнейшем термином «идеал» мы будем обозначать двусторонний идеал, если не оговорено противное.

Определение 2.  $Q$ -алгебра  $V$  называется абелевой, если  $V * V = \{0\}$ , простой, если она не содержит нетривиальных идеалов, полупростой, если она не содержит ненулевых абелевых идеалов, и редуktивной, если она правильна и распадается в прямое произведение абелева идеала и полупростого идеала.

Пример 1. Групповая  $K$ -алгебра  $\mathfrak{B}(\mathfrak{Z}, \sigma)$  полупроста. В самом деле, пусть  $A \subset \mathfrak{B}$  — абелев идеал. Тогда  $\sigma A$  — тоже абелев идеал и, значит,  $A \cap \sigma A$  — абелев идеал, инвариантный относительно  $\sigma$  и, следовательно, являющийся абелевым идеалом в  $\mathfrak{Z}$ . Ввиду полупростоты  $\mathfrak{Z}$ ,  $A \cap \sigma A = \{0\}$ . Но тогда  $A \oplus \sigma A$  — абелев идеал в  $\mathfrak{B}$ , инвариантный относительно  $\sigma$ , следовательно, являющийся абелевым идеалом в  $\mathfrak{Z}$ . В силу ее полупростоты,  $A \oplus \sigma A = \{0\}$ , откуда  $A = \{0\}$ .

Теорема 1 ([6]). Пусть  $V$  — правильная полупростая  $Q$ -алгебра. Тогда  $V * V = V$ . Если  $V$  редуktивна, справедливо и обратное.

Теорема 2 ([6]). Правильный идеал редуktивной  $Q$ -алгебры является редуktивной  $Q$ -алгеброй. Более того, пусть  $U \subset V$  — правильный идеал редуktивной  $Q$ -алгебры,  $W$  — правильный идеал в  $U$ . Тогда  $W$  — идеал  $Q$ -алгебры  $V$ . Если  $V$  полупроста, предположение о правильности  $U$  и  $W$  можно опустить.

Следующая теорема дает исчерпывающее описание строения редуktивных  $Q$ -алгебр:

Теорема о разложении для  $Q$ -алгебр ([6]). Всякая редуktивная  $Q$ -алгебра распадается в ортогональное прямое произведение абелева идеала и неабелевых простых идеалов, и притом единственным образом с точностью до порядка сомножителей.

Указанное разложение редуktивной  $Q$ -алгебры называется каноническим.

Заметим в заключение, что понятие редуktивной  $Q$ -алгебры обобщает понятие правильной  $Q$ -алгебры со строго невырожденной метрикой. Именно, справедлив следующий результат:

Теорема 3 ([6]). Правильная  $Q$ -алгебра со строго невырожденной метрикой является редуktивной  $Q$ -алгеброй.

Следствие ([6]).  $K$ -алгебра и  $A$ -алгебра, снабженные строго невырожденными метриками, обладают каноническим разложением.

### § 3. Натуральные $Q$ -алгебры

Пусть  $V^R$  — эрмитова  $Q$ -алгебра с тривиальной инволюцией — тождественным отображением — над коммутативным ассоциативным кольцом  $\mathcal{O}$  с единицей,  $J_0 = \text{id}$ ,  $J_1, \dots, J_r$  — линейно независимые попарно коммутирующие эндоморфизмы модуля  $V^R$ , являющиеся вместе со своими квадратами образующими некоторого подмодуля  $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(J_1, \dots, J_r)$ , являющегося

подалгеброй алгебры всех эндоморфизмов модуля  $V^R$ , и удовлетворяющие следующим условиям:

$$1. J_i(X)*Y = X*J_i(Y) = -J_i(X*Y); 2. \langle J_i X, Y \rangle + \langle X, J_i Y \rangle = 0; 3. \bigcap_{i=1}^r \ker J_i \subset \mathfrak{A}(V^R); \quad (1)$$

$$(i = 1, \dots, r; X, Y \in V^R).$$

Введем в алгебре  $\mathfrak{K}$  инволюцию соотношениями  $\bar{J}_0 = J_0$ ,  $\bar{J}_i = -J_i$ ,  $\bar{J}_i^2 = J_i^2$ . Это возможно ввиду (1<sub>2</sub>). В самом деле, из определения  $Q$ -алгебры следует, что  $J_i J_j = \alpha_0 \text{id} + \sum_{k=1}^r \alpha_k J_k + \sum_{k=0}^r \beta_k J_k^2$ ;  $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k \in \mathcal{O}$ ;  $i, j, k = 1, \dots, r$ . Применив обе части этого равенства к  $X \in V^R$  и скалярно умножив на  $Y \in V^R$ , с учетом (1<sub>2</sub>), коммутативности кольца  $\mathcal{O}$  и невырожденности метрики, получим, что  $\alpha_k = 0$  и, значит,  $\bar{J}_i \bar{J}_j = J_i J_j = \bar{J}_i \bar{J}_j$ , откуда следует, что  $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$ ;  $a, b \in \mathfrak{K}$ .

Введем в  $V^R$  структуру  $\mathfrak{K}$ -модуля, положив  $\left( \sum_{i=0}^r \alpha_i J_i + \sum_{i=0}^r \beta_i J_i^2 \right) (X) = \sum_{i=0}^r \alpha_i J_i(X) + \sum_{i=0}^r \beta_i J_i^2(X)$ , а также форму

$\langle\langle X, Y \rangle\rangle = \sum_{i=0}^r \langle J_i^3 X, Y \rangle J_i$ . Из (1<sub>2</sub>) и линейной независимости эндоморфизмов  $J_0, \dots, J_r$  следует невырожденность и эрмитовость этой формы. Покажем, что она является метрикой на  $\mathfrak{K}$ -модуле  $V^R$ . Пусть  $U \subset V^R$  —  $\mathfrak{K}$ -модуль, сужение « $\cdot, \cdot$ » на который невырождено. Тогда сужение « $\cdot, \cdot$ » на  $U$ , а значит, и сужение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  на  $U$ , рассматриваемый как  $\mathcal{O}$ -модуль, также невырождены. Следовательно,  $V^R = U \oplus U^\perp$ . Из (1<sub>2</sub>) легко следует инвариантность  $U^\perp$  относительно эндоморфизмов  $J_1, \dots, J_r$ . Следовательно,  $U^\perp$  является  $\mathfrak{K}$ -подмодулем. Наконец, с учетом (1<sub>2</sub>) непосредственно проверяется, что  $\langle\langle X*Y, Z \rangle\rangle + \langle\langle Y, X*Z \rangle\rangle = 0$  ( $X, Y, Z \in V^R$ ), т. е. тройка  $\{V^R, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle, *\}$  определяет  $Q$ -алгебру  $V$  над  $\mathfrak{K}$ , которая называется натуральной  $Q$ -алгеброй ранга  $r$ , причем  $Q$ -алгебра  $V^R$  называется ее  $\mathcal{O}$ -формой, или  $\mathcal{O}$ -реализацией, а эндоморфизмы  $J_1, \dots, J_r$  — структурными аффинорами, или структурными операторами. В случае  $\mathcal{O} = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{O}$ -реализация называется вещественной реализацией.

Пример 1. Эрмитова  $Q$ -алгебра  $V$  над полем  $\mathbb{C}$  комплексных чисел является натуральной  $Q$ -алгеброй ранга 1. Она на-

зывается  $Q$ -алгеброй эллиптического типа, или комплексной  $Q$ -алгеброй. Поскольку  $\mathbb{C}$  — поле, всякая конечномерная комплексная  $Q$ -алгебра является голоморфной, а всякий ее ортогональный базис — псевдоунитарным. Вещественная форма такой  $Q$ -алгебры — это о веществе  $V$  как комплексного векторного пространства, с метрикой

$$(X, Y) = \operatorname{Re}\langle X, Y \rangle \quad (X, Y \in V).$$

**Пример 2.** Эрмитова  $Q$ -алгебра  $V$  над кольцом  $\mathbb{D}$  двойных чисел является натуральной  $Q$ -алгеброй ранга 1. Она называется  $Q$ -алгеброй гиперболического типа. Поскольку  $\forall X \in V \Rightarrow \langle X, X \rangle \in \mathbb{R}$ , неизотропные векторы такой  $Q$ -алгебры имеют нулевой  $\mathbb{D}$ -аннулятор, ввиду чего всякая  $Q$ -алгебра гиперболического типа, имеющая конечномерную вещественную реализацию, является голоморфной, а всякий ее ортогональный базис является псевдоунитарным.

**Пример 3.** Эрмитова  $Q$ -алгебра над полем  $\mathbb{R}$  вещественных чисел с тривиальной инволюцией — тождественным отображением — является натуральной  $Q$ -алгеброй ранга 0; она называется  $Q$ -алгеброй параболического типа, или вещественной  $Q$ -алгеброй. Как и в первом примере, всякая конечномерная вещественная  $Q$ -алгебра является голоморфной, а всякий ее ортогональный базис — псевдоунитарным.

Пусть  $\mathcal{I} \subset V$  — идеал натуральной  $Q$ -алгебры. Он, вообще говоря, не будет точным  $\mathbb{R}$ -модулем. Ввиду этого его можно отождествить с модулем над факторкольцом по соответствующему аннулятору.

**Пример 4.** Пусть  $V_1$  и  $V_2$  —  $Q$ -алгебры эллиптического и гиперболического типов со структурными аффинорами  $J$  и  $I$  соответственно. Рассмотрим модуль  $V_{\mathbb{R}} = V_1 \mathbb{R} \oplus V_2 \mathbb{R}$ . Его можно рассматривать как натуральную  $Q$ -алгебру  $V$  ранга 2 над кольцом  $\mathbb{R} = \mathbb{R}(J \oplus 0, 0 \oplus I)$  со структурными аффинорами  $J \oplus 0$  и  $0 \oplus I$ , метрика и операция композиции в которой являются прямой суммой метрик и операций композиции  $Q$ -алгебр слагаемых. Непосредственно проверяется эрмитовость этой  $Q$ -алгебры. В этой  $Q$ -алгебре, однако, подмодули  $V_1$  и  $V_2$  не будут точными над  $\mathbb{R}$ . Ввиду указанного выше отождествления, можно считать, что  $V$  распадается в прямое произведение идеалов эллиптического и гиперболического типов. Очевидно,  $\mathbb{R}$ -аннулятор каждого неизотропного элемента в любом из этих идеалов совпадает с идеалом кольца  $\mathbb{R}$ , порожденным структурным аффинором второго идеала. Следовательно, эти идеалы являются голоморфными, а  $V$  — полуголоморфная  $Q$ -алгебра. Кроме того, поскольку скалярный квадрат каждого элемента этих идеалов является вещественным числом (как элемент соответствующего факторкольца), любой ортогональный базис такой  $Q$ -алгебры является псевдоунитарным. Более того, эти выводы, очевидно, остаются справедливыми для  $Q$ -алгебр, распадающихся в пря-

мое произведение идеалов эллиптического и гиперболического типа, содержащее любое конечное число сомножителей.

Определение 1. Вещественные реализации  $Q$ -алгебр эллиптического либо гиперболического типов называются, соответственно, вещественными  $Q$ -алгебрами эллиптического либо гиперболического типов.

Определение 2. Подмодуль  $U$  вещественной реализации натуральной  $Q$ -алгебры  $V$  называется подмодулем параболического типа, если  $U \otimes \mathbb{R} = U$ .

В силу (1<sub>3</sub>), для такого подмодуля  $U \subset \bigcap_{i=1}^r \ker J_i \subset \mathfrak{A}(V^R)$  ( $r > 0$ ), в частности, имеет место следующее

Предложение 1. Подмодуль параболического типа вещественной реализации натуральной  $Q$ -алгебры ненулевого ранга является двусторонним абелевым идеалом. ►

#### § 4. Расщепляемые и псевдорасщепляемые $Q$ -алгебры

Пусть  $V$  — натуральная  $Q$ -алгебра над  $\mathbb{R}$ ,  $V^R$  — ее  $\mathcal{O}$ -форма. Рассмотрим  $\mathbb{R}$ -модуль  $V^R \otimes \mathbb{R}$ . В нем естественным образом определен оператор сопряжения  $\tau$ , действующий по формуле

$$\tau \left( \sum_i a_i X_i \right) = \sum_i \bar{a}_i X_i \quad (a_i \in \mathbb{R}, X_i \in V^R),$$

а также структура натуральной  $Q$ -алгебры относительно операции  $X \cdot Y = \tau(X * Y)$ , где «\*» — продолжение по линейности операции из  $V^R$ , и метрики  $H(X, Y) = 2\langle X, \tau Y \rangle$ , где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — продолжение по линейности метрики  $Q$ -алгебры  $V^R$ .

Определение 1. Натуральная  $Q$ -алгебра  $V$  называется расщепляемой, если существует изометричное вложение  $\sigma: V \rightarrow V^R \otimes \mathbb{R}$   $Q$ -алгебры  $V$  такое, что  $(\sigma V) \cap (\bar{\sigma} V) = \{0\}$ , где  $\bar{\sigma} = \tau \circ \sigma$ . Введем обозначение  $V^{\mathbb{R}} = (\sigma V) \oplus (\bar{\sigma} V)$ .

Пример 1.  $Q$ -алгебра параболического типа нерасщепляема, поскольку  $V \otimes \mathbb{R} = V$ .

Пример 2.  $Q$ -алгебры  $V$  эллиптического либо гиперболического типа расщепляемы. Именно, непосредственная проверка показывает, что отображение  $\sigma: V \rightarrow V^R \otimes \mathbb{R}$ ;  $\sigma = \frac{1}{2}(\text{id} + j^3 J)$  обладает всеми требуемыми свойствами.

Пример 3.  $Q$ -алгебра  $V = V_1 \times V_2$  (где  $V_1$  и  $V_2$  —  $Q$ -алгебры эллиптического и гиперболического типа соответственно) — расщепляемая  $Q$ -алгебра. В самом деле, рассмотрим векторное пространство  $V^R = V_1^R \oplus V_2^R$ . Его можно рассматривать как  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{D}$ -модуль, положив  $(a, b)(X, Y) = (aX, bY)$ ;  $a \in \mathbb{C}$ ,  $b \in \mathbb{D}$ ,  $X \in V_1^R$ ,  $Y \in V_2^R$ . Значит, определено тензорное произведение  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{D}$ -модулей  $(V_1^R \oplus V_2^R) \otimes$

$\otimes(\mathbf{C} \oplus \mathbf{D}) \cong (V_1^R \otimes \mathbf{C}) \oplus (V_2^R \otimes \mathbf{C}) \oplus (V_1^R \otimes \mathbf{D}) \oplus (V_2^R \otimes \mathbf{D})$ . Определим отображение  $\sigma = \sigma_1 \oplus \sigma_2: V_1 \oplus V_2 \subset (V_1^R \otimes \mathbf{C}) \oplus (V_2^R \otimes \mathbf{D}) \subset (V_1^R \oplus V_2^R) \otimes (\mathbf{C} \oplus \mathbf{D})$  с учетом отождествления каноническим изоморфизмом  $\kappa$ . Очевидно, это отображение является мономорфизмом  $Q$ -алгебры  $V_1 \oplus V_2$ , причем  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2$  и, значит,  $\sigma(V_1 \oplus V_2) \cap \bar{\sigma}(V_1 \oplus V_2) = \{0\}$ . Непосредственно проверяется изометричность  $\sigma: H(\sigma Z_1, \sigma Z_2) = \langle Z_1, Z_2 \rangle$ ;  $Z_1, Z_2 \in V$ . Далее, как отмечено в предыдущем параграфе,  $V_1 \oplus V_2$  можно рассматривать как  $\mathfrak{K}(J \oplus 0, 0 \oplus I)$ -модуль, положив  $\{a + b(J \oplus 0) + c(0 \oplus I)\}(X, Y) = (aX + bJX, aY + cIY)$ ;  $a, b, c \in \mathbf{R}$ ;  $X \in V_1, Y \in V_2$ . С другой стороны, образ  $\sigma$  лежит в модуле  $(V_1^R \oplus V_2^R) \otimes \mathfrak{K}(J \oplus 0, 0 \oplus I)$ , поскольку  $\sigma = \sigma_1 \oplus \sigma_2 = \frac{1}{2}(\text{id} + j^3 J) \oplus (\text{id} + i^3 I) = \frac{1}{2}(\text{id} + (j^3 \oplus 0)(J \oplus 0) + (0 \oplus i^3)(0 \oplus I))$ . Следовательно, с учетом принятых отождествлений  $\sigma$  можно рассматривать как изометрический мономорфизм  $Q$ -алгебры  $V = V_1 \times V_2$  в  $Q$ -алгебру  $V^R \otimes \mathfrak{K}(J \oplus 0, 0 \oplus I)$ , причем  $(\sigma V) \cap (\bar{\sigma} V) = \{0\}$ , т. е.  $V$  — расщепляемая  $Q$ -алгебра.

Замечание 1. В данном случае  $V^R \otimes \mathfrak{K}(J \oplus 0, 0 \oplus I) = \sigma V \oplus \bar{\sigma} V$ . В самом деле, прежде всего докажем, что  $V_1^R \otimes \mathbf{D} = \{0\}$ ;  $V_2^R \otimes \mathbf{C} = \{0\}$ . Действительно, пусть  $(X, 0) \in V_1^R, (0, b) \in \mathbf{D}$ . Тогда  $(0, b) \otimes (X, 0) = (0, 1)(0, b) \otimes (X, 0) = (0, b) \otimes (0, 1)(X, 0) = (0, b) \otimes \otimes (0, 0) = 0$ , откуда следует первое равенство. Аналогично доказывается второе. В силу этого,  $V^R \otimes \mathfrak{K}(J \oplus 0, 0 \oplus I) \subset (V_1^R \oplus V_2^R) \otimes \otimes(\mathbf{C} \oplus \mathbf{D}) \cong (V_1^R \otimes \mathbf{C}) \oplus (V_2^R \otimes \mathbf{D}) = (\sigma_1 V_1 \oplus \bar{\sigma}_1 V_1) \oplus (\sigma_2 V_2 \oplus \bar{\sigma}_2 V_2) = (\sigma_1 V_1 \oplus \oplus \sigma_2 V_2) \oplus (\bar{\sigma}_1 V_1 \oplus \bar{\sigma}_2 V_2) = \sigma(V_1 \oplus V_2) \oplus \bar{\sigma}(V_1 \oplus V_2) = \sigma V \oplus \bar{\sigma} V$ . Обратное включение очевидно.

Замечание 2. Очевидно, эти рассуждения автоматически переносятся на произвольные  $Q$ -алгебры вида  $V_1 \times \dots \times V_m$  (где  $V_i$ ;  $i = 1, \dots, m$ ; —  $Q$ -алгебры эллиптического либо гиперболического типа), которые, таким образом, расщепляемы.

Предложение 1. Расщепляемая  $Q$ -алгебра является эрмитовой.

◀ Это непосредственно следует из строгой эрмитовости метрики  $H$  и того, что  $\sigma$  является изометрическим мономорфизмом. ▶

Теорема 1. Собственные значения структурных аффиноров расщепляемой правильной полупростой  $Q$ -алгебры с конечномерной вещественной реализацией вещественны либо чисто мнимы.

◀ В силу теоремы о разложении достаточно ограничиться рассмотрением случая расщепляемой простой неабелевой  $Q$ -алгебры. Пусть  $V$  — такая  $Q$ -алгебра над кольцом  $\mathfrak{K}(J_1, \dots, J_r)$ ,  $V^c$  — комплексификация ее вещественной реализации. Рассмотрим какой-либо из ее структурных аффиноров  $J$ . Пусть  $V_{\lambda, \rho}$  — инвариантное подпространство пространства  $V^c$ , соответствующее эле-

ментарному делителю  $(J - \lambda \text{id})^\rho$  оператора  $J$ . Пусть  $\rho > 1$ ,  $\{e_1, \dots, e_\rho\}$  — канонический базис  $V_{\lambda, \rho}$ . Рассмотрим собственное подпространство  $V_\lambda$ , соответствующее собственному значению  $\lambda$  оператора  $J$ . Оно ненулевое, так как  $e_1 \in V_\lambda$ . Допустим, что  $\lambda^2 \notin \mathbf{R}$ . Как и при доказательстве теоремы 8 в [6], нетрудно убедиться, что  $V_\lambda \oplus V_{-\lambda}$  — двусторонний идеал в  $V^c$ , причем  $e_1 \in \mathfrak{A}(V_\lambda \oplus V_{-\lambda})$ , а также что  $V_\lambda * V_\mu = \{0\}$  ( $\lambda \neq \mu$ ). Таким образом, идеал  $(V_\lambda \oplus V_{-\lambda}) + (V_{\bar{\lambda}} \oplus V_{-\bar{\lambda}})$  содержит ненулевой абелев идеал  $\mathcal{I} = \mathcal{L}(e_1, \tau e_1)$ , где  $\tau$  — оператор комплексного сопряжения,  $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$  — линейная оболочка векторов. По теореме (1.2.1)\*,  $\mathcal{I} \cap V^R$  будет ненулевым абелевым идеалом в  $V^R$ , что противоречит полупростоте  $V$ . Значит,  $\rho = 1$ . Далее, в силу предположения,  $(V_\lambda \oplus V_{-\lambda}) + (V_{\bar{\lambda}} \oplus V_{-\bar{\lambda}}) = (V_\lambda \oplus V_{-\lambda}) \dot{\times} (V_{\bar{\lambda}} \oplus V_{-\bar{\lambda}})$ , а в силу простоты  $V$ ,  $V^c = (V_\lambda \oplus V_{-\lambda}) \dot{\times} (V_{\bar{\lambda}} \oplus V_{-\bar{\lambda}})$ . Кроме того, поскольку  $\sigma \neq 0$ , по крайней мере, в одном из этих подпространств найдется вектор  $X$  такой, что  $\sigma^c X \neq 0$ . Без ограничения общности,  $X \in V_\lambda$ . Тогда  $JX = \lambda X$ . Поскольку  $\sigma$  — гомоморфизм,  $\sigma^c(JX) = j\sigma^c X$ , а в силу линейности  $\sigma$ ,  $\sigma^c(JX) = \lambda\sigma^c X$ , откуда  $(j - \lambda)\sigma^c X = 0$ , и в силу строгой эрмитовости метрики  $H$ ,  $\lambda = j$ . Пусть, далее,  $\exists Y \in V_{-\lambda} : \sigma^c Y \neq 0$ . Тогда, как и выше,  $\sigma^c(JY) = j\sigma^c Y$ ,  $\sigma^c(JY) = -\lambda\sigma^c Y$ ,  $j = -\lambda$ . Сравнивая с предыдущим, получим, что  $\lambda = 0$ , в частности,  $\lambda$  — вещественное число, в противоречие с предположением. Следовательно,  $\sigma^c | V_{-\lambda} = 0$ . Пусть теперь  $\exists Y \in V_{-\bar{\lambda}} : \sigma^c Y \neq 0$ . Как и выше, находим отсюда, что  $\sigma^c(JY) = j\sigma^c Y$ ,  $\sigma^c(JY) = -\bar{\lambda}\sigma^c Y$ ,  $j = -\bar{\lambda}$  и, следовательно,  $\lambda = -\bar{\lambda}$ , т. е.  $\lambda$  — мнимое число, что также противоречит предположению. Таким образом,  $\sigma^c | V_{-\bar{\lambda}} = 0$ . Из сказанного следует, что  $\sigma | (V_{-\lambda} \oplus V_{-\bar{\lambda}}) \cap \cap V^R = 0$  и, следовательно,  $\ker \sigma \neq \{0\}$ , что противоречит инъективности  $\sigma$ . Следовательно, предположение неверно, т. е.  $\lambda$  — вещественное либо чисто мнимое число. ►

С учетом этой теоремы и теоремы 11 в [6] мы приходим к следующему результату:

**Теорема 2.** Расщепляемая редуцируемая  $Q$ -алгебра с конечномерной вещественной реализацией распадается в прямое произведение абелева идеала и простых неабелевых идеалов эллиптического и гиперболического типов и притом единственным образом с точностью до порядка сомножителей. ►

Абелев идеал натуральной редуцируемой  $Q$ -алгебры в общем случае имеет весьма сложное строение. Однако дополнив условие (1<sub>3</sub>) предыдущего параграфа требованием

$$\mathfrak{A}(V^R) \subset \bigcap_{i=1}^r \ker (J_i^5 - \lambda_i J_i); \quad 0 < \lambda_i \in \mathbf{R}, \quad (*)$$

мы получим следующий результат:

\* См. Глава 1, § 2, теорема 1.

Теорема 3. Максимальный абелев идеал натуральной редуцированной  $Q$ -алгебры, удовлетворяющей условию (\*), распадается в прямое произведение идеалов эллиптического, гиперболического и параболического типов.

◀ В силу теоремы о разложении достаточно ограничиться рассмотрением абелевой натуральной  $Q$ -алгебры  $V$ . В силу ее абелевости и условия (\*),  $\ker(J_i^5 - \lambda_i J_i) = V$ , т. е.  $J_i^5 - \lambda_i J_i = 0$  ( $i = 1, \dots, r$ ). Зафиксируем  $i$  и обозначим  $J_i^2 = \Phi_i$ . Тогда предыдущее соотношение запишется в виде  $(\Phi_i^2 - \lambda_i \text{id}) J_i = 0$ , т. е.  $\text{Im } J_i \subset \ker(\Phi_i^2 - \lambda_i \text{id})$ . Таким образом,  $\Phi_i^2 = \lambda_i \text{id}$  на  $\text{Im } J_i$ , в частности, оператор  $\Phi_i$  невырожден на  $\text{Im } J_i$ . Отсюда следует, что сужение метрики  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  на  $\text{Im } J_i$  невырождено. В самом деле,  $(\text{Im } J_i)^\perp = \ker J_i \subset \ker \Phi_i$ , следовательно,  $(\text{Im } J_i)^\perp \cap \text{Im } J_i = \{0\}$ . Таким образом,  $V = (\text{Im } J_i) \times (\ker J_i)$ . В свою очередь, операторы  $p_i = \frac{1}{2} \left( \text{id} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} J_i^2 \right)$  и  $q_i = \frac{1}{2} \left( \text{id} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} J_i^2 \right)$ , очевидно, являются проекторами в  $\text{Im } J_i$  на взаимно ортогональные подмодули, являющиеся ядрами операторов  $J_i^2 + \sqrt{\lambda_i} \text{id}$  и  $J_i^2 - \sqrt{\lambda_i} \text{id}$  соответственно. Таким образом, после соответствующей перенормировки структурных аффиноров можно считать, что  $V$  распадается в прямое произведение идеалов эллиптического, гиперболического и параболического типов относительно структурного аффинора  $J_i$ . Кроме того, поскольку структурные аффиноры коммутируют между собой,  $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$ ,  $J_k^2 | V_i = \varepsilon_k \text{id}$ , где  $\varepsilon_k = -1, 1$  или  $0$ ,  $k = 1, \dots, r$ . Пусть  $\varepsilon_k \neq 0$  и пусть  $J_m$  — другой структурный аффинор,  $J_m^2 | V_i = \varepsilon_m \text{id}$ . Обозначим  $J_t | V_i = \mathcal{Y}_t$  ( $t = 0, \dots, r$ ). Имеем:

$$\mathcal{Y}_k \mathcal{Y}_m = \sum_{j=0}^r a_j \mathcal{Y}_j + \sum_{j=1}^r b_j \mathcal{Y}_j^2 = \left( a_0 + \sum_{j=1}^r b_j \varepsilon_j \right) \mathcal{Y}_0 + \sum_{j=1}^r a_j \mathcal{Y}_j.$$

С другой стороны,

$$\mathcal{Y}_k \mathcal{Y}_m = (-\mathcal{Y}_k)(-\mathcal{Y}_m) = \overline{\mathcal{Y}_k \mathcal{Y}_m} = \left( a_0 + \sum_{j=1}^r b_j \varepsilon_j \right) \mathcal{Y}_0 - \sum_{j=1}^r a_j \mathcal{Y}_j,$$

откуда  $\mathcal{Y}_k \mathcal{Y}_m = \left( a_0 + \sum_{j=1}^r b_j \varepsilon_j \right) \mathcal{Y}_0$ . Умножая обе части этого равенства слева на  $\mathcal{Y}_k$ , с учетом ассоциативности кольца  $\mathfrak{F}$  получим, что  $\varepsilon_k \mathcal{Y}_m = (\mathcal{Y}_k^2) \mathcal{Y}_m = \mathcal{Y}_k (\mathcal{Y}_k \mathcal{Y}_m) = \left( a_0 + \sum_{j=1}^r b_j \varepsilon_j \right) \mathcal{Y}_k$ , что невозможно, если  $k \neq m$ . Следовательно,  $\forall i = 1, \dots, N$  сужение не более, чем одного структурного аффинора на  $V_i$  отлично от нуля. В соответствии с нашими соглашениями получаем, что  $V$

распадается в прямое произведение идеалов эллиптического, гиперболического и параболического типов. ►

С учетом этих теорем и замечания 2 к примеру 3 получаем:

**Теорема 4.** Правильная полупростая натуральная  $Q$ -алгебра с конечномерной вещественной реализацией, а также натуральная редуцируемая  $Q$ -алгебра с конечномерной вещественной реализацией, удовлетворяющая условию (\*) и не содержащая ненулевых идеалов параболического типа, допускает лишь действительные или чисто мнимые собственные значения для своих структурных аффиноров тогда и только тогда, когда она расщепляема. ►

**Предложение 2.** Расщепляемая  $Q$ -алгебра  $V$  не содержит ненулевых идеалов параболического типа.

◄ Пусть  $\{0\} \neq \mathcal{I} \subset V$  — идеал параболического типа, т. е.  $\mathcal{I} \subset \bigcap_{i=1}^r \ker J_i$ . Тогда  $\sigma\mathcal{I}$  — также идеал параболического типа.

так как  $j_k \sigma X = \sigma J_k X = 0$  ( $k=1, \dots, r$ ). Значит,  $\sigma|\mathcal{I} = \bar{\sigma}|\mathcal{I}$ , в частности,  $\sigma\mathcal{I} \cap \bar{\sigma}\mathcal{I} \neq \{0\}$ . Тем более  $\sigma V \cap \bar{\sigma}V \neq \{0\}$ , что противоречит определению расщепляемой  $Q$ -алгебры. ►

Пусть  $V$  — расщепляемая  $Q$ -алгебра,  $\sigma: V \rightarrow V^R \otimes \mathfrak{K}$  — соответствующий мономорфизм. Рассмотрим подмножество  $\tilde{V} \subset V^R$ , состоящее из элементов, инвариантных относительно  $\tau$ . Имеем:  $X \in \tilde{V} \Leftrightarrow \tau X = X$ ; если  $X = \sigma Y + \bar{\sigma} Z$  ( $Y, Z \in V$ ), то отсюда следует, что  $X = \sigma Y + \bar{\sigma} Y$  ( $Y \in V$ ). Очевидно, отображение  $v = \sigma + \bar{\sigma}$  — изоморфизм  $V$  и  $\tilde{V}$  как  $\mathcal{O}$ -модулей. Определим в  $\tilde{V}$  операцию « $\Delta$ » и эндоморфизмы  $\tilde{J}_k: \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$  по формулам  $(\sigma X + \bar{\sigma} X)\Delta$   $\Delta(\sigma Y + \bar{\sigma} Y) = \sigma(X*Y) + \bar{\sigma}(X*Y)$  и  $\tilde{J}_k \cdot v = v \cdot J_k$  ( $k=1, \dots, r$ ) соответственно. Непосредственно проверяется, что тем самым в  $\tilde{V}$  вводится структура натуральной  $Q$ -алгебры над  $\tilde{\mathfrak{K}} \cong \mathfrak{K}$ , канонически изоморфной  $V$ . Отождествляя эти  $Q$ -алгебры на основе построенного изоморфизма, получаем, что  $\sigma + \bar{\sigma} = \text{id}$ .

**Предложение 3** ([5]). Пусть  $\{e_a\}$  — базис и  $\{e^a\}$  — дуальный ему кобазис полуголоморфной расщепляемой  $Q$ -алгебры  $V$ ,  $\varepsilon_a = \sigma(e_a)$ ,  $\varepsilon^a = \bar{\sigma}(e_a)$ . Тогда  $\{\varepsilon_a, \varepsilon^b\}$  — базис  $V^R$ . Если  $\{\omega^a, \omega_b\}$  — дуальный ему кобазис, то  $e^a = \sigma^*(\omega^a)$ ,  $e_a = \bar{\sigma}^*(\omega_a)$ .

**Предложение 4** ([5]). Пусть  $V$  — расщепляемая  $Q$ -алгебра над  $\mathfrak{K}$ ,  $L$  —  $\mathfrak{K}$ -модуль. Отображение  $\sigma$  определяет изоморфизм модуля  $L$ -значных форм  $r+s$  аргументов на  $V$ , линейных по первым  $r$  аргументам и антилинейных по последним  $s$  аргументам, и модулем  $L$ -значных полилинейных отображений  $(\sigma V)^r \times (\bar{\sigma} V)^s \rightarrow L$ .

◄ Пусть  $t$  —  $L$ -значное полилинейное отображение указанного вида. Сопоставим ему  $L$ -значную форму  $\sigma^* t$  на  $V$  формулой

$$(\sigma^* t)(X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_s) = t(\sigma X_1, \dots, \sigma X_r, \bar{\sigma} Y_1, \dots, \bar{\sigma} Y_s).$$

Она, очевидно, обладает нужными свойствами. Легко проверяется также, что отображение  $\sigma^*$  определяет требуемый изоморфизм. ►

Значение расщепляемых  $Q$ -алгебр, кроме уже сказанного, определяется еще тем, что для них изучение таких нелинейных операций, как эрмитово скалярное произведение, операция «\*» и т. п. сводится к изучению соответствующих тензоров в модуле  $V^{\mathfrak{F}}$ . Более того, всякий тензор в модуле  $V^{\mathfrak{F}}$  определяется набором форм на  $V$ , линейных по одним и антилинейных по другим аргументам. Именно, справедливо

Предложение 5 ([5]). Пусть  $V$  — расщепляемая  $Q$ -алгебра над  $\mathfrak{F}$ ,  $L$  —  $\mathfrak{F}$ -модуль. Существует естественное взаимно однозначное соответствие между множествами  $L$ -значных  $r$ -линейных отображений  $V^{\mathfrak{F}}$  и множеством упорядоченных наборов  $2^r$   $L$ -значных форм на  $V$ , линейных либо антилинейных по различным наборам аргументов.

◀ Пусть  $t$  —  $L$ -значное  $r$ -линейное отображение  $V^{\mathfrak{F}}$ ,  $X \in V^{\mathfrak{F}}$ . Тогда  $X = X' + X''$ , где  $X' \in \sigma V$ ,  $X'' \in \bar{\sigma} V$ , и это представление единственно. Следовательно,

$$t(X_1, \dots, X_r) = t(X'_1 + X''_1, \dots, X'_r + X''_r) = t(X'_1, \dots, X'_r) + \\ + t(X''_1, X''_2, \dots, X''_r) + \dots + t(X''_1, \dots, X''_r).$$

Каждое из слагаемых определяет полилинейное отображение  $\sigma V$  и  $\bar{\sigma} V$  в  $L$ , которое, как мы видели, однозначно соответствует форме на  $V$ , линейной либо антилинейной по соответствующему аргументу. Биективность этих соответствий очевидна. ►

Набор этих форм называется спектром отображения  $t$ , а сами формы называются элементами спектра [5]. Элемент спектра характеризуется десятичным числом, у которого единицы двоичной записи соответствуют номерам антилинейных аргументов. Например, запись  $t$  характеризует элемент спектра, антилинейный

<sup>(10)</sup> по первому, второму и четвертому аргументам.

Пусть  $T$  —  $V^R$ -значное  $n$ -линейное отображение  $\mathcal{O}$ -модуля  $V^R$ . Тогда  $T$  порождает  $V^R \otimes \mathfrak{F}$ -значную форму  $T \otimes \text{id}_{\mathfrak{F}}$  на модуле  $V^R \otimes \mathfrak{F}$  (распространение по линейности). Допустим, что эта форма сохраняет  $V^{\mathfrak{F}}$  (это тривиальным образом выполняется, например, в случаях  $Q$ -алгебр эллиптического либо гиперболического типа; в этих случаях  $V^{\mathfrak{F}} = V^R \otimes \mathfrak{F}$ , а также — в силу аналогичной причины и полученных выше результатов — в случае расщепляемой редуцированной  $Q$ -алгебры с конечномерной вещественной реализацией, удовлетворяющей условию (\*)). Обозначим  $t = (T \otimes \text{id}_{\mathfrak{F}})|V^{\mathfrak{F}}$ . Имеем:

$t = \sigma t + \bar{\sigma} t$ . Пусть  $t_{(i)}$  — элемент спектра этой формы. Тогда  $t_{(i)} = \sigma \tilde{t}_{(i)} + \bar{\sigma} \hat{t}_{(i)}$ , причем в силу того, что  $\tau t = t$ ,  $\bar{\sigma} \hat{t}_{(i)} = \sigma \tilde{t}_{(i)}$ , т. е. формы  $\sigma \tilde{t}_{(i)}$  полностью определяют спектр  $t$ . Ввиду инъективности  $\sigma$  эти формы вполне определены формами  $\tilde{t}_{(i)}$  на  $V$  со значениями в  $V$ , которые мы обозначим  $T_{(i)}$ . Набор форм  $\{T_{(i)}\}$  называется спектром формы  $T$ . Очевидно,  $T = \sum_{(i)} T_{(i)}$ .

Пример 4. Пусть  $h$  — метрика вещественной реализации  $Q$ -алгебры  $V$  эллиптического либо гиперболического типа. Тогда  $L = \mathfrak{R}$ ,  $h^{\mathfrak{R}} = h \otimes \text{id}_{\mathfrak{R}} \leftrightarrow \{h_{(0)}, h_{(1)}, h_{(2)}, h_{(3)}\}$ . Имеем:  $h(X, Y) = h^{\mathfrak{R}}(\sigma X, \sigma Y) = \frac{1}{4} h^{\mathfrak{R}}(X + j^3 JX, Y + j^3 JY) = 0$ ;  $X, Y \in V$ . Аналогично,  $h_{(3)}(X, Y) = 0$ ;  $h_{(1)}(X, Y) = \frac{1}{2} \ll X, Y \gg$ ;  $h_{(2)}(X, Y) = \frac{1}{2} \ll Y, X \gg$ .

Пример 5. Пусть  $V$  —  $Q$ -алгебра эллиптического либо гиперболического типа,  $T(X, Y) = X * Y$  — тензор, определяющий умножение в ее вещественной реализации. Его можно рассматривать как 2-линейную  $V^{\mathfrak{R}}$ -значную форму на  $V^{\mathfrak{R}}$ . Тогда  $T \leftrightarrow \{T_{(0)}, T_{(1)}, T_{(2)}, T_{(3)}\}$ . Во введенных обозначениях,  $t(X, Y) = T^{\mathfrak{R}}(\sigma X, \sigma Y) = \frac{1}{4} T^{\mathfrak{R}}(X + j^3 JX, Y + j^3 JY) = \frac{1}{2} \{X * Y - j^3 J(X * Y)\} = \bar{\sigma}(X * Y)$ . Аналогично,  $\hat{t}(X, Y) = \sigma(X * Y)$ ,  $T_{(0)}(X, Y) = T_{(1)}(X, Y) = T_{(2)}(X, Y) = 0$ ;  $T_{(3)}(X, Y) = X * Y$ .

Определение 2. Псевдорасщепляемой  $Q$ -алгеброй называется натуральная  $Q$ -алгебра, распадающаяся в прямое произведение расщепляемого идеала и идеала параболического типа (необходимо абелева).

Рассуждениями, приведшими нас к теореме 4, получаем следующий аналог этой теоремы для псевдорасщепляемых  $Q$ -алгебр:

Теорема 5. Натуральная редуکتивная  $Q$ -алгебра с конечномерной вещественной реализацией, удовлетворяющая условию (\*), псевдорасщепляема тогда и только тогда, когда собственные значения ее структурных аффиноров вещественны или чисто мнимы. ■

Пусть  $V = \mathfrak{I} \dot{\times} \mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{I}$  — расщепляемый идеал,  $\mathfrak{M}$  — идеал параболического типа. Из предложения 2 непосредственно следует, что  $\mathfrak{M} = \bigcap_{i=1}^r \ker J_i$ . Используя ортогональные проекторы  $\mathfrak{m}$  и  $\mathfrak{l}$  на

подмодули  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{L}$  соответственно и предложение 5, легко показать, что всякое  $L$ -значное  $n$ -линейное отображение  $T$  модуля  $\mathfrak{L}^{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{M}$  однозначно характеризуется набором  $L$ -значных форм на  $V$ , аргументы которых принимают значения в  $\mathfrak{L}$  либо  $\mathfrak{M}$ , линейных либо антилинейных по аргументам из  $\mathfrak{L}$ . Набор этих форм также называется спектром  $T$ ; его элементы характеризуются десятичным числом, у которого единицы трюичной записи соответствуют номерам антилинейных аргументов, а двойки — номерам аргументов из  $\mathfrak{M}$ . Пусть  $T$  —  $\mathfrak{L}^{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{M}$ -значное  $n$ -линейное отображение  $\mathcal{O}$ -модуля  $\mathfrak{R}^{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{M}$ . Тогда  $lT$  порождает  $\mathfrak{L}^{\mathfrak{R}} \otimes \mathfrak{R}$ -значную  $n$ -линейную форму  $lT \otimes id_{\mathfrak{R}}$  на модуле  $\mathfrak{L}^{\mathfrak{R}} \otimes \mathfrak{R}$  (распространение по линейности). Пусть эта форма сохраняет  $\mathfrak{L}^{\mathfrak{R}}$ . Это выполняется, например, в случае псевдорасщепляемой редуцированной  $Q$ -алгебры с конечномерной вещественной реализацией, удовлетворяющей условию (\*). Обозначим  $t = (lT \otimes id_{\mathfrak{R}})|_{\mathfrak{L}^{\mathfrak{R}}}$ . Имеем:  $t = \sigma t + \bar{\sigma} t$ . Пусть  $t$  — элемент спектра этой формы. Тогда  $t = \sigma \tilde{t} + \bar{\sigma} \hat{t}$ , причем  $\sigma \tilde{t} = \sigma \tilde{t}$ , т. е. формы  $\sigma \tilde{t}$  полностью определяют спектр  $t$ . Ввиду инъективности  $\sigma$  эти формы вполне определены формами  $\tilde{t}$  на  $\mathfrak{L}$  со значениями в  $\mathfrak{L}$ , которые мы обозначим  $lT$ . С другой стороны, поскольку  $\mathfrak{M}$  является (неточным)  $\mathfrak{R}$ -модулем, можно говорить о спектре  $\{mT\}$  формы  $mT$ . Набор форм  $\{T\}$ , где  $T = lT + mT$ , называется спектром формы  $T$ . Очевидно,

$$T = \sum_l (lT + mT).$$

## Глава 2

### ОБОБЩЕННЫЕ ПОЧТИ ЭРМИТОВЫ СТРУКТУРЫ

В этом разделе вводится центральное понятие работы — понятие обобщенной почти эрмитовой ( $GA\mathcal{H}$ -)структуры на гладком многообразии. Оказывается, что это понятие включает в себя в качестве частных случаев понятия почти эрмитовой структуры как классического, так и гиперболического типов, почти контактной метрической структуры классического и гиперболического типов, метрической  $f$ -структуры и ряда других дифференциально-геометрических структур, широко обсуждаемых в печати. С другой стороны, касательное расслоение  $GA\mathcal{H}$ -многообразия, т. е. гладкого многообразия, снабженного  $GA\mathcal{H}$ -структурой, можно рассматривать как расслоение, слои которого наделены специальной алгебраической структурой — структурой  $Q$ -алгебры. Анализ алгебраических свойств этой

структуры позволяет получить существенную информацию о геометрическом строении  $GA\mathcal{H}$ -многообразия. Более того, в ряде практически важных случаев к  $GA\mathcal{H}$ -многообразию оказывается возможным внутренним образом присоединить главное расслоение унитарных реперов, которое удобно рассматривать как  $G$ -структуру, т. е. как подрасслоение более обширного главного расслоения. Это позволяет применить к анализу дифференциально-геометрических свойств таких многообразий мощный аппарат структурных уравнений главного расслоения и их дифференциальных продолжений. Использование этого аппарата позволяет изучать дифференциально-геометрические свойства более высокого порядка класса таких многообразий, в частности, свойства, связанные с кривизной этих многообразий, и получать информацию о строении таких многообразий, доводящую до полной классификации некоторых их видов, интенсивно исследуемых в литературе.

### § 1. Понятие обобщенной почти эрмитовой структуры

Пусть  $M$  — связное гладкое многообразие,  $C^\infty(M)$  — кольцо гладких функций на  $M$ ,  $\mathcal{F}(M)$  — алгебра Ли векторных полей на  $M$  со скобкой Ли  $[\cdot, \cdot]$ ,  $d$  — оператор внешнего дифференцирования. Если на  $M$  задана (псевдо)риманова метрика  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , то соответствующую ей риманову связность будем обозначать символом  $\nabla$ . Все многообразия, тензорные поля (тензоры) и т. п. объекты будем предполагать гладкими класса  $C^\infty$ .

Напомним (см., например [24]), что почти эрмитовой ( $A\mathcal{H}$ -) структурой на многообразии  $M$  называется пара  $\{J, g\}$  тензоров на  $M$ , где  $J$  — тензор типа  $(1,1)$  такой, что  $J^2 = -\text{id}$  (называемый почти комплексной структурой, или структурным оператором, или структурным аффинором),  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  — (псевдо)риманова метрика, причем  $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$ ;  $X, Y \in \mathcal{F}(M)$ . Многообразие с заданной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым многообразием. Почти эрмитова структура является одним из наиболее содержательных примеров дифференциально-геометрических структур, и ее исследованию посвящен большой поток исследований. Перечислим основные виды почти эрмитовых структур вместе с тождествами, их характеризующими [24]:

- 1) эрмитовы ( $\mathcal{H}$ ):  $\nabla_X(J)Y - \nabla_{JX}(J)(JY) = 0$ ;
- 2) квазикелеровы ( $Q\mathcal{H}$ ):  $\nabla_X(J)Y + \nabla_{JX}(J)(JY) = 0$ ;
- 3) почти келеровы ( $A\mathcal{K}$ ):  $d\Omega = 0$ , где  $\Omega(X, Y) = \langle X, JY \rangle$ ;
- 4) приближенно келеровы ( $N\mathcal{K}$ ):  $\nabla_X(J)X = 0$ ;
- 5) келеровы ( $\mathcal{K}$ ):  $\nabla J = 0$ ;
- 6)  $G_1$ -многообразия:  $\nabla_X(J)X - \nabla_{JX}(J)(JX) = 0$ ;
- 7)  $G_2$ -многообразия:  $\mathfrak{S}_{xyz}\{\nabla_X(\Omega)(Y, Z) - \nabla_{JX}(\Omega)(JY, Z)\} = 0$ ;

где  $\mathfrak{S}_{xyz}$  — оператор симметризации по аргументам  $X, Y, Z$ .

В последнее время внимание исследователей все чаще привлекают так называемые почти эрмитовы структуры гиперболического типа [33], или, как их еще называют, почти параэрмитовы структуры [31] т. е. пары  $\{I, g\}$  тензоров на  $M$ , где  $I$  — тензор типа  $(1,1)$  такой, что  $I^2 = \text{id}$  (называемый почти параконформной структурой, или структурным оператором, или структурным аффинором),  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  — псевдориманова метрика, причем  $\langle IX, IY \rangle = -\langle X, Y \rangle$ ;  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Почти эрмитовы структуры гиперболического типа как самостоятельный объект рассматривали Прванович [33], Дьюб [20] и др., однако эти исследования, за редкими исключениями, носили довольно поверхностный характер. Наиболее глубоко изучен частный вид таких многообразий, а именно, келеровы многообразия гиперболического типа, характеризующиеся параллельностью структурного оператора в римановой связности, известные также под названиями расслоенных пространств Рашевского и паракелеровых многообразий. Эти многообразия несут естественную симплектическую структуру и представляют существенный интерес с точки зрения теоретической механики [34].

Определение 1 ([4]). Обобщенной почти эрмитовой (короче,  $GA\mathcal{H}$ )-структурой ранга  $r$  на гладком многообразии  $M$  называется совокупность  $\{g, J_1, \dots, J_r, T\}$  тензорных полей на  $M$ , где  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  — псевдориманова метрика на  $M$ ,  $J_1, \dots, J_r$  — линейно независимые в каждой точке многообразия тензоры типа  $(1,1)$ , называемые структурными аффинорами, или структурными операторами, определенные в каждой точке многообразия с точностью до ненулевого числового множителя и являющиеся вместе со своими квадратами и тождественным аффинором образующими некоторого подмодуля, являющегося подалгеброй, алгебры всех эндоморфизмов касательного пучка многообразия,  $T$  — тензор типа  $(2,1)$ , называемый композиционным тензором. При этом должны выполняться условия:

$$1. \langle J_i X, Y \rangle + \langle X, J_i Y \rangle = 0; \quad 2. T(J_i X, Y) = T(X, J_i Y) = -J_i T(X, Y); \quad 3. T_X g = 0; \quad 4. \bigcap_{i=1}^r \ker J_i \subset \ker T \subset \quad (1)$$

$$\subset \bigcap_{i=1}^r \ker (J_i^2 - \lambda_i J_i); \quad 5. J_i \cdot J_j = J_j \cdot J_i \quad (i, j = 1, \dots, r; X, Y \in \mathfrak{X}(M)).$$

Здесь  $0 < \lambda_i \in C^\infty(M)$ ;  $T_X Y = T(X, Y)$ ; оператор  $T_X$  отождествляется с порожденным им дифференцированием тензорной алгебры многообразия. Многообразие, наделенное  $GA\mathcal{H}$ -структурой, называется обобщенным почти эрмитовым ( $GA\mathcal{H}$ -) многообразием. Символом  $GA\mathcal{H}$  обозначается класс всех  $GA\mathcal{H}$ -структур на  $M$ . Аналогичное замечание относится к подклассам  $GA\mathcal{H}$ , рассмотренным ниже. Если  $\mathfrak{M} = \bigcap_{i=1}^r \ker J_i$  —  $k$ -мерное распределение, число  $k$  называется дефектом  $GA\mathcal{H}$ -структуры.

**З а м е ч а н и е.** Согласно (1<sub>1</sub>), тензоры  $\Omega_i(X, Y) = \langle X, J_i Y \rangle$  ( $i=1, \dots, r$ ) кососимметричны. Они называются фундаментальными формами  $GA\mathcal{H}$ -структуры.

$GA\mathcal{H}$ -структура называется обобщенной квазикелеровой, или  $GQ\mathcal{H}$ -структурой, если

$$\nabla_X J_i + T_X J_i = 0 \quad (i=1, \dots, r; X \in \mathfrak{X}(M)), \quad (2)$$

и  $Q$ -структурой, если

$$\nabla_X T + T_X T = 0 \quad (X \in \mathfrak{X}(M)). \quad (3)$$

Очевидно, структурные аффиноры  $GQ\mathcal{H}$ -многообразия определены с точностью до ненулевого числового множителя.

Введем в модуле  $\mathfrak{X}(M)$  операцию «\*» по формуле  $X*Y = = T(X, Y)(X, Y \in \mathfrak{X}(M))$ . Легко видеть, что тождество (1<sub>3</sub>) равносильно условию  $\langle X*Y, Z \rangle + \langle Y, X*Z \rangle = 0$  ( $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ). С учетом (1<sub>2</sub>) убеждаемся, что модуль  $\mathfrak{X}(M)$  образует натуральную

$Q$ -алгебру  $\mathfrak{B}$  ранга  $r$  с метрикой  $\langle\langle X, Y \rangle\rangle = \sum_{i=0}^r \langle J_i^3 X, Y \rangle J_i$ ,

где  $J_0 = \text{id}$ , причем роль  $Q$  играет кольцо  $C^\infty(M)$ . При этом в касательном пространстве  $T_p(M)$  в каждой точке  $p \in M$  также индуцируется структура натуральной  $Q$ -алгебры  $\mathfrak{B}_p$  ранга  $r$  с вещественной реализацией.  $Q$ -алгебра  $\mathfrak{B}$  (соответственно,  $\mathfrak{B}_p$ ) называется присоединенной к многообразию  $M$  (в точке  $p$ ).

Отображение одного  $GA\mathcal{H}$ -многообразия в другое, индуцирующее гомоморфизм соответствующих присоединенных  $Q$ -алгебр, называется голоморфным. Риманово подмногообразие  $GA\mathcal{H}$ -многообразия, отображение вложения которого является голоморфным, называется голоморфным подмногообразием. Голоморфная изометрия  $GA\mathcal{H}$ -многообразий называется эквивалентностью.  $GA\mathcal{H}$ -многообразие называется голоморфно приводимым, если оно локально эквивалентно произведению двух  $GA\mathcal{H}$ -многообразий ненулевой размерности.

**З а м е ч а н и е.** Соотношения (1<sub>3</sub>), (2) и (3) показывают, что задание композиционного тензора  $T$   $GA\mathcal{H}$ -структуры равносильно заданию связности  $\tilde{\nabla} = \nabla + T$  на этом  $GA\mathcal{H}$ -многообразии, в которой метрический тензор (структурные аффиноры, композиционный тензор) ковариантно постоянны. Эта связность называется присоединенной.

**О п р е д е л е н и е 2** ([4]). Пусть  $M$  —  $GA\mathcal{H}$ -многообразие,  $J$  — его структурный аффинор. Говорят, что вектор  $X \in \mathfrak{X}(M)$  удовлетворяет условию  $J$ -невыврожденности и обозначают его  $X \in \mathfrak{X}_J(M)$ , если бивектор  $X \wedge JX$  неизотропен в каждой точке многообразия, в которой  $X \neq 0$ .

**О п р е д е л е н и е 3** ([4]). Голоморфной секционной (короче,  $HS$ -) кривизной  $\mathcal{K}(X)$   $GA\mathcal{H}$ -многообразия  $M$  относительно структурного аффинора  $J$  в направлении  $X \in \mathfrak{X}_J(M)$  называется кривизна в двумерном направлении  $X \wedge JX$ , т. е.  $\langle R(X, JX)X$ ,

$JX \rangle = \mathcal{H}(X) \|X\|^2 \|JX\|^2$ , где  $R$  — тензор римановой кривизны  $M$ .

Определение 4 ([4]). Говорят, что  $GA\mathcal{H}$ -многообразие  $M$  имеет постоянную  $HS$ -кривизну в точке  $p \in M$ , если  $\forall J \forall X, Y \in \mathcal{X}_J(M) \Rightarrow \mathcal{H}(X)(p) = \mathcal{H}(Y)(p)$ , причем  $\mathcal{H}$  не зависит от выбора аффинора  $J$ .  $GA\mathcal{H}$ -многообразие, имеющее постоянную  $HS$ -кривизну в каждой своей точке, называется многообразием точечно постоянной  $HS$ -кривизны. Очевидно, точечное постоянство  $HS$ -кривизны  $GA\mathcal{H}$ -многообразия равносильно тому, что

$$\begin{aligned} \exists \mathcal{H} \in C^\infty(M) \forall J \forall X \in \mathcal{X}_J(M) \Rightarrow \langle R(X, JX)X, JX \rangle = \\ = \mathcal{H} \|X\|^2 \|JX\|^2. \end{aligned}$$

$GA\mathcal{H}$ -многообразие называется многообразием глобально постоянной  $HS$ -кривизны, если оно имеет точечно постоянную  $HS$ -кривизну, являющуюся константой.

Эти определения обобщают хорошо известные определения постоянств  $HS$ -кривизны почти эрмитовых многообразий [22].

Определение 5 ([5]). Говорят, что  $GA\mathcal{H}$ -многообразие  $M$  удовлетворяет аксиоме голоморфных  $m$ -плоскостей,  $0 < m \leq \dim \mathfrak{B}$ , если для всякого  $m$ -мерного подмодуля  $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{B}_p$ , ограничение

метрики на который невырождено, и такого, что  $\bigcap_{i=1}^r \ker(J_i)_p \subset \mathfrak{U}^R$ ,

в каждой точке  $p \in M$ , существует вполне геодезическое голоморфное подмногообразие  $N \subset M$ , проходящее через точку  $p$ , и такое, что  $T_p(N) = \mathfrak{U}^R$ .

Это определение обобщает классическое понятие почти эрмитова многообразия, удовлетворяющего аксиоме голоморфных плоскостей [43].

В названии  $GA\mathcal{H}$ -многообразия (или  $GA\mathcal{H}$ -структуры) фиксируется соответствующее свойство его присоединенной  $Q$ -алгебры в каждой точке многообразия. Например, редуктивным  $GA\mathcal{H}$ -многообразием называется  $GA\mathcal{H}$ -многообразие  $M$ , присоединенная  $Q$ -алгебра  $\mathfrak{B}_p$  ( $p \in M$ ) которого редуктивна.  $GA\mathcal{H}$ -многообразие, присоединенная  $Q$ -алгебра которого является  $K$ -алгеброй ( $A$ -алгеброй, абелевой  $Q$ -алгеброй), называется соответственно, обобщенным  $G_1$ -многообразием (обобщенным  $G_2$ -многообразием, обобщенным эрмитовым многообразием), и соответствующая  $GA\mathcal{H}$ -структура обозначается, соответственно,  $GG_1$ ,  $GG_2$ ,  $G\mathcal{H}$ . Наконец, вводятся в рассмотрение классы структур  $GN\mathcal{H} = GQ\mathcal{H} \cap GG_1$ ,  $GA\mathcal{H} = GQ\mathcal{H} \cap GG_2$ ,  $G\mathcal{H} = GQ\mathcal{H} \cap G\mathcal{H}$  и называются, соответственно, обобщенными приближенно келеровыми, обобщенными почти келеровыми и обобщенными келеровыми структурами.

Все эти определения оправдываются рассмотрением следующего важнейшего примера  $GA\mathcal{H}$ -структур [6]. Пусть  $\{g, J, T\}$  —  $GA\mathcal{H}$ -структура ранга 1 дефекта  $b$  на многообразии  $M$ . Тогда  $J^3 = \alpha \text{id} + \beta J + \gamma J^2$  ( $\alpha, \beta, \gamma \in C^\infty(M)$ ). Применим обе части этого равенства к вектору  $X \in \mathcal{X}(M)$  и скалярно умножим обе

части полученного равенства на  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ . В силу (1<sub>1</sub>) и невырожденности метрики получим, что  $-J^3 = \alpha \text{id} - \beta J + \gamma J^2$ , откуда  $J^3 = \beta J$ . Назовем структуру неособой, если  $\beta$  не имеет нулей на  $M$ . В этом случае в силу непрерывности  $\beta$  сохраняет знак на  $M$ . Поэтому после соответствующей перенормировки можно считать, что  $J^3 + \varepsilon J = 0$ , где  $\varepsilon = 1$  либо  $-1$ . Из (1<sub>1</sub>) имеем:  $\langle J^2, X, J^2 Y \rangle = \langle X, J^4 Y \rangle = -\varepsilon \langle X, J^2 Y \rangle = \varepsilon \langle JX, JY \rangle$ . Итак, в случае неособой структуры:

$$1. J^3 + \varepsilon J = 0; \quad 2. \langle JX, Y \rangle + \langle X, JY \rangle = 0 \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M)). \quad (4)$$

Пара  $\{J, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ , удовлетворяющая этим условиям, называется метрической  $f$ -структурой классического (эллиптического) или гиперболического типа при  $\varepsilon = 1$  или  $-1$  соответственно, а оператор  $J - f$ -структурой. Понятие  $f$ -структуры эллиптического типа, или просто  $f$ -структуры, было введено Яно в 1961 г. и исследовалось рядом авторов (см., например, [14], [41], [42]).  $f$ -структуры гиперболического типа изучали Сато [36], Адати и Миядзава [12] и др. Число  $\dim M - b$  принято называть рангом  $f$ -структуры.

Обобщая идею Яно [42], введем в касательном пучке к  $M$  два оператора  $\mathbb{I} = -\varepsilon J^2$  и  $\mathbb{m} = \text{id} + \varepsilon J^2$ . Очевидно,  $\mathbb{I}^2 = \mathbb{I}$ ,  $\mathbb{m}^2 = \mathbb{m}$ ,  $\mathbb{I} + \mathbb{m} = \text{id}$ , т. е. это — пара взаимно дополнительных проекторов. Легко убедиться, что  $JX = 0 \Leftrightarrow (\text{id} + \varepsilon J^2)X = X$  ( $X \in \mathfrak{X}(M)$ ), откуда следует, что образ оператора  $\mathbb{m}$  совпадает с  $\ker J$ , т. е.  $\mathbb{m}$  — проектор на ядро оператора структуры. Кроме того,  $\mathbb{I}\mathbb{I} = \mathbb{I}$ , ввиду чего можно рассматривать ограничение  $J$  оператора  $J$  на образ  $\mathfrak{E}$  оператора  $\mathbb{I}$ . Очевидно,  $J^2 \mathbb{I} = -\varepsilon \mathbb{I}$ , т. е.

$$J^2 \mathbb{I} = -\varepsilon \mathbb{I}. \quad (5)$$

Таким образом,  $\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{E} \oplus \mathfrak{M}$ , где  $\mathfrak{M} = \ker J$ , причем из (4<sub>2</sub>) и (5) следует, что

$$\langle JX, JY \rangle = \varepsilon \langle X, Y \rangle \quad (X, Y \in \mathfrak{E}), \quad (6)$$

а также взаимная ортогональность распределений  $\mathfrak{E}$  и  $\mathfrak{M}$ .

Из (5) и (6) непосредственно следует, что понятие метрической  $f$ -структуры дефекта нуль тождественно понятию почти эрмитовой структуры классического или гиперболического типа. Пусть теперь дефект  $f$ -структуры равен 1. Заменяя в случае необходимости  $g$  на  $-g$ , без ограничения общности, можно считать, что ограничение  $g$  на  $\mathfrak{M}$  положительно определено. Зафиксируем  $\xi \in \mathfrak{M}$ ,  $\|\xi\| = 1$  и определим 1-форму  $\eta$  соотношением  $\eta(X) = \langle \xi, X \rangle$ ;  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Тогда для совокупности  $\{g, \xi, \eta, J\}$  выполнены соотношения:

$$1. J(\xi) = 0; \quad 2. \eta \circ J = 0; \quad 3. \eta(\xi) = 1; \quad 4. \varepsilon J^2 = -\text{id} + \xi \otimes \eta; \quad (7)$$

$$5. \langle JX, JY \rangle = \varepsilon \{ \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y) \}.$$

В самом деле, первые три соотношения очевидны. Далее, поскольку  $\mathfrak{M} = \mathcal{L}(\xi)$ , то  $\mathfrak{m}(X) = c\xi$ ,  $c \in C^\infty(M)$ . Поэтому  $c =$

$= \langle \mathfrak{m}(X), \xi \rangle = \langle (\varepsilon J^2 + \text{id})X, \xi \rangle = \langle X, \xi \rangle = \eta(X)$ , т. е.  $\mathfrak{m} = \xi \otimes \eta$ , что равносильно (7<sub>4</sub>). Наконец,  $\langle JX, JY \rangle = -\langle J^2X, Y \rangle = -\varepsilon \langle (-\text{id} + \xi \otimes \eta)X, Y \rangle = \varepsilon \langle X, Y \rangle - \varepsilon \eta(X) \langle \xi, Y \rangle = \varepsilon \{ \langle X, Y \rangle - \eta(X) \eta(Y) \}$ ;  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Совокупность тензорных полей  $\{g, \xi, \eta, J\}$ , удовлетворяющих соотношениям (7), называется почти контактной метрической структурой эллиптического или гиперболического типа при  $\varepsilon = \pm 1$  соответственно. Почти контактные (метрические) структуры эллиптического типа, или просто почти контактные (метрические) структуры были введены в рассмотрение Дж. Греем [26] и Сасаки [35] и вместе с почти эрмитовыми структурами являются важнейшими и содержательнейшими примерами дифференциально-геометрических структур на многообразии. Их изучению с самых различных точек зрения посвящено очень большое число исследований (см., например, [11]). Существенный интерес представляют также почти контактные метрические структуры гиперболического типа. Подробно эти виды структур мы обсудим в главе 3.

Обратно, если  $\{g, \xi, \eta, J\}$  — почти контактная метрическая структура, то тождества (4) выполняются очевидным образом в силу (7), т. е.  $\{J, g\}$  — метрическая  $f$ -структура.

Итак, мы выяснили, что неособая  $GA\mathfrak{H}$ -структура ранга 1 дефекта  $\delta$  на многообразии канонически порождает метрическую  $f$ -структуру на этом многообразии. Пусть теперь  $\{J, g\}$  — метрическая  $f$ -структура эллиптического либо гиперболического типа на многообразии  $M$ ,  $N(X, Y) = \frac{1}{4} \{ [JX, JY] + J^2[X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY] \}$  — тензор Нейенхейса оператора структуры. Очевидно, тензор  $B(X, Y) = -J^2N(J^2X, J^2Y) = -\frac{1}{4} \{ J^2[JX, JY] - \varepsilon J^2[J^2X, J^2Y] - J[J^2X, JY] - J[JX, J^2Y] \}$  обладает свойством  $B(JX, Y) = B(X, JY) = -JB(X, Y)$ ;  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Введем в рассмотрение тензор  $B^*$  соотношением

$$\langle B^*(X, Y), Z \rangle = \langle X, B(Y, Z) \rangle \quad (X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)). \quad (8)$$

**Теорема 1.** На метрическом  $f$ -многообразии однозначно определен тензор  $T$  типа (2.1), обладающий свойствами: 1.  $\{g, J, T\}$  —  $GA\mathfrak{H}$ -структура ранга 1; 2.  $T(X, Y) - T(Y, X) = B(X, Y)$ ;  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Этот тензор в явном виде задается соотношением

$$T(X, Y) = \frac{1}{4} \{ J \nabla_{JX}(J)(JY) + J^3 \nabla_{J^2X}(J)(J^2Y) \}; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (9)$$

Пусть  $T$  — тензор, обладающий свойствами 1 и 2. Дважды производя циклическую перестановку аргументов в тождестве  $\langle T(X, Y), Z \rangle - \langle T(Y, X), Z \rangle = \langle B(X, Y), Z \rangle$ , почленно вычтем третье равенство из почленной суммы первых двух:

$$\langle T(Y, Z), X \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle B(X, Y), Z \rangle +$$

$$+ \langle B(Y, Z), X \rangle - \langle B(Z, X), Y \rangle \}.$$

В силу невырожденности метрики и условия 1 тензор  $T$  определен соотношением

$$T(X, Y) = \frac{1}{2} \{ B(X, Y) - B^*(X, Y) - B^*(Y, X) \}$$

однозначно и обладает нужными свойствами. Вычислим его в явном виде. В силу отсутствия кручения римановой связности,  $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ . Ввиду этого тензор  $B$  имеет вид

$$\begin{aligned} B(X, Y) = & \frac{1}{4} \{ J^2 \nabla_{JX}(J)Y - J^2 \nabla_{JY}(J)X - \varepsilon J^2 \nabla_{J^2X}(J^2)Y + \\ & + \varepsilon J^2 \nabla_{J^2Y}(J^2)X - J \nabla_{JX}(J^2)Y + J \nabla_{JY}(J^2)X + \\ & + J \nabla_{J^2Y}(J)X - J \nabla_{J^2X}(J)Y \}. \end{aligned} \quad (10)$$

Введем, далее, обозначения  $X \circledast Y = \nabla_X(J)Y$ ;  $X \blacktriangle Y = \nabla_X(J^2)Y$ ;  $\langle X \circledast Y, Z \rangle = \langle X, Y \circledast Z \rangle$ ;  $\langle X \blacktriangle Y, Z \rangle = \langle X, Y \blacktriangle Z \rangle$ ;  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Дифференцируя тождества  $J \cdot J = J^2$ ;  $J \cdot J^2 = -\varepsilon J$  и  $\langle JX, Y \rangle + \langle X, JY \rangle = 0$  ( $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ), получим, соответственно:

$$1. X \circledast JY + J(X \circledast Y) = X \blacktriangle Y; \quad 2. X \circledast J^2Y + J(X \blacktriangle Y) = -\varepsilon X \circledast Y; \quad (11)$$

$$3. \langle X \circledast Y, Z \rangle + \langle Y, X \circledast Z \rangle = 0 \text{ или } 4. X \circledast Y + Y \circledast X = 0.$$

С учетом (11<sub>1</sub>) соотношение (11<sub>2</sub>) можно переписать в виде

$$-\varepsilon X \circledast Y = X \circledast J^2Y + J(X \circledast JY) + J^2(X \circledast Y). \quad (12)$$

Действуя на обе части (12) оператором  $J$ , получим:

$$J(X \circledast J^2Y) + J^2(X \circledast JY) = 0. \quad (13)$$

Перейдем к двойственному соотношению, скалярно умножив обе части (13) на  $Z$  и воспользовавшись невырожденностью метрики:

$$J^2 X \circledast JY = JX \circledast J^2Y. \quad (14)$$

В силу (11<sub>1</sub>) и (13) соотношение (10) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} B(X, Y) = & \frac{\varepsilon}{4} \{ -J(J^2 X \circledast J^2Y) + J(J^2Y \circledast J^2X) + \\ & + \varepsilon J(JX \circledast JY) - \varepsilon J(JY \circledast JX) \}. \end{aligned} \quad (15)$$

Далее, вычислим тензор  $B^*$ , исходя из его определения (8):

$$\begin{aligned} B^*(X, Y) = & \frac{\varepsilon}{4} \{ -J^2(J^2Y \circledast JX) - J^2(J^2Y \circledast JX) - \\ & - \varepsilon J(JY \circledast JX) - \varepsilon J(JY \circledast JX) \}. \end{aligned} \quad (16)$$

С учетом (15), (16), (14) и (11<sub>4</sub>) получаем (9).  $\blacktriangleright$

Соберем полученные результаты:

**Теорема 2.** Каждая неособая  $GA\mathcal{H}$ -структура ранга 1 дефекта  $b$  на многообразии  $M$  канонически порождает метрическую  $f$ -структуру эллиптического либо гиперболического типа на этом многообразии. В случае  $b=0$  эта  $f$ -структура тождественна почти эрмитовой структуре, а в случае  $b=1$  — почти контактной метрической структуре. Обратно, каждая метрическая  $f$ -структура  $\{J, g\}$  на  $M$  канонически достраивается до неособой  $GA\mathcal{H}$ -структуры ранга 1, композиционный тензор которой задается соотношением (9). В частности, если  $f$ -структура является почти эрмитовой, композиционный тензор задается соотношением

$$T(X, Y) = \frac{\varepsilon}{4} \{ \nabla_{JX}(J)Y + \nabla_X(J)(JY) \}; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (17)$$

◀ Из всех утверждений теоремы 2 еще не доказано лишь последнее! Для его обоснования продифференцируем соотношение  $I^2 = -\varepsilon \text{id}$ :

$$\nabla_X(J)(JY) + J\nabla_X(J)Y = 0; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (18)$$

С учетом (18) и (9) немедленно получаем (17). ▶

На основании теоремы 2 можно считать, что  $A\mathcal{H} \subset GA\mathcal{H}$ .

**Теорема 3.1.**  $GQ\mathcal{X} \cap A\mathcal{H} = Q\mathcal{X}$ ; 2.  $GG_1 \cap A\mathcal{H} = G_1$ ;  
3.  $GG_2 \cap A\mathcal{H} = G_2$ ; 4.  $GN\mathcal{X} \cap A\mathcal{H} = N\mathcal{X}$ ; 5.  $GA\mathcal{H} \cap A\mathcal{H} = A\mathcal{H}$ ;  
6.  $G\mathcal{H} \cap A\mathcal{H} = \mathcal{H}$ ; 7.  $G\mathcal{X} \cap A\mathcal{H} = \mathcal{X}$ .

◀ 1. Это утверждение можно переформулировать так: «Квазикелеровость почти эрмитовой структуры равносильна ковариантному постоянству структурного аффинора в присоединенной связи». Докажем последнее утверждение.  $\mathcal{P} \in Q\mathcal{X} \Leftrightarrow \nabla_X(J)Y +$

$$+ \nabla_{JX}(J)(JY) = 0 \Leftrightarrow \nabla_{JX}(J)Y = \nabla_X(J)(JY). \text{ Тогда } \tilde{\nabla}_X(J)Y = \\ = \nabla_X(J)Y + T(X, JY) - JT(X, Y) = \nabla_X(J)Y - 2JT(X, Y) = \\ = \nabla_X(J)Y - J\nabla_X(J)(JY) = 0 \text{ в силу (17) и (18). Обратно, пусть}$$

$$\tilde{\nabla}_X(J)Y = 0, \text{ т. е. } \nabla_X(J)Y - \frac{1}{2} J \{ \nabla_{JX}(J)Y + \nabla_X(J)(JY) \} = 0.$$

В силу (18),  $\nabla_X(J)Y + \nabla_{JX}(J)(JY) = 0$ .

2. По определению,  $\mathcal{P} \in G_1 \Leftrightarrow \nabla_X(J)X - \nabla_{JX}(J)(JX) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow T(X, JX) = 0 \text{ (в силу (17))} \Leftrightarrow T(X, X) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{B} - K\text{-алгебра.}$

3. По определению,  $\mathcal{P} \in G_2 \Leftrightarrow \mathfrak{S} \{ \nabla_X(\Omega)(Y, Z) - \nabla_{JX}(\Omega)(JY, Z) \} = \\ = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{S} \{ \langle Y, \nabla_X(J)Z \rangle - \langle JY, \nabla_{JX}(J)Z \rangle \} = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{S} \langle Y, \\ T(JX, Z) \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{B} - A\text{-алгебра.}$

4.  $GN\mathcal{X} \cap A\mathcal{H} = (GQ\mathcal{X} \cap GG_1) \cap A\mathcal{H} = (GQ\mathcal{X} \cap A\mathcal{H}) \cap (GG_1 \cap A\mathcal{H}) = Q\mathcal{X} \cap G_1 = N\mathcal{X}$ . Аналогично доказываются п. п. 5 и 7.

6. По определению,  $\mathcal{P} \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \nabla_X(J)Y - \nabla_{JX}(J)(JY) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow T(JX, Y) = 0 \Leftrightarrow T(X, Y) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{B} - \text{абелева } Q\text{-алгебра. } \blacktriangleright$

## § 2. Структурные уравнения $GAH$ -многообразий

Пусть  $M$  — псевдорасщепляемое редуktивное  $GAH$ -многообразие,  $\mathfrak{B}_p$  — его присоединенная в точке  $p \in M$   $Q$ -алгебра. По теоремам (1.4.2) и (1.4.3),  $\mathfrak{B}_p$  полуголоморфна, причем  $\mathfrak{B} = \dot{\times}_{\alpha=0}^r \mathfrak{Z}_\alpha$ ,

где  $\mathfrak{Z}_0$  — идеал параболического типа,  $\mathfrak{Z}_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, r$ ) — идеалы, каждый из которых есть образ ровно одного структурного аффинора  $J_\alpha$ . Назовем это разложение  $Q$ -алгебры  $\mathfrak{B}$  разложением, подчиненным структурным аффинорам, а идеал  $\mathfrak{Z}_\alpha$  — носителем аффинора  $J_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, r$ ) и обозначим его  $\text{supp } J_\alpha$ . Заметим, что по теореме (1.4.2) каждый из идеалов этого разложения в каждой точке допускает дальнейшее разложение в прямое произведение идеалов эллиптического и гиперболического типов:  $\mathfrak{Z}_\alpha = \mathfrak{C}_\alpha \times \mathfrak{H}_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, r$ ), где  $\mathfrak{C}_\alpha$  и  $\mathfrak{H}_\alpha$  — идеалы эллиптического и гиперболического типов соответственно. Повторяя рассуждение, проведенное при доказательстве теоремы (1.4.3), мы видим, что при соответствующей нормировке структурных аффиноров  $\mathfrak{C}_\alpha$  есть образ оператора  $J_\alpha - J_\alpha^3$ , а  $\mathfrak{H}_\alpha$  — образ оператора  $J_\alpha + J_\alpha^3$ . В связи с этим назовем идеал  $Q$ -алгебры  $\mathfrak{B}$  аффинорным идеалом, если он является образом некоторого эндоморфизма  $J$  модуля  $\mathfrak{B}$ . Из этого определения следует

Лемма 1. Пусть  $\mathfrak{Z}$  — аффинорный идеал  $Q$ -алгебры  $\mathfrak{B}$ ,  $J$  — соответствующий ему эндоморфизм. Тогда  $\dim \mathfrak{Z}_p^R = \text{rg } J_p(p \in M)$ . ▶

Определение 1. Точку  $p_0 \in M$  назовем регулярной относительно идеала  $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{B}$ , если функция  $\dim \mathfrak{Z}_p^R$  достигает локального максимума в этой точке, т. е.  $\exists U_{p_0} \subset M: \dim \mathfrak{Z}_{p_0}^R \geq \dim \mathfrak{Z}_p^R$  ( $p \in U_{p_0}$ ). Здесь и в дальнейшем символом  $U_p$  обозначается открытая окрестность точки  $p \in M$ .

Лемма 2. Множество регулярных относительно  $\mathfrak{Z}$  точек в  $M$  всюду плотно в  $M$ .

◀ Достаточно доказать существование регулярной точки в произвольной окрестности  $U_p$  произвольной точки  $p \in M$ . Рассмотрим последовательность  $\{p = p_0, p_1, \dots, p_k, \dots\}$ ,  $p_i \in U_p$ ,  $\dim \mathfrak{Z}_{p_i}^R > \dim \mathfrak{Z}_{p_{i-1}}^R$ . Она конечна, так как  $\forall p \in M \Rightarrow \dim \mathfrak{Z}_p^R \leq \dim M$ . В точке, на которой эта последовательность обрывается, функция  $\dim \mathfrak{Z}_p^R$  достигает своего максимума в  $U_p$ , т. е. эта точка регулярна относительно  $\mathfrak{Z}$ . ▶

Пусть теперь  $\mathfrak{Z}$  — аффинорный идеал,  $J$  — соответствующий ему эндоморфизм,  $p \in M$  — регулярная относительно  $\mathfrak{Z}$  точка. В силу сказанного выше, условие  $\dim \mathfrak{Z}_p^R \geq k$  равносильно условию  $\text{rg } J_p \geq k$ . Зафиксируем базис в касательном пространстве  $T_p(M)$ ,  $p \in M$ . Тогда это условие равносильно существованию ненулевых миноров до  $k$ -го порядка включительно матрицы  $(J_j^i)$  оператора

в этом базисе. Выбрав локальное сечение пространства расслоения реперов над  $M$  в некоторой окрестности точки  $p$ , по непрерывности получаем, что это условие выполняется в некоторой окрестности точки  $p$ , т. е.  $\forall p \in M \exists U_p \forall q \in U_p \Rightarrow \dim \mathfrak{F}_q^R \geq \dim \mathfrak{F}_p^R$ . Таким образом,  $p \in M$  регулярна относительно  $\mathfrak{F}$  тогда и только тогда, когда  $\exists U_p: \dim \mathfrak{F}_p^R | U_p = \text{const}$ . Назовем  $U_p$  окрестностью регулярности точки  $p$ .

**Определение 2.** Точку  $p \in M$  назовем регулярной, если она является регулярной относительно каждого идеала  $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \mathfrak{V}\}$ ;  $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, r$ . Обозначим множество всех регулярных точек в  $M$  символом  $\text{Reg } M$ . Оно, очевидно, образует открытое подмногообразие в  $M$ .

**Лемма 3.** Множество  $\text{Reg } M$  всюду плотно в  $M$ .

◀ Пусть  $\mathfrak{F}^\alpha$  и  $\mathfrak{F}^\beta$  ( $\alpha, \beta = 1, \dots, r$ ) — два таких идеала,  $p \in M$ . По лемме 2,  $\forall U_{p_1} \exists p_1 \in U_{p_1}$  — регулярная относительно  $\mathfrak{F}^\alpha$  точка. Пусть  $U_{p_1}$  — ее окрестность регулярности. Рассмотрим  $V_{p_1} = U_{p_1} \cap U_{p_1}$ . По лемме 2,  $\exists p_2 \in V_{p_1}$  — регулярная относительно  $\mathfrak{F}^\beta$  точка. Пусть  $U_{p_2}$  — ее окрестность регулярности. Рассмотрим  $V_{p_2} = V_{p_1} \cap U_{p_2}$ . Каждая точка из  $V_{p_2}$  будет регулярной как относительно  $\mathfrak{F}^\beta$  (так как  $V_{p_2} \subset U_{p_2}$ ), так и относительно  $\mathfrak{F}^\alpha$  (т. к.  $V_{p_2} \subset V_{p_1} \subset U_{p_1}$ ). Наконец,  $V_{p_2} \subset V_{p_1} \subset U_{p_1}$ . Итак,  $\forall U_{p_1} \exists p_3 \in U_{p_1}$  — регулярная относительно  $\mathfrak{F}^\alpha$  и  $\mathfrak{F}^\beta$  точка. Поскольку множество идеалов  $\{\mathfrak{F}^\alpha\}$  конечно, по индукции немедленно получаем, что  $\forall p \in M \exists U_p \exists q \in U_p$  — точка, регулярная относительно каждого из этих идеалов. ▶

Пусть  $p \in M$  — регулярная точка. Рассмотрим совокупность чисел  $\{s_1, \dots, s_r\}$ , где  $s_\alpha = \dim \mathfrak{F}_p^R$  ( $\alpha = 1, \dots, r$ ). Обозначим символом  $\text{Reg}_{s_1, \dots, s_r}(M)$  подмножество точек из  $\text{Reg } M$ , характеризующих мультиндексом  $\{s_1, \dots, s_r\}$ . Поскольку объединение открытых множеств открыто,  $\text{Reg}_{s_1, \dots, s_r}(M)$  — открытое подмногообразие в  $M$ , причем очевидно, что  $\text{Reg } M = \bigcup_{(s_1, \dots, s_r)} \text{Reg}_{s_1, \dots, s_r}(M)$ , т. е.

подмногообразие  $\text{Reg } M$  представляется в виде несвязной суммы конечного числа открытых подмногообразий вида  $\text{Reg}_{s_1, \dots, s_r}(M)$ . Назовем каждое такое подмногообразие регулярным подмногообразием мультиндекса  $\{s_1, \dots, s_r\}$  в  $M$ . Таким образом, доказана

**Теорема 1.** В псевдорасщепляемом редуktivном  $GA\mathcal{B}$ -многообразии  $M$  определено открытое всюду плотное подмногообразие регулярных точек, представленное в виде несвязной суммы регулярных подмногообразий. ▶

Определение 3. Псевдорасщепляемое редуktивное  $GA\mathcal{H}$ -многообразие назовем регулярным, если оно совпадает со своим регулярным подмногообразием.

Например, псевдорасщепляемое редуktивное квазиоднородное [6]  $GA\mathcal{H}$ -многообразие регулярно, так как согласно результатам [6], идеалы  $\mathfrak{J}_\alpha$  такого многообразия инвариантны при параллельных переносах в римановой связности. Более того, справедлива

Теорема 2. Псевдорасщепляемое редуktивное  $GQ\mathcal{H}$ -многообразие  $M$  регулярно.

◀ Пусть  $\mathfrak{J}_\alpha \subset \mathfrak{B}$  ( $\alpha = 1, \dots, r$ ) — идеал, определенный выше.

По лемме 1,  $\dim \mathfrak{J}_p^\alpha = \text{rg}(J_\alpha \pm J_\alpha^3)$ ;  $p \in M$ , и в силу ковариантного постоянства оператора  $J_\alpha$  в присоединенной связности, функция  $\dim \mathfrak{J}_p^\alpha$  постоянна на  $M$ . Значит,  $\mathfrak{J}_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, r$ ) порождает распределение определенной размерности на  $M$ . ▶

В случае регулярного  $GA\mathcal{H}$ -многообразия  $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0 \otimes C^\infty(M)$ , где  $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}_0(j_1, \dots, j_r)$  — кольцо, не зависящее от выбора точки  $p \in M$ , причем элемент  $\alpha \in \mathfrak{K}_0$  естественно отождествляется с элементом  $\alpha \otimes 1$  кольца  $\mathfrak{K}$ .

К регулярному  $GA\mathcal{H}$ -многообразию  $M$  стандартным образом присоединяется главное расслоение  $\mathfrak{K} = \{P, M, \pi, G\}$ , где  $P$  — совокупность реперов, определенных псевдоунитарными базисами (гл. 1, § 1)  $Q$ -алгебр  $\mathfrak{B}_p$ ;  $p \in M$ , образованными объединением унитарных базисов идеалов  $\mathfrak{J}_p^\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, r$ ) и ортогонального базиса идеала  $\mathfrak{J}_0$  (унитарность базиса  $\{e_i\}$   $S$ - или  $D$ -модуля и, соответственно, ортогональность базиса  $\{e_i\}$  вещественного векторного пространства понимаются в том смысле, что  $\langle\langle e_i, e_j \rangle\rangle = \pm \delta_{ij}$ ),  $\pi: P \rightarrow M$  — естественная проекция,  $G$  — структурная группа, являющаяся прямым произведением соответствующего числа  $S$ -псевдоунитарных групп,  $D$ -псевдоунитарных групп и  $R$ -псевдоортогональной группы. Это расслоение называется главным расслоением унитарных реперов над  $M$ . Аналогичным образом можно рассмотреть главное расслоение  $\mathfrak{K} = \{\tilde{P}, M, \pi, \tilde{G}\}$  всех псевдоунитарных реперов модулей  $\mathfrak{B}_p^{\mathfrak{K}}$  ( $p \in M$ ) с соответствующей структурной группой. При этом отображение  $\sigma: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}^{\mathfrak{K}}$  (гл. 1, § 4) индуцирует вложение  $\mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}$ , позволяющее рассматривать  $\mathfrak{K}$  как подрасслоение расслоения  $\mathfrak{K}$ , т. е. как  $G$ -структуру над  $M$ , которую мы обозначим  $\mathfrak{G}$ . Допуская вольность речи, этой же буквой мы будем обозначать и пространство этой  $G$ -структуры.

Замечание 1. Редуktивность псевдорасщепляемого  $GQ\mathcal{H}$ -многообразия является достаточным, но не необходимым условием существования главного расслоения унитарных реперов над ним. Например, такое расслоение, очевидно, существует над любым

(необязательно редуکتивным) почти эрмитовым многообразием классического либо гиперболического типа и, более обще, над  $GA\mathcal{H}$ -многообразием, присоединенная  $Q$ -алгебра  $\mathfrak{B}$  которого распадается в прямое произведение  $\mathfrak{B} = (\times_{\alpha} \mathfrak{J}) \times \mathfrak{J}_0$  распределений аффинорных идеалов эллиптического и гиперболического типов и идеала параболического типа. Назовем  $GA\mathcal{H}$ -многообразия, обладающие этим свойством, слабо редуکتивными ( $\omega$ -редуکتивными), а разложение  $\mathfrak{B} = (\times_{\alpha} \mathfrak{J}) \times \mathfrak{J}_0$  — реперным. Ясно, что класс таких многообразий включает в себя класс псевдорасщепляемых редуکتивных  $GQ\mathcal{H}$ -многообразий, а также классы почти эрмитовых и почти параэрмитовых многообразий.

Замечание 2. Хорошо известно, что некоторый набор функций  $\rho(\mathfrak{E}) = \{\mathfrak{E}_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}(\rho)\}$  на пространстве расслоения реперов над многообразием  $M^n$  с аффинной связностью  $\nabla$  определяет тензор  $\mathfrak{E}$  типа  $(r, s)$  на  $M^n$  тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} d\rho(\mathfrak{E})(X_1, \dots, X_r, Y^1, \dots, Y^s) + \rho(\mathfrak{E})(\Phi_\rho(X_1), \dots, Y^s) + \\ + \dots - \rho(\mathfrak{E})(X_1, \dots, Y^{s-1}, \Phi_\rho^T(Y^s)) = \\ = \rho(\nabla \mathfrak{E})(X_1, \dots, X_r, Y^1, \dots, Y^s; \omega), \end{aligned}$$

где  $\Phi_\rho$  — форма связности со значениями в алгебре Ли структурной группы расслоения,  $\Phi_\rho^T$  — композиция отображения  $\Phi_\rho$  с отображением транспонирования элементов алгебры Ли структурной группы,  $\omega$  — форма смещения,  $\rho(\nabla \mathfrak{E}) = \{\nabla \mathfrak{E}_{j_1 \dots j_r; k}^{i_1 \dots i_s}(\rho)\}$  — набор функций на пространстве расслоения реперов, с необходимостью определяющий ковариантный дифференциал тензора  $\mathfrak{E}$  в этой связности,  $X_1, \dots, X_r \in \mathbb{R}^n$ ;  $Y^1, \dots, Y^s \in (\mathbb{R}^n)^*$ . Аналогичное утверждение справедливо для расщепляемых  $\omega$ -редуکتивных  $GQ\mathcal{H}$ -многообразий относительно построенного расслоения унитарных реперов, если под  $\rho(\mathfrak{E})$  понимать набор  $\mathfrak{K}_0$ -значных функций на  $\mathfrak{K}$ , где  $\mathfrak{K}_0$  — кольцо, соответствующее модулю  $\mathfrak{B}_0$  типового слоя ассоциированного  $\mathfrak{K}$  расслоения, а под  $\mathfrak{E}$  — отображение

$$\mathfrak{E}: \underbrace{\mathfrak{B} \times \dots \times \mathfrak{B}}_r \times \underbrace{\mathfrak{B} \times \dots \times \mathfrak{B}}_s \rightarrow \mathfrak{K},$$

линейное либо антилинейное по различным аргументам. В случае, если  $\mathfrak{E}$  антилинейно по какому-либо аргументу, в соответствующем слагаемом элемент  $\Phi_\rho$  или  $\Phi_\rho^T$  заменяется на сопряженный элемент  $\overline{\Phi_\rho}$  (соответственно,  $\overline{\Phi_\rho^T}$ ).

Пусть теперь  $M$  — расщепляемое  $\omega$ -редуکتивное  $GQ\mathcal{H}$ -многообразие ранга  $r$ . В соответствии с определением  $GQ\mathcal{H}$ -многообразия форма  $\mathcal{H} = \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  ковариантно постоянна в присоединенной связности  $\tilde{\nabla} = \nabla + T$ . Пусть  $\tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}^a\}$  — форма смещения,

а  $\tilde{\varphi} = \{\tilde{\omega}_\rho^a\}$  — форма связности  $\tilde{\nabla}$  на пространстве расслоения  $\mathfrak{R}$ . Тогда первое структурное уравнение Каргана связности  $\tilde{\nabla}$  примет вид:

$$d\tilde{\omega} = \tilde{\varphi} \wedge \tilde{\omega} + \tilde{\Omega}, \quad (1)$$

где  $\tilde{\Omega}$  — тензориальная форма кручения, соответствующая тензору  $\frac{1}{2}B$ ,  $B = 2 \text{Alt } T$ ,  $\text{Alt}$  — оператор альтернирования по ковариантным аргументам. Далее, каждый репер  $\rho \in \mathfrak{R}$  модуля  $\mathfrak{B}_\rho$  определяет изоморфизм тензорных алгебр этого модуля и типового слоя  $\mathfrak{B}_0$  ассоциированного  $\mathfrak{R}$  расслоения. Ввиду ковариантного постоянства тензора  $\mathcal{H}$ , в присоединенной связности  $d_\rho(\mathcal{H})(X, Y) + \rho(\mathcal{H})(\tilde{\varphi}_\rho X, Y) + \rho(\mathcal{H})(X, \tilde{\varphi}_\rho Y) = 0$  ( $X, Y \in \mathfrak{B}_0$ ). Поскольку в унитарном базисе форма  $\mathcal{H}_0$  определяется постоянной матрицей,  $d_\rho(\mathcal{H}) = 0$ , и предыдущее соотношение переписывается в виде  $\mathcal{H}_0(\tilde{\varphi}_\rho X, Y) + \mathcal{H}_0(X, \tilde{\varphi}_\rho Y) = 0$ , где  $\mathcal{H}_0 = \rho(\mathcal{H})$ . Но  $\mathcal{H}_0(X, \tilde{\varphi}_\rho Y) = \mathcal{H}_0(\tilde{\varphi}_\rho^* X, Y)$ , где «\*» — оператор сопряжения относительно метрики  $\mathcal{H}_0$ , откуда в силу невырожденности этой метрики,

$$\tilde{\varphi}^* = -\tilde{\varphi}. \quad (2)$$

Отождествляя  $\mathfrak{R}$  с  $G$ -структурой  $\mathfrak{G}$ , запишем с учетом (1) и (2) первую группу структурных уравнений Каргана в присоединенной связности:

$$1. d\omega = \varphi \wedge \omega + \Omega; \quad 2. d(\tau_0 \omega) = -\varphi^* \wedge (\tau_0 \omega) + \tau_0 \Omega; \quad (3)$$

где  $\omega = (\sigma^{-1})^\wedge \tilde{\omega}$ ;  $\varphi = (\sigma^{-1})^\wedge \tilde{\varphi}$ ;  $\Omega = (\sigma^{-1})^\wedge \tilde{\Omega} = \sigma_0 \circ \tilde{\Omega}$  — тензориальная 2-форма на  $\mathfrak{G}$ , соответствующая тензору  $\frac{1}{2}\sigma B$  на  $M$ ,  $\sigma_0 = \rho \sigma_\rho \rho^{-1}$ ,  $\tau_0 = \rho \tau_\rho \rho^{-1}$ ,  $\tau_\rho$  — оператор естественного сопряжения в  $\mathfrak{B}_\rho$  (гл. 1, § 3),  $(\sigma^{-1})^\wedge$  — отображение, контраградиентное к  $\sigma$ . Стандартная процедура дифференциального продолжения (3) дает вторую группу структурных уравнений Каргана:

$$d\varphi = \varphi \wedge \varphi + \Psi_1 + \Psi_2 + \tau_0 \Psi_2; \quad (4)$$

где  $\Psi_1, \Psi_2$  — тензориальные 2-формы на  $\mathfrak{G}$ , соответствующие следующим элементам спектра тензора  $\tilde{R}$  кривизны связности  $\tilde{\nabla}$ :

$$1. \tilde{R}_{(2)}(X, Y)Z = \frac{1}{2}Y \circ (Z \circ X) + A(Z, X, Y);$$

$$2. \frac{1}{2}\tilde{R}_{(6)}(X, Y)Z = -\frac{1}{2}\tilde{\nabla}_{(6)}B(X, Y; Z).$$

Здесь  $A$  — 3-форма на  $\mathfrak{B}$  со значениями в  $\mathfrak{B}$ , линейная и симметричная по первым двум аргументам и антилинейная по

третьему, которая называется тензором кривизны присоединенной  $Q$ -алгебры [4],  $X \circ Y = X * Y - Y * X$  — операция альтернированного умножения в  $\mathfrak{A}$  [5]. Уравнения (3) и (4) полностью определяют геометрию многообразия  $M$ .

## Глава 3

### ОБОБЩЕННЫЕ ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

В этом разделе изучается класс  $GA\mathcal{H}$ -структур, являющихся непосредственным обобщением почти контактных метрических структур, по богатству геометрических свойств стоящих в одном ряду с почти эрмитовыми структурами. Несмотря на существование важных связей между этими структурами, геометрия почти контактных метрических структур резко отличается от геометрии почти эрмитовых структур и требует при классическом подходе принципиально новых средств изучения. Тем не менее теория таких структур, как мы видели, укладывается в рамки теории обобщенных почти эрмитовых структур, что позволяет с использованием разработанного выше аппарата существенно продвинуться в изучении этих структур, получив полное решение ряда стоявших здесь задач.

#### § 1. Почти контактные метрические структуры

Напомним [10], что контактной формой на нечетномерном многообразии  $M$ ,  $\dim M = 2n + 1$ , называется 1-форма  $\eta$  такая, что  $\eta \wedge \underbrace{(d\eta) \wedge \dots \wedge (d\eta)}_n \neq 0$ , т. е.  $\text{rg } \eta = \dim M$ , в каждой точке

из  $M$ . Многообразие с фиксированной на нем контактной формой называется контактным многообразием [26]. На таком многообразии внутренним образом определены распределения  $\mathfrak{E} = \ker \eta$ ,  $\dim \mathfrak{E} = 2n$ , и  $\mathfrak{M} = \ker (d\eta)$ ,  $\dim \mathfrak{M} = 1$ . Из теоремы Дарбу [10] легко вывести, что  $\mathfrak{E} \cap \mathfrak{M} = \{0\}$  и, значит,  $\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{E} \oplus \mathfrak{M}$ . Выберем  $\xi \in \mathfrak{M}$  так, чтобы  $\eta(\xi) = 1$ . Тогда на  $M$  можно определить взаимно дополнительные проекторы  $\mathfrak{m} = \xi \otimes \eta$  и  $\mathfrak{l} = \text{id} - \xi \otimes \eta$  на распределения  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{E}$  соответственно.

Пусть теперь на  $M$  фиксирована риманова метрика  $h$ . Исходя из метрики  $h|_{\mathfrak{E}}$ , нетрудно построить метрику  $(\cdot, \cdot)$  на  $\mathfrak{E}$  такую, что оператор  $I: \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{E}$ , определенный тождеством  $(X, IY) = -d\eta(X, Y)$ ;  $X, Y \in \mathfrak{E}$ , будет антиинволютивным, т. е.  $I^2 = -\text{id}$ , и, значит,  $(IX, IY) = (X, Y)$ . Тогда вектор  $\xi$ , ковектор  $\eta$ , оператор  $\Phi = I \circ I$  и риманова метрика  $\langle X, Y \rangle = (IX, IY) + [h(\xi, \xi)]^{-1} h(\mathfrak{m}X, \mathfrak{m}Y)$  на  $M$ , очевидно, обладают свойствами:

1.  $\Phi(\xi) = 0$ ; 2.  $\eta \circ \Phi = 0$ ; 3.  $\eta(\xi) = 1$ ; 4.  $\Phi^2 = -\text{id} + \xi \otimes \eta$ ;

$$5. \langle X, \Phi Y \rangle = d\eta(X, Y); \quad 6. \eta(X) = \langle \xi, X \rangle; \quad 7. \langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y); \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (1)$$

Определение 1 ([35]). Контактное многообразие  $M$ , снабженное римановой метрикой  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , для которой справедливы соотношения (1), называется контактным метрическим многообразием.

Приведенная конструкция делает естественным следующее

Определение 2 ([35]). Почти контактной метрической (или почти грейевой) структурой на многообразии  $M$  называется совокупность  $\{g, \Phi, \xi, \eta\}$  тензорных полей на  $M$ , где  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  — (псевдо) риманова метрика,  $\Phi$  — тензор типа  $(1, 1)$ , называемый структурным оператором,  $\xi$  — вектор,  $\eta$  — ковектор, называемые структурным вектором и ковектором соответственно. При этом:

$$1. \Phi(\xi) = 0; \quad 2. \eta \circ \Phi = 0; \quad 3. \eta(\xi) = 1; \quad 4. \Phi^2 = -\text{id} + \xi \otimes \eta; \quad 5. \langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y); \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (2)$$

Заметим, что эти соотношения не являются независимыми; например,  $(2_1)$  и  $(2_2)$  следуют из  $(2_3)$  и  $(2_4)$  [13]. Далее, из  $(2_1)$ ,  $(2_3)$  и  $(2_5)$  следует, что  $\eta(X) = \langle \xi, X \rangle$  ( $X \in \mathfrak{X}(M)$ ), а из  $(2_2)$ ,  $(2_4)$  и  $(2_5)$  — что тензор  $\Omega(X, Y) = \langle X, \Phi Y \rangle$  является косимметричным; он называется фундаментальной формой структуры. Тройка  $\{\Phi, \xi, \eta\}$ , удовлетворяющая условиям  $(2_3)$  и  $(2_4)$ , называется почти контактной структурой; в таком виде она была введена Сасаки в [35]. Ее задание равносильно заданию  $G$ -структуры на  $M$  со структурной группой  $\mathbb{R}^* \times GL(n, \mathbb{C})$ , где  $\mathbb{R}^*$  — мультипликативная группа положительных вещественных чисел. По существу именно таким образом она была введена Дж. Греем в [26] в 1959 г. Задание почти контактной структуры  $\{\Phi, \xi, \eta\}$  на многообразии  $M$  порождает каноническое гиперраспределение  $\mathfrak{L} = \ker \eta$  на этом многообразии, называемое контактным, инвариантное относительно  $\Phi$ . В силу  $(2_4)$ , оператор  $\Phi$  индуцирует на  $\mathfrak{L}$  почти комплексную структуру. Это дало основание Бузону назвать почти контактную структуру почти кокомплексной [17]. Если  $\{g, \Phi, \xi, \eta\}$  — почти контактная метрическая структура, то в силу  $(2_5)$ , пара  $\{\Phi|_{\mathfrak{L}}, g|_{\mathfrak{L}}\}$  задает почти эрмитову структуру на этом гиперраспределении, в силу чего почти контактную метрическую структуру естественно называть метрической почти кокомплексной структурой. Очевидно, ее задание равносильно заданию  $G$ -структуры на  $M$  со структурной группой  $\{e\} \times U(n)$ . Отметим, что исторически понятие почти контактной структуры складывалось в такой последовательности: Чжэнь [18] обнаружил, что контактное многообразие допускает  $G$ -структуру со структурной группой  $\{e\} \times U(n)$ ; многообразия, допускающие такую структуру, Дж. Грей назвал почти контактными многообразиями [26]. Сасаки заметил, что такая  $G$ -структура порождает тройку  $\{\Phi, \xi, \eta\}$ , обладающую

указанными выше свойствами (2<sub>3</sub>) и (2<sub>4</sub>), откуда легко вывести (2<sub>1</sub>) и (2<sub>2</sub>). Кроме того, исходя из произвольной римановой метрики  $h$  на таком многообразии он построил риманову метрику  $\langle X, Y \rangle = h(\Phi X, \Phi Y) + h(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) + \eta(X)\eta(Y)$ , дополняющую  $\{\Phi, \xi, \eta\}$  до почти контактной метрической структуры [35].

Важнейшим примером почти контактных метрических структур, в значительной мере определяющим их роль в дифференциальной геометрии, служит структура, индуцируемая на гиперповерхности  $N$  многообразия  $M$ , снабженного почти эрмитовой структурой  $\{J, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ . Напомним эту конструкцию. Пусть  $n^0$  — поле единичной нормали к  $N$ . Тогда вектор  $\xi = J(n^0) \in \mathfrak{X}(N)$ , причем его ортогональное дополнение  $\mathfrak{L}$  на  $N$  инвариантно относительно  $J$ . Определим в  $\mathfrak{X}(N)$  линейный оператор  $\Phi = J|_{\mathfrak{L}} \oplus 0|_{\mathfrak{M}}$ , где  $\mathfrak{M}$  — линейная оболочка вектора  $\xi$ , и 1-форму  $\eta(X) = \langle \xi, X \rangle$ . Тогда  $\{\langle \cdot, \cdot \rangle, \Phi, \xi, \eta\}$  — почти контактная метрическая структура на  $N$ . В частности, такая структура индуцируется на нечетномерной сфере  $S^{2n-1}$ , рассматриваемой как гиперповерхность в о веществе пространства  $S^n$ . Это — важнейший и, по-видимому, исторически первый конкретный пример такой структуры; будем называть ее канонической. Эта структура будет играть важную роль в дальнейшем изложении. Другой важный тип примеров почти контактных (метрических) структур дают главные расслоения со структурной группой  $T^1 = SO(2, \mathbb{R})$  (главные  $T^1$ -расслоения) с фиксированной линейной связностью над почти комплексным (соответственно, почти эрмитовым) многообразием [30]. Очевидно, пространство такого расслоения несет естественную почти контактную (метрическую) структуру. Обратно, если почти контактная структура  $\{\Phi, \xi, \eta\}$  на многообразии  $M$  такова, что интегральные кривые поля  $\xi$  диффеоморфны окружностям, причем  $L_{\xi}(\Phi) = L_{\xi}(\eta) = 0$ , то  $M$  является пространством главного  $T^1$ -расслоения над почти комплексным многообразием, причем  $\eta$  — форма связности [32]. Очевидно, если риманова метрика  $g$  дополняет такую структуру до метрической, причем  $\xi$  — вектор Киллинга, то на базе расслоения индуцируется почти эрмитова структура. Эти условия выполняются, например, для сферы  $S^{2n+1}$ ; указанное главное  $T^1$ -расслоение в этом случае — классическое расслоение Хопфа  $S^{2n+1} \rightarrow CP^n$ . Недавно Диаз Миранда и Ревентос доказали, что существует естественное взаимно однозначное соответствие между множеством классов эквивалентных однородных почти контактных компактных многообразий и множеством классов эквивалентных однородных симплектических односвязных компактных многообразий с целочисленной симплектической формой, порожденное указанной конструкцией [19].

Пусть  $\{g = \langle \cdot, \cdot \rangle, \Phi, \xi, \eta\}$  — почти контактная метрическая структура на многообразии  $M$ . Хорошо известно [10], что на многообразии  $M \times \mathbb{R}$  в этом случае индуцируется почти эрмитова структура  $\{J, h\}$ , где  $J = \Phi|_{\mathfrak{L}} \oplus J_1$ ,  $h = g|_{\mathfrak{L}} \oplus g_1$ ,  $J_1$  — канони-

ческая почти комплексная структура на двумерном распределении  $\mathfrak{M} \times \mathbb{R}$ ,  $g_1$  — метрика на этом распределении, являющаяся прямой суммой метрики  $g|_{\mathfrak{M}}$  и канонической метрики на  $\mathbb{R}$ . Почти контактная структура  $\{\Phi, \xi, \eta\}$  называется нормальной, если структура  $\{J, h\}$  интегрируема [13]; необходимое и достаточное условие нормальности структуры имеет вид  $N + \frac{1}{2} \xi \otimes d\eta = 0$ , где  $N$  — тензор Нейенхейса оператора  $\Phi$  [13]. Нормальная контактная метрическая структура называется сасакиевой [13]. Необходимое и достаточное условие сасакиевости структуры имеет вид [13]:

$$\nabla_X (\Phi) Y = \langle X, Y \rangle \xi - \eta(Y) X; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Сасакиевы структуры являются важнейшим видом почти контактных метрических структур; с ними связан основной поток многочисленных исследований почти контактных метрических структур, обзор которых приведен, например, в [11].

Почти контактная метрическая структура называется почти сасакиевой, если  $d\eta = \Omega$ . Легко видеть, что это понятие тождественно понятию контактной метрической структуры. В самом деле, для почти сасакиевой структуры  $\ker \eta = \mathfrak{L}$ ,  $\ker d\eta = \ker \Omega = \mathfrak{M}$ , и, значит,  $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ , т. е.  $\text{rg } \eta = 2n + 1$ . Заметим, что до сих пор этот факт часто проходил мимо внимания исследователей.

Перечислим основные классы почти контактных метрических структур, наиболее интересные с точки зрения дальнейшего изложения, вместе с тождествами, их характеризующими [15], [16], [21]:

1. Нормальные ( $\mathfrak{N}$ ):  $N + \frac{1}{2} \xi \otimes d\eta = 0$ ;
2. Почти сасакиевы ( $A\mathcal{P}$ ):  $d\eta = \Omega$ ;
3. Приблизительно сасакиевы ( $N\mathcal{P}$ ):  $\nabla_X (\Phi) X = \langle X, X \rangle \xi - \eta(X) X$ ;
4. Сасакиевы ( $\mathcal{P}$ ):  $\nabla_X (\Phi) Y = \langle X, Y \rangle \xi - \eta(Y) X$ ;
5. Почти косимплектические ( $A\mathcal{E}s$ ):  $d\Omega = d\eta = 0$ ;
6. Слабо косимплектические ( $N\mathcal{E}s$ ):  $\nabla_X (\Phi) X = \nabla_X (\eta) X = 0$ ;
7. Точнейше косимплектические ( $C\mathcal{E}s$ ):  $\nabla_X (\Phi) X = 0$ ;  $d\eta = 0$ ;
8. Косимплектические ( $\mathcal{E}s$ ):  $\nabla \Phi = \nabla \eta = 0$ .

Имеет место следующая таблица включений:

$$\begin{array}{l}
 N\mathcal{P} \supset \mathcal{P} \subset A\mathcal{P} \quad A\mathcal{P} \cap N\mathcal{P} = \mathfrak{N} \cap N\mathcal{P} = \mathfrak{N} \cap A\mathcal{P} = \mathcal{P}; \\
 \cap \\
 \mathfrak{N} \quad \quad \quad A\mathcal{E}s \cap N\mathcal{E}s = A\mathcal{E}s \cap C\mathcal{E}s = \\
 \cup \\
 N\mathcal{E}s \supset \mathcal{E}s \subset A\mathcal{E}s \quad = \mathfrak{N} \cap A\mathcal{E}s = \mathfrak{N} \cap N\mathcal{E}s = \mathcal{E}s.
 \end{array}$$

Сасакиевы и косимплектические структуры являются своеобразными аналогами келеровых структур в почти эрмитовой геометрии; такие структуры индуцируются, например, на вполне омбилических и, соответственно, вполне геодезических гиперповерхностях келеровых многообразий [13], [21]. В частно-

сти, каноническая структура на нечетномерной сфере является структурой Сасаки. В той же мере почти сасакиевые и почти косимплектические структуры являются аналогами почти келеровых, а приближенно сасакиевы и слабо косимплектические структуры — аналогами приближенно келеровых структур. В ходе дальнейшего изложения эти классы мы обсудим подробнее.

Наряду с классическими почти контактными метрическими структурами в печати рассматриваются также так называемые почти контактные метрические структуры гиперболического типа, или почти параконтактные метрические структуры. Напомним, что почти контактной структурой гиперболического типа [40] или почти параконтактной структурой [36] называется тройка  $\{\Phi, \xi, \eta\}$  тензорных полей на многообразии  $M$ , где  $\Phi$  — тензор типа  $(1,1)$ , называемый структурным оператором, или структурным аффинором,  $\xi$  — вектор,  $\eta$  — ковектор, называемые структурными, причем:

$$1. \eta(\xi) = 1; 2. \Phi^2 = \text{id} - \xi \otimes \eta.$$

Из этих соотношений следует, что  $\Phi(\xi) = 0; \eta \circ \Phi = 0$ . Если дополнительно задана псевдориманова метрика  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  такая, что: 1.  $\eta(X) = \langle \xi, X \rangle$ ; 2.  $\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = -\langle X, Y \rangle + \eta(X)\eta(Y)$ ;  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , структура называется метрической. Как самостоятельный объект такие структуры рассматривали Сато [36], [37], Адати и Миядзава [12], Упадхий и Дьюб [40] и др., однако теория таких структур, несмотря на формальное сходство с теорией классических почти контактных структур, развита слабо.

## § 2. Структурные уравнения почти контактных метрических структур

Пусть  $M$  — гладкое многообразие размерности  $\dim M = 2n+1$ ,  $\mathcal{S} = \{g = \langle \cdot, \cdot \rangle, \Phi, \xi, \eta\}$  — почти контактная метрическая структура классического либо гиперболического типа на  $M$ . Фундаментальная форма  $F$  такой структуры определяется тождеством  $F(X, Y) = \langle \Phi^3 X, Y \rangle$ , а тензор Нейенхейса  $N$  оператора  $\Phi$  — тождеством

$$4N(X, Y) = [\Phi X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y];$$

$$X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Используя тождество  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ , выражающее отсутствие кручения римановой связности, запишем последнее тождество в виде

$$4N(X, Y) = \nabla_{\Phi X}(\Phi)Y - \Phi \nabla_X(\Phi)Y - \nabla_{\Phi Y}(\Phi)X + \Phi \nabla_Y(\Phi)X. \quad (1)$$

Напомним (§ 1, гл. 2), что на  $M$  естественно определена псевдорасщепляемая  $GA\mathcal{H}$ -структура  $\{g, \Phi, T\}$  ранга 1.

В модуле  $\mathfrak{X}(M)$  определена пара взаимно дополнительных проекторов  $\mathfrak{w} = \xi \otimes \eta$  и  $\mathfrak{l} = \text{id} - \xi \otimes \eta = -\varepsilon \Phi^2$ ;  $\varepsilon = \pm 1$ . Очевидно,  $\Phi^2 \mathfrak{l} = -\varepsilon \mathfrak{l}$ ;  $\langle \Phi \mathfrak{l} X, \Phi \mathfrak{l} Y \rangle = \varepsilon \langle \mathfrak{l} X, \mathfrak{l} Y \rangle$  ( $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ), т. е. на распределении  $\mathfrak{L}$ -образе проектора  $\mathfrak{l}$ -пара  $\{\Phi | \mathfrak{L}, g | \mathfrak{L}\}$  определяет почти эрмитову структуру классического (соответственно, гиперболического) типа, следовательно,  $\mathfrak{L}$  можно рассматривать как эрмитово векторное расслоение над  $M$  с метрикой  $\langle\langle X, Y \rangle\rangle = \langle X, Y \rangle + j \langle \Phi^3 X, Y \rangle$ ;  $X, Y \in \mathfrak{L}$ ;  $j = \sqrt{-\varepsilon}$ ;  $j \neq 1$ . Далее, в расслоении  $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{R}$  над  $M$ , где  $\mathfrak{R}$ -поле  $\mathbb{C}$  комплексных чисел (соответственно, кольцо  $\mathbb{D}$  двойных чисел) естественно определены взаимно дополнительные проекторы  $\sigma = \frac{1}{2}(\text{id} + j^3 \Phi_{\mathfrak{R}})$  и  $\bar{\sigma} =$

$= \frac{1}{2}(\text{id} - j^3 \Phi_{\mathfrak{R}})$ , где  $\Phi_{\mathfrak{R}} = (\Phi | \mathfrak{L}) \otimes \text{id}_{\mathfrak{R}}$ , а также оператор  $\tau$  естественного сопряжения, причем очевидно, что на  $\mathfrak{L}$  справедливо соотношение  $\bar{\sigma} = \tau \circ \sigma$ . Обозначим  $\pi = \sigma \circ \mathfrak{l}$ ,  $\bar{\pi} = \bar{\sigma} \circ \mathfrak{l}$ . Пусть  $p \in M$ . Выберем в  $\mathfrak{L}_p$  репер  $(p, e_1, \dots, e_n)$ , унитарный относительно метрики  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ , и построим репер  $(p, e_1, \dots, e_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_0)$   $\mathfrak{R} \oplus \oplus \mathbb{R}$ -модуля  $(\mathfrak{L}_p^{\mathfrak{R}} \otimes \mathfrak{R}) \oplus \mathfrak{M}_p$ , где  $\mathfrak{M}_p$ -образ оператора  $\mathfrak{w}$ , положив  $\varepsilon_a = \sigma(e_a)$ ;  $\varepsilon_{\hat{a}} = \bar{\sigma}(e_a)$ ;  $\varepsilon_0 = \xi_p$  ( $a = 1, \dots, n$ ). Легко заметить, что

$$\Phi_{\mathfrak{R}}(\varepsilon_a) = j \varepsilon_a; \quad \Phi_{\mathfrak{R}}(\varepsilon_{\hat{a}}) = -j \varepsilon_{\hat{a}}; \quad \Phi(\varepsilon_0) = 0 \quad (2)$$

( $a = 1, \dots, n$ ). Такой репер называется репером, адаптированным структуре, или А-репером [5]. Очевидно, совокупность всех таких реперов определяет  $G$ -структуру на  $M$  со структурной группой  $G = U(n, \mathfrak{R}) \times \{1\}$ . Пусть  $\omega$ -форма смещения,  $\varphi$ -форма римановой связности  $\nabla$  на пространстве  $\mathfrak{E}$  этой  $G$ -структуры. Первое структурное уравнение Картана римановой связности  $\nabla$  имеет вид:

$$d\omega = \Phi \wedge \omega. \quad (3)$$

Далее, каждый репер  $p \in \mathfrak{E}$  определяет изоморфизм тензорных алгебр касательного пространства  $T_p(M)$  к  $M$  в начале репера  $p \in M$  и типового слоя  $\mathfrak{F}_0 = \mathbb{R}^{2n+1}$ . Так как  $\Phi$ -тензор типа  $(1, 1)$  на  $M$ ,  $d\rho(\Phi) + [\rho(\Phi), \varphi_\rho] = D\varphi$ , где  $D\varphi$ -тензорная 1-форма на  $\mathfrak{E}$  со значениями в  $\mathfrak{F}_0^* \otimes \mathfrak{F}_0$ ,  $\mathfrak{F}_0 = \mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R}$ , соответствующая тен-

зору  $\nabla \Phi$ . Поскольку, согласно (2),  $\rho(\Phi) = \begin{bmatrix} jI & 0 & 0 \\ 0 & -jI & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,

$d\rho(\Phi) = 0$  и, следовательно,

$$\rho(\Phi) \varphi_\rho - \varphi_{\rho} \rho(\Phi) = D\varphi. \quad (4)$$

Пусть операторы  $\pi_0, \bar{\pi}_0, \mathfrak{w}_0$  определены соотношениями  $\pi_0 = \rho \pi_\rho \rho^{-1}$ ;  $\bar{\pi}_0 = \rho \bar{\pi}_\rho \rho^{-1}$ ;  $\mathfrak{w}_0 = \rho \mathfrak{w}_\rho \rho^{-1}$ . Из (4) имеем:  $\bar{\pi}_0 \rho(\Phi) \varphi_\rho \pi_0 - \bar{\pi}_0 \varphi_{\rho} \rho(\Phi) \pi_0 = \bar{\pi}_0 D\varphi \pi_0$ ; далее,  $\bar{\pi}_0 \rho(\Phi) \pi_0 = \bar{\pi}_0 \rho(\Phi) (\pi_0 + \bar{\pi}_0 + \mathfrak{w}_0) \varphi_\rho \pi_0 = -j \pi_0 \varphi_\rho \pi_0$ ;  $\bar{\pi}_0 \varphi_{\rho} \rho(\Phi) \pi_0 = \bar{\pi}_0 \varphi_\rho (\pi_0 + \bar{\pi}_0 + \mathfrak{w}_0) \rho(\Phi) \pi_0 = j \bar{\pi}_0 \varphi_\rho \pi_0$ , ввиду чего

1.  $\bar{\pi}_0 \varphi_\rho \pi_0 = -\frac{1}{2} j^3 \bar{\pi}_0 D \Phi \pi_0$ ; аналогично,
2.  $\pi_0 \varphi_\rho \bar{\pi}_0 = \frac{1}{2} j^3 \pi_0 D \Phi \bar{\pi}_0$ ; 3.  $\pi_0 D \Phi \pi_0 = \bar{\pi}_0 D \Phi \bar{\pi}_0 = 0$ ;
4.  $\pi_0 D \Phi \pi_0 = 0$ ; (5)
5.  $\pi_0 \varphi_\rho \pi_0 = j^3 \pi_0 D \Phi \pi_0$ ; 6.  $\pi_0 \varphi_\rho \pi_0 = -j^3 \pi_0 D \Phi \pi_0$ ;
7.  $\bar{\pi}_0 \varphi_\rho \pi_0 = -j^3 \bar{\pi}_0 D \Phi \pi_0$ ; 8.  $\pi_0 \varphi_\rho \bar{\pi}_0 = j^3 \pi_0 D \Phi \bar{\pi}_0$ .

Уравнение (3) с учетом (5) можно записать в виде [5]:

$$d(\pi_0 \omega) = \psi \wedge (\pi_0 \omega) + \Omega; \quad (6)$$

где  $\psi = \pi_0 \Phi \pi_0$ ;  $\Omega$  — тензориальная форма на  $\mathfrak{G}$  со значениями в  $\mathfrak{F}_0$ , соответствующая тензору  $T(X, Y) = \frac{1}{2} j^3 \pi \nabla_X (\Phi) (\bar{\pi} + 2\pi) Y$ . Очевидно,  $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4$ , где  $\Omega_i$  — тензориальные 2-формы на  $\mathfrak{G}$ , соответствующие тензорам  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ):

$$T_1(X, Y) = \frac{1}{2} \Phi^3 \nabla_{(3)} \Phi(Y; X); \quad T_2(X, Y) = \Phi^3 \nabla_{(6)} \Phi(Y; X);$$

$$T_3(X, Y) = \frac{1}{4} \Phi^3 \{ \nabla_{(4)} \Phi(Y; X) - \nabla_{(4)} \Phi(X; Y) \};$$

$$T_4(X, Y) = \frac{1}{2} \Phi^3 \{ 2 \nabla_{(7)} \Phi(Y; X) - \nabla_{(5)} \Phi(X; Y) \}.$$

Аналогично,

$$d(\bar{\pi}_0 \omega) = \bar{\psi} \wedge (\bar{\pi}_0 \omega) + \bar{\Omega}; \quad (7)$$

$$d(\pi_0 \omega) = -j^3 (\pi_0 D \Phi \pi_0) \wedge (\pi_0 \omega) + j^3 (\pi_0 D \Phi \bar{\pi}_0) \wedge (\bar{\pi}_0 \omega) = \Omega_0 + \bar{\Omega}_0; \quad (8)$$

где  $\Omega_0$  — тензориальная 2-форма на  $\mathfrak{G}$ , соответствующая тензору  $T_0(X, Y) = -j^3 \pi \nabla_X (\Phi) (\pi Y)$ . Очевидно,  $\Omega_0 = \Omega_{01} + \Omega_{02} + \Omega_{03}$ , где  $\Omega_{0i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — тензориальные 2-формы, отвечающие тензорам  $T_{01}(X, Y) = -\frac{1}{2} \pi \{ \nabla_{(0)} \Phi(\Phi^3 Y; X) - \nabla_{(0)} \Phi(\Phi^3 X; Y) \}$ ;  $T_{02}(X, Y) = -\pi \nabla_{(1)} \Phi(\Phi^3 Y; X)$ ;  $T_{03}(X, Y) = -\pi \nabla_{(2)} \Phi(\Phi^3 Y; X)$ , причем ввиду параллельности тензора  $g$  в римановой связности уравнение (7) можно переписать в виде [5]:

$$d(\bar{\pi}_0 \omega) = -\psi^* \wedge (\bar{\pi}_0 \omega) + \bar{\Omega}, \quad (9)$$

где  $(\psi_\rho^*)^a = \|e_a\|^2 \|e_b\|^2 (\psi_\rho)_a^b$ . Таким образом, первая группа структурных уравнений Картана в римановой связности на пространстве  $\mathfrak{G}$  определяется соотношениями (6), (8) и (9).

В случае частных видов почти контактных метрических структур эти уравнения, вообще говоря, упрощаются. Например, с учетом (1) доказывается

Предложение 1 ([5]). Для нормальной почти контактной метрической структуры  $T_3 = T_4 = 0$ , т. е.  $\Omega_3 = \Omega_4 = 0$ .

Теорема 1 ([5]). Первая группа структурных уравнений Картана почти сасакиевой структуры имеет вид: 1.  $d(\pi_0\omega) = \psi \wedge (\pi_0\omega) + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4$ ; 2.  $d(\bar{\pi}_0\omega) = -\psi^* \wedge (\bar{\pi}_0\omega) + \bar{\Omega}_2 + \bar{\Omega}_3 + \bar{\Omega}_4$ ; 3.  $d(\pi_0\omega) = 2\Omega_{02}$ ; где  $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_{02}$  — тензориальные 2-формы на  $\mathfrak{G}$ , соответствующие тензорам  $T_2, T_3, T_4, T_{02}$  соответственно, причем  $T_2 = -\Phi^3 \otimes \eta$ ;  $\langle T_3(X, Y), Z \rangle = \frac{1}{2} \langle T(Z, Y), X \rangle$ , где  $T$  — композиционный тензор присоединенной  $Q$ -алгебры, которая оказывается  $A$ -алгеброй,  $T_4 = \theta \otimes \eta$ , где  $\theta(X) = \Phi^3 \nabla_{(7)} \Phi(\xi; X)$  ( $X \in \mathfrak{X}(M)$ ), причем  $\theta\Phi + \Phi\theta = 0$ ;  $\Theta(X, Y) = \Theta(Y, X)$ , где  $\Theta(X, Y) = \langle \theta(X), Y \rangle$ ;  $T_{02}(X, Y) = \frac{1}{2} \langle\langle Y, \Phi^3 X \rangle\rangle \xi$ ;  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . При этом структура является сасакиевой тогда и только тогда, когда  $T = \theta = 0$ .

Теорема 2. Спектр ковариантного дифференциала структурного оператора почти сасакиевой структуры имеет вид:

1.  $\nabla_{(0)} \Phi(X; Y) = \frac{1}{2} \langle\langle \Phi X, \theta Y \rangle\rangle$ ; 2.  $\nabla_{(1)} \Phi(X; Y) = \frac{1}{2} \langle\langle IX, IY \rangle\rangle \xi$ ; 3.  $\nabla_{(3)} \Phi(X; Y) = \frac{1}{2} \langle\langle IY, IX \rangle\rangle \xi$ ;
4.  $\nabla_{(4)} \Phi(X; Y) = 2\Phi T(Y; X) + \frac{1}{2} \langle\langle \theta Y, \Phi X \rangle\rangle \xi$ ;
5.  $\nabla_{(6)} \Phi(X; Y) = -\eta(X) I(Y)$ ; 6.  $\nabla_{(7)} \Phi(X; Y) = \eta(X) \Phi\theta(Y)$ ;
7.  $\nabla_{(i)} \Phi(X; Y) = 0$  ( $i = 2, 5, 8$ ).

◀ Заметим, что  $\nabla_{(0)} \Phi(X; Y) = I \nabla_{(0)} \Phi(X; Y) + \pi \nabla_{(0)} \Phi(X; Y)$ . Согласно (5),  $\pi \nabla_{\pi X} (\Phi)(\pi Y) = 0$ , значит,  $I \nabla_{(0)} \Phi(X; Y) = 0$ . С другой стороны,  $\langle \pi \nabla_{\pi X} (\Phi)(\pi Y), Z \rangle = -\langle Y, \pi \nabla_{\pi X} (\Phi) \times \times (\pi Z) \rangle = -\frac{1}{2} \langle\langle I \nabla_{(7)} \Phi(Z; X), Y \rangle\rangle = -\frac{1}{2} \langle\langle \Phi\theta(X), Y \rangle\rangle \eta(Z) = -\frac{1}{2} \langle\langle \Phi\theta(X), Y \rangle\rangle \langle \xi, Z \rangle$ , откуда  $\pi \nabla_{\pi X} (\Phi)(\pi Y) = -\frac{1}{2} \langle\langle \Phi\theta(X), Y \rangle\rangle \xi = \frac{1}{2} \langle\langle \theta(X), \Phi(Y) \rangle\rangle \xi$ . Следовательно,  $\pi \nabla_{(0)} \Phi(Y; X) = \pi \nabla_{\pi X} (\Phi)(\pi Y) = \frac{1}{2} \langle\langle \Phi Y, \theta X \rangle\rangle \xi$ . Аналогично доказываются остальные тождества. ▶

Следствие.  $\nabla_X (\Phi) Y = 2\Phi T(X, Y) + \eta(Y) \Phi\theta(X) - \eta(Y) \times \times I(X) + \langle \Phi Y, \theta X \rangle \xi + \langle IX, IY \rangle \xi$ ;  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . ▶

Введем в рассмотрение тензор  $\Pi = T + (\theta - \Phi^3) \otimes \eta + \xi \otimes (F - \Theta)$ .

Предложение 2 ([5]). Связность  $\tilde{\nabla} = \nabla + \Pi$  обладает следующими свойствами: 1.  $\tilde{\nabla} \Phi = 0$ . 2.  $\tilde{\nabla} g = 0$ ; 3.  $\frac{1}{2} S = \text{Alt } \Pi = \text{Alt}(T_2 + T_3 + T_4 + 2T_{02})$ ; где  $\text{Alt}$  — оператор альтернирования по ковариантным аргументам,  $S$  — тензор кручения связности  $\tilde{\nabla}$ .

◀ Доказательство состоит в непосредственной проверке этих соотношений с учетом тождеств  $\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \nabla_X(\Phi)Y + \Pi(X, \Phi Y) - \Phi\Pi(X, Y) = 0$ ;  $\tilde{\nabla}_X(g)(Y, Z) = \langle \Pi(X, Y), Z \rangle + \langle Y, \Pi(X, Z) \rangle$  и свойств симметрии тензоров  $T, F, \Theta$ . ▶

Аналогично доказываются следующие результаты:

Теорема 3. Первая группа структурных уравнений Картана слабо косимплектической структуры имеет вид: 1.  $d(\pi_0\omega) = \psi \wedge (\pi_0\omega) + \Omega_3 + \Omega_4$ ; 2.  $d(\bar{\pi}_0\omega) = -\psi^* \wedge (\bar{\pi}_0\omega) + \bar{\Omega}_3 + \bar{\Omega}_4$ ; 3.  $d(\pi_0\omega) = \Omega_{01} + \bar{\Omega}_{01}$ , где  $\Omega_3, \Omega_4, \Omega_{01}$  — тензориальные 2-формы на  $\mathfrak{G}$ , соответствующие тензорам  $T_3, T_4, T_{01}$  соответственно, причем  $T_3 = T$ , где  $T$  — композиционный тензор присоединенной  $Q$ -алгебры, которая оказывается  $K$ -алгеброй;  $T_4 = -\frac{3}{2}\theta \otimes \eta$ , где  $\theta(X) = -\Phi^3 \nabla_{(7)}\Phi(\xi; X)$ , причем  $\theta\Phi + \Phi\theta = 0$ ,  $\Theta(X, Y) = -\Theta(Y, X)$ , где  $\Theta(X, Y) = \langle \theta(X), Y \rangle$ ;  $T_{01}(X, Y) = \frac{1}{2} \ll Y, \theta X \gg \xi$ ;  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . При этом структура является точнее косимплектической тогда и только тогда, когда  $\theta = 0$ , и является косимплектической тогда и только тогда, когда  $T = \theta = 0$ . ▶

Теорема 4. Спектр ковариантного дифференциала структурного оператора слабо косимплектической структуры имеет следующий вид:

1.  $\nabla_{(0)}\Phi(X; Y) = -\frac{1}{2} \ll \Phi X, \theta Y \gg \xi$ ;
2.  $\nabla_{(4)}\Phi(X; Y) = 2\Phi\Gamma(Y, X) - \frac{1}{2} \ll \theta Y, \Phi X \gg \xi$ ;
3.  $\nabla_{(5)}\Phi(X; Y) = \eta(Y)\Phi\theta(X)$ ; 4.  $\nabla_{(7)}\Phi(X; Y) = -\eta(X)\Phi\theta(Y)$ ;
5.  $\nabla_{(i)}\Phi(X; Y) = 0$  ( $i = 1, 2, 3, 6, 8$ ).

Следствие.  $\nabla_X(\Phi)Y = 2\Phi\Gamma(X, Y) - \langle \theta X, \Phi Y \rangle \xi - \eta(Y)\Phi\theta(X) + \eta(X)\Phi\theta(Y)$ . ▶

Введем в рассмотрение тензор  $\Pi = T + \frac{1}{2}\eta \otimes \theta - \theta \otimes \eta + \xi \otimes \Theta$ .

Предложение 3. Связность  $\tilde{\nabla} = \nabla + \Pi$  обладает следующими свойствами: 1.  $\tilde{\nabla}\Phi = 0$ ; 2.  $\tilde{\nabla}g = 0$ ; 3.  $\frac{1}{2}S = \text{Alt } \Pi = \text{Alt}(T_3 + T_4 + T_{01} + \bar{T}_{01})$ . ▶

Теорема 5. Первая группа структурных уравнений Картана приближенно сасакиевой структуры имеет вид: 1.  $d(\pi_0\omega) = \psi \wedge (\pi_0\omega) + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4$ ; 2.  $d(\bar{\pi}_0\omega) = -\psi^* \wedge (\bar{\pi}_0\omega) + \bar{\Omega}_2 + \bar{\Omega}_3 + \bar{\Omega}_4$ ; 3.  $d(\pi_0\omega) = \Omega_{01} + \bar{\Omega}_{01} + 2\Omega_{02}$ ; где  $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_{01}, \Omega_{02}$  — тензориальные 2-формы на  $\mathfrak{G}$ , соответствующие тензорам  $T_2, T_3, T_4, T_{01}, T_{02}$  соответственно, причем  $T_2 = -\Phi^3 \otimes \eta$ ;  $T_3 = T$ , где  $T$  — композиционный тензор присоединенной  $Q$ -алгебры, которая оказывает-

ся  $K$ -алгеброй;  $T_4 = -\frac{3}{2}\theta \otimes \eta$ , где  $\theta(X) = -\Phi^3 \nabla_{(7)} \Phi(\xi, X)$ , причем  $\theta\Phi + \Phi\theta = 0$ ;  $\Theta(X, Y) = -\Theta(Y, X)$ , где  $\Theta(X, Y) = \langle \theta(X), Y \rangle$ ,  $T_{01}(X, Y) = \frac{1}{2} \ll Y, \theta X \gg \xi$ ;  $T_{02}(X, Y) = \frac{1}{2} \ll Y, \Phi^3 X \gg \xi$ ;  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . При этом структура является сасакиевой тогда и только тогда, когда  $T = \theta = 0$ . ►

Теорема 6. Спектр ковариантного дифференциала структурного оператора приближенно сасакиевой структуры имеет следующий вид:

$$1. \nabla_{(0)} \Phi(X; Y) = -\frac{1}{2} \ll \Phi X, \theta Y \gg \xi;$$

$$2. \nabla_{(1)} \Phi(X; Y) = \frac{1}{2} \ll IX, IY \gg \xi;$$

$$3. \nabla_{(3)} \Phi(X; Y) = \frac{1}{2} \ll IY, IX \gg \xi;$$

$$4. \nabla_{(4)} \Phi(X, Y) = 2\Phi T(Y, X) - \frac{1}{2} \ll \Phi Y, \theta X \gg \xi;$$

$$5. \nabla_{(5)} \Phi(X; Y) = \eta(Y) \Phi \theta(X); \quad 6. \nabla_{(6)} \Phi(X; Y) = -\eta(X) I(Y);$$

$$7. \nabla_{(7)} \Phi(X; Y) = -\eta(X) \Phi \theta(Y). \quad 8. \nabla_{(2)} \Phi = \nabla_{(8)} \Phi = 0. \quad \blacktriangleright$$

Следствие.  $\nabla_X(\Phi)Y = 2\Phi T(X, Y) - \langle \theta X, \Phi Y \rangle \xi + \langle IX, IY \rangle \xi - \eta(Y) \Phi \theta(X) + \eta(X) \Phi \theta(Y) - \eta(Y) I(X)$ . ►

Рассмотрим тензор  $\Pi = T - \Phi^3 \otimes \eta - \theta \otimes \eta + \frac{1}{2} \eta \otimes \theta + \xi \otimes (F + \Theta)$ .

Предложение 4. Связность  $\tilde{\nabla} = \nabla + \Pi$  обладает следующими свойствами: 1.  $\tilde{\nabla} \Phi = 0$ ; 2.  $\tilde{\nabla} g = 0$ ; 3.  $\frac{1}{2} S = \text{Alt } \Pi = \text{Alt}(T_2 + T_3 + T_4 + T_{01} + \bar{T}_{01} + 2T_{02})$ . ►

Теорема 7. Первая группа структурных уравнений Картана почти косимплектической структуры имеет вид: 1.  $d(\pi_0 \omega) = \psi \wedge (\pi_0 \omega) + \Omega_3 + \Omega_4$ ; 2.  $d(\bar{\pi}_0 \omega) = -\psi^* \wedge (\bar{\pi}_0 \omega) + \bar{\Omega}_3 + \bar{\Omega}_4$ ; 3.  $d(m_0 \omega) = 0$ ; где  $\Omega_3$  и  $\Omega_4$  — тензоральные 2-формы на  $\mathfrak{G}$ , соответствующие тензорам  $T_3$  и  $T_4 = \theta \otimes \eta$  соответственно, где  $\theta(X) = \Phi^3 \nabla_{(7)} \Phi(\xi, X)$ ,  $\langle T_3(X, Y), Z \rangle = \frac{1}{2} \langle T(Z, Y), X \rangle$ , где  $T$  — композиционный тензор присоединенной  $Q$ -алгебры, которая оказывается  $A$ -алгеброй,  $\theta\Phi + \Phi\theta = 0$ ,  $\Theta(X, Y) = \Theta(Y, X)$ , где  $\Theta(X, Y) = \langle \theta(X), Y \rangle$ ;  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . При этом структура является косимплектической тогда и только тогда, когда  $T = \theta = 0$ . ►

Теорема 8. Спектр ковариантного дифференциала структурного оператора почти косимплектической структуры имеет следующий вид:

$$1. \nabla_{(0)} \Phi(X, Y) = \frac{1}{2} \ll \Phi X, \theta Y \gg \xi;$$

$$2. \nabla_{(4)} \Phi(X; Y) = 2\Phi T(Y, X) + \frac{1}{2} \langle \theta Y, \Phi X \rangle \xi;$$

$$3. \nabla_{(7)} \Phi(X; Y) = \eta(X) \Phi \theta(Y); \quad 4. \nabla_{(i)} \Phi = 0 \quad (i=1, 2, 3, 5, 6, 8).$$

Следствие.  $\nabla_X(\Phi)Y = 2\Phi T(X, Y) + \langle \theta X, \Phi Y \rangle \xi + \eta(Y) \Phi \theta(X)$ . ►

Введем в рассмотрение тензор  $\Pi = T + \theta \otimes \eta - \xi \otimes \theta$ .

Предложение 5. Связность  $\tilde{\nabla} = \nabla + \Pi$  обладает следующими свойствами: 1.  $\tilde{\nabla} \Phi = 0$ ; 2.  $\tilde{\nabla} g = 0$ ; 3.  $\frac{1}{2} S = \text{Alt } \Pi = \text{Alt}(T_3 + T_4)$ . ►

Таким образом, для перечисленных четырех видов почти контактных метрических структур существуют внутренним образом определенные связности  $\tilde{\nabla}$ , в которых тензоры  $\Phi$  и  $g$ , а значит, и метрика  $\langle\langle X, Y \rangle\rangle = \langle X, Y \rangle + \langle \Phi^3 X, Y \rangle \Phi$  ковариантно постоянны. Назовем эти связности каноническими. Их наличие сближает рассмотренные виды почти контактных метрических структур с обобщенными квазикеллеровыми структурами. Поэтому назовем эти структуры структурами квазикеллера типа.

### § 3. Обобщенные почти контактные структуры

Определение 1 ([5]). Обобщенной почти контактной, короче,  $GA\mathcal{E}$ -структурой ранга  $r$  на гладком многообразии  $M$  называется  $GA\mathcal{H}$ -структура  $\mathcal{P} = \{g = \langle \cdot, \cdot \rangle, J_1, \dots, J_r, T\}$  ранга  $r$ , для которой  $\mathfrak{M} = \bigcap_{i=1}^r \ker J_i$  — одномерное распределение,

неизотропное в каждой точке многообразия. В частности, ее дефект  $\delta = 1$ . Заменяя в случае необходимости  $g$  на  $(-g)$ , можно считать, что сужение метрики на  $\mathfrak{M}$  положительно определено. Пусть  $\xi \in \mathfrak{M}$ ,  $\|\xi\| = 1$ . Тогда определена 1-форма  $\eta$  соотношением  $\eta(X) = \langle \xi, X \rangle$  ( $X \in \mathfrak{X}(M)$ ), которая называется структурной формой, и два взаимно дополнительных проектора  $\mathfrak{h} = \xi \otimes \eta$  и  $\mathfrak{l} = \text{id} - \xi \otimes \eta$  на распределение  $\mathfrak{M}$  и его ортогональное дополнение  $\mathfrak{L}$  соответственно. Напомним, что 2-форма  $\Theta$  на  $M$  называется чистой, если  $\Theta(J_i X, Y) = \Theta(X, J_i Y)$ ;  $i=1, \dots, r$ ;  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

Определение 2.  $\Phi$ -голоморфной секционной кривизной  $GA\mathcal{E}$ -многообразия  $M$  называется голоморфная секционная ( $HS$ -) кривизна в направлениях  $X \in \mathfrak{X}_T(M) \cap \mathfrak{L}$ , что согласуется с классической терминологией [39]. Стандартным образом определяется точечное и глобальное постоянства  $\Phi$ -голоморфной секционной кривизны (см. § 1, гл. 2).

Определение 3.  $GA\mathcal{E}$ -многообразие, удовлетворяющее аксиоме голоморфных  $m+1$ -плоскостей (см. определение 2.1.5), следуя традиции, называется многообразием, удовлетворяющим аксиоме  $\Phi$ -голоморфных  $m$ -плоскостей, что также согласуется с классической терминологией [27].

Определение 4 ([5]).  $GA\mathcal{F}$ -структура  $\mathcal{F}$  называется обобщенной почти сасакиевой ( $GA\mathcal{F}$ -) структурой, если она является  $GG_2$ -структурой, причем: 1. Оператор  $\Phi$ , определенный тождеством  $\langle X, \Phi Y \rangle = d\eta(X, Y)$ , есть элемент кольца  $\mathfrak{K}$ , такой, что  $\ker \Phi \subset \mathfrak{M}$ ; 2. На  $M$  фиксирована чистая симметричная 2-форма  $\Theta$ , ядро которой неизотропно в каждой точке многообразия; 3. Структурные операторы  $J_1, \dots, J_r$  ковариантно постоянны в связности  $\tilde{\nabla} = \nabla + T + (\Phi + \theta) \otimes \eta + \xi \otimes (d\eta - \Theta)$ , которую мы назовем канонической, где  $\langle \theta(X), Y \rangle = \Theta(X, Y)$ ;  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . В случае  $T = 0$   $GA\mathcal{F}$ -структура называется структурой келлера типа, а в случае  $T = \theta = 0$  — обобщенной сасакиевой ( $G\mathcal{F}$ -) структурой.

Предложение 1. Пусть  $M$  —  $GA\mathcal{F}$ -многообразие. Тогда: 1.  $\nabla_X(\eta)Y = d\eta(X, Y) - \Theta(X, Y)$ ; в частности,  $\eta$  — форма Киллинга тогда и только тогда, когда  $\theta = 0$ . 2.  $\nabla_X \xi = -(\Phi + \theta)X$ ; 3.  $\xi \in \ker \Phi \cap \ker \theta$ .

◀ Из определения  $GA\mathcal{F}$ -структуры следует, что тензоры  $g, J_1, \dots, J_r$ , а значит, и  $\eta$  ковариантно постоянны в канонической связности. Следовательно,  $\nabla_X(\eta)Y = -\{T + (\Phi + \theta) \otimes \eta + \xi \otimes (d\eta - \Theta)\}_X(\eta)Y = d\eta(X, Y) - \Theta(X, Y)$ . Далее, ковариантное дифференцирование тождества  $\eta(Y) = \langle \xi, Y \rangle$  дает:  $\nabla_X(\eta)Y = \langle \nabla_X \xi, Y \rangle$ . Следовательно,  $-\langle (\Phi + \theta)X, Y \rangle = \langle X, \Phi Y \rangle - \langle \theta X, Y \rangle = d\eta(X, Y) - \Theta(X, Y) = \nabla_X(\eta)Y = \langle \nabla_X \xi, Y \rangle$ ;  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Ввиду невырожденности метрики, получаем второе утверждение. Далее, пусть  $\Phi = \lambda \text{id} + \sum_{i=1}^r \lambda_i J_i$ . Тогда  $d\eta(X, Y) =$

$$= \lambda \langle X, Y \rangle + \sum_{i=1}^r \lambda_i \langle J_i X, Y \rangle, \text{ откуда } \lambda = 0 \text{ и, значит, } \xi \in \ker \Phi.$$

Наконец, ковариантно дифференцируя тождество  $\langle \xi, \xi \rangle = 1$ , получим, что  $\langle \nabla_X \xi, \xi \rangle = 0$ , т. е.  $\langle \Phi X, \xi \rangle + \langle \theta X, \xi \rangle = 0$ , и ввиду того, что  $\xi \in \ker \Phi$ ,  $\langle X, \theta \xi \rangle = 0$ , и в силу произвола  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\theta \xi = 0$ . ▶

Из результатов предыдущего параграфа следует, что если метрика многообразия знакоопределена,  $r = 1$ ,  $J^3 + J = 0$ ,  $\Phi = -J^3$ ,  $\theta(X) = 2J^2 N(\xi, X)$ ,  $T(X, Y) = \frac{1}{4} \{J \nabla_{JX}(J)(JY) + J^3 \nabla_{JX}(J)(J^2 Y)\}$ , понятие  $GA\mathcal{F}$ -структуры (соответственно,  $GA\mathcal{F}$ -структуры,  $G\mathcal{F}$ -структуры) тождественно понятию почти контактной метрической (соответственно, почти сасакиевой, сасакиевой) структуры.

Наличие на  $GA\mathcal{F}$ -многообразии канонической связности, в которой метрика  $g$  и структурные операторы, а значит, и метрика  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ковариантно постоянны, влечет справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. Псевдорасщепляемое  $\omega$ -редуктивное  $GA\mathcal{F}$ -многообразие регулярно.

◀ Доказательство аналогично доказательству теоремы (2.2.2). ▶

В частности, к такому многообразию присоединено главное расслоение  $\mathfrak{X} = \{P, M, \pi, G\}$  псевдоунитарных реперов  $(p, e_0, e_1, \dots, e_n)$ ,  $p \in M$ ,  $e_0 = \xi_p$ ,  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — унитарный базис расщепляемого  $\omega$ -редуктивного идеала  $\mathfrak{L}_p \subset \mathfrak{W}_p$ . Это расслоение можно как и в § 2, гл. 2, отождествить с  $G$ -структурой  $\mathfrak{G}$ , т. е. под-расслоением главного расслоения всех псевдоунитарных реперов модулей  $\mathfrak{W}_p^{\mathfrak{L}_p}$  ( $p \in M$ ) относительно вложения, индуцированного отображением  $\sigma \text{Id}_{\mathfrak{M}}: \mathfrak{W} = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{L}^{\mathfrak{L}} \oplus \mathfrak{M} \subset \mathfrak{W}^{\mathfrak{L}}$  в каждой точке многообразия. Повторяя рассуждение § 2, гл. 2, мы получим первую группу структурных уравнений Картана канонической связности псевдорасщепляемых  $\omega$ -редуктивных  $GA\mathcal{F}$ -многообразий, которые в силу определения таких многообразий по форме совпадают с соответствующими структурными уравнениями, описанными в теореме 1 предыдущего параграфа. Их дифференциальное продолжение приводит ко второй группе структурных уравнений Картана [5].

**Теорема 2** ([5], [29]). Псевдорасщепляемое редуктивное  $GA\mathcal{F}$ -многообразие удовлетворяет аксиоме  $\Phi$ -голоморфных  $m$ -плоскостей тогда и только тогда, когда оно является многообразием Сасаки классического либо гиперболического типа точно постоянной  $\Phi$ -голоморфной секционной кривизны  $\mathcal{H}$  размерности выше трех. Всякое такое многообразие при  $\mathcal{H} > -3\epsilon$  локально эквивалентно нечетномерной сфере, снабженной канонической сасакиевой структурой классического либо гиперболического типа или структурой, полученной из канонической преобразованием  $D$ -гомотетии [39], [5]; при  $\mathcal{H} = -3\epsilon$  оно локально эквивалентно нечетномерному аффинному пространству, снабженному канонической сасакиевой структурой классического либо гиперболического типа постоянной  $\Phi$ -голоморфной секционной кривизны  $-3\epsilon$ ; при  $\mathcal{H} < -3\epsilon$  оно локально эквивалентно нечетномерной сфере, снабженной сасакиевой структурой классического либо гиперболического типа, полученной из канонической преобразованием  $D$ -инверсии [5]. В случае полноты, односвязности и знакоопределенности метрики многообразия эти локальные эквивалентности определены глобально.

Этот результат широко обобщает и уточняет известную классификацию Танно [39] полных односвязных многообразий Сасаки с положительно определенной определенной метрикой постоянной  $\Phi$ -голоморфной секционной кривизны.

**Определение 5** ([28]).  $GA\mathcal{Z}$ -структура  $\mathcal{F}$  называется обобщенной слабо косимплектической ( $GN\mathcal{Z}s$ -) структурой, если она является  $GG_1$ -структурой, причем: 1.  $d\eta$  — чистая 2-форма, ядро которой неизотропно в каждой точке многообразия; 2. Структурные операторы  $J_1, \dots, J_r$  ковариантно постоянны

в связности  $\tilde{\nabla} = \nabla + T + \frac{1}{2} \eta \otimes \theta - \theta \otimes \eta + \xi \otimes d\eta$ , которая называется канонической, где  $\langle \theta(X), Y \rangle = d\eta(X, Y)$ ;  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . В случае  $T=0$   $GN\mathcal{E}s$ -структура называется структурой келерова типа, в случае  $\theta=0$  — обобщенной точнее косимплектической ( $GC\mathcal{E}s$ -) и, наконец, в случае  $T=\theta=0$  — обобщенной косимплектической ( $G\mathcal{E}s$ -) структурой.

Предложение 2. Пусть  $M$  —  $GN\mathcal{E}s$ -многообразие. Тогда: 1. Фундаментальные и структурная формы многообразия являются формами Киллинга; 2.  $\nabla_X \xi = \theta(X)$ ; 3.  $\xi \in \ker \theta$ .

◀ Киллинговость фундаментальных форм следует из очевидного тождества  $\nabla_X (J_i) X = 0$  ( $i=1, \dots, r$ ). Остальные утверждения доказываются так же, как и в предложении 1. ▶

Из результатов предыдущего параграфа следует, что если метрика многообразия знакоопределена,  $r=1$ ,  $J^2 + I = 0$ , а композиционный тензор задается тождеством (2.1.9), понятие  $GN\mathcal{E}s$ -структуры (соответственно,  $GC\mathcal{E}s$ -структуры,  $G\mathcal{E}s$ -структуры) тождественно понятию слабо косимплектической (соответственно, точнее косимплектической, косимплектической) структуры. Так же, как и в случае  $GA\mathcal{P}$ -структур, справедлива

Теорема 3. Псевдорасщепляемое  $\omega$ -редуктивное  $GN\mathcal{E}s$ -многообразие регулярно. ▶

Теорема 4 ([28]). Псевдорасщепляемое редуктивное  $GN\mathcal{E}s$ -многообразие локально эквивалентно одному из следующих многообразий: 1.  $M \times N \times \mathbb{R}^1$ ; 2.  $M \times N \times S_h^5$ , где  $M$  — приближенно келерово многообразие классического типа,  $N$  — приближенно келерово многообразие гиперболического типа,  $S_h^5$  — пятимерная сфера, снабженная канонической слабо косимплектической структурой классического либо гиперболического типа [15]. При этом случай 1 соответствует  $GC\mathcal{E}s$ -структуре, случай 1 при  $M$ -келеровом и  $N$ -паракелеровом многообразии —  $G\mathcal{E}s$ -структуре и случаи 1 и 2 при  $M$ -келеровом и  $N$ -паракелеровом многообразии —  $GN\mathcal{E}s$ -многообразию келерова типа. В случае полноты, односвязности и знакоопределенности метрики многообразия эти эквивалентности определены глобально.

З а м е ч а н и е. Эта теорема, очевидно, включает классический случай слабо косимплектического многообразия (с римановой метрикой).

С учетом этой теоремы и теоремы 7 в [5] получаем:

Теорема 5. Псевдорасщепляемое редуктивное  $GN\mathcal{E}s$ -многообразие удовлетворяет аксиоме  $\Phi$ -голоморфных  $m$ -плоскостей тогда и только тогда, когда оно является  $GN\mathcal{E}s$ -многообразием ( $G\mathcal{E}s$  = многообразием в случае  $m > 1$ ) точно постоянной  $\Phi$ -голоморфной секционной кривизны размерности выше трех. Всякое такое многообразие локально эквивалентно одному из следующих многообразий, снабженных канонической слабо косимплектической

структурой классического либо гиперболического типа: 1.  $C_k^n \times \mathbb{R}^1$ ; 2.  $CP_k^n \times \mathbb{R}^1$ ; 3.  $CD_k^n \times \mathbb{R}^1$ ; 4.  $(\mathbb{R}^n \boxtimes \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^1$ ; 5.  $(\mathbb{R}P^n \cdot \mathbb{R}P^n) \times \mathbb{R}^1$ ; 6.  $\{C_k^n \times (\mathbb{R}^m \boxtimes \mathbb{R}^m)\} \times \mathbb{R}^1$ ; 7.  $S_k^6 \times \mathbb{R}^1$ ; 8.  $S_k^5$ . Если  $m > 1$ , случаи 7 и 8 исключаются. В случае полноты, односвязности и знакоопределенности метрики многообразия эти эквивалентности определены глобально. Здесь символом  $\mathbb{R}P^n \cdot \mathbb{R}P^n$  обозначено многообразие нуль-пар вещественного проективного пространства  $\mathbb{R}P^n$ , а символом  $\mathbb{R}^m \boxtimes \mathbb{R}^m$  — двойное евклидово пространство, снабженное канонической паракелеровой структурой.

Определение 6 ([8]).  $GN\mathcal{P}$ -структура называется обобщенной приближенно сасакиевой ( $GN\mathcal{P}$ )-структурой, если она является  $GG_1$ -структурой, причем: 1.  $d\eta = \Theta^* + \Theta^{**}$ , где  $\Theta^*$  — чистая 2-форма, ядро которой неизотропно в каждой точке многообразия;  $\Theta^{**}(X, Y) = \langle X, \Phi Y \rangle = -\langle \Phi X, Y \rangle$ , где  $\Phi$  — фиксированный элемент кольца  $\mathbb{K}$ , такой, что  $\ker \Phi \subset \mathfrak{M}$ ; 2. Структурные операторы  $J_1, \dots, J_r$  ковариантно постоянны в связности  $\tilde{\nabla} = \nabla + T + (\Phi - \theta) \otimes \eta + \frac{1}{2} \eta \otimes \theta + \xi \otimes d\eta$ , которую мы назовем канонической, где  $\langle \theta X, Y \rangle = \Theta^*(X, Y)$ ;  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

Очевидно,  $GN\mathcal{P}$ -структура является  $G\mathcal{P}$ -структурой тогда и только тогда, когда  $T = \theta = 0$ . В случае  $T = 0$   $GN\mathcal{P}$ -структура называется структурой келерова типа.

Предложение 3. Пусть  $M$  —  $GN\mathcal{P}$ -многообразие. Тогда: 1. Структурная форма многообразия является формой Киллинга; 2.  $\nabla_X \xi = (\theta - \Phi)X$ ; 3.  $\xi \in \ker \Phi \cap \ker \theta$ .

◀ Доказательство аналогично доказательству предложения 1. ▶

Из результатов предыдущего параграфа следует, что если метрика многообразия знакоопределена,  $r = 1$ ,  $J^3 + J = 0$ ,  $\Phi = -J^3$ ,  $\theta(X) = -\frac{4}{3} J^2 N(\xi, X)$ , а композиционный тензор задается тождеством (2.1.9), понятие  $GN\mathcal{P}$ -структуры тождественно понятию приближенно сасакиевой структуры. Как и выше, справедлива

Теорема 6. Псевдорасщепляемое  $\omega$ -редуктивное  $GN\mathcal{P}$ -многообразие регулярно. ▶

Теорема 7 ([8]). Псевдорасщепляемое редуктивное  $GN\mathcal{P}$ -многообразие является либо обобщенным многообразием Сасаки, либо пятимерным многообразием постоянной кривизны, положительной в случае положительно определенной метрики, и снабженным приближенно сасакиевой структурой классического либо гиперболического типа, определенной однозначно с точностью до локальной эквивалентности.

Теорема 8 ([8]). Псевдорасщепляемое редуктивное  $GN\mathcal{P}$ -многообразие удовлетворяет аксиоме  $\Phi$ -голоморфных  $m$ -плоскостей тогда и только тогда, когда оно является  $GN\mathcal{P}$ -многообразием ( $G\mathcal{P}$ -многообразием в случае  $m > 1$ ) точно постоянной  $\Phi$ -голоморфной секционной кривизны размерности выше трех. Всякое такое многообразие локально эквивалентно либо

пятимерной сфере, снабженной канонической приближенно сасакиевой структурой классического либо гиперболического типа, отличной от сасакиевой [16], либо одному из многообразий Сасаки классического либо гиперболического типа, перечисленных в теореме 2.

**Определение 7 ([9]).**  $GA\mathcal{E}$ -структура  $\mathcal{P}$  называется обобщенной почти косимплектической ( $GA\mathcal{E}s$ -) структурой, если: 1. На  $M$  фиксирована чистая симметричная 2-форма  $\Theta$ , ядро которой неизотропно в каждой точке многообразия; 2. Структурные операторы  $J_1, \dots, J_r$  ковариантно постоянны в связности  $\bar{\nabla} = \nabla + T + \theta \otimes \eta - \xi \otimes \Theta$ , называемой канонической, где  $\langle \theta X, Y \rangle = \Theta(X, Y)$ ;  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ; 3.  $\mathcal{P}$  является  $GG_2$ -структурой.

В случае  $T=0$   $GA\mathcal{E}s$ -структура называется структурой келерова типа. Очевидно,  $GA\mathcal{E}s$ -структура является  $\mathcal{E}s$ -структурой тогда и только тогда, когда  $T=\theta=0$ .

**Предложение 4.** Пусть  $M$  —  $GA\mathcal{E}s$ -многообразие. Тогда: 1.  $\nabla_X(\eta)Y = -\Theta(X, Y)$ ; 2.  $\nabla_X \xi = -\theta(X)$ ; 3.  $\xi \in \ker \theta$ .

◀ Доказательство аналогично доказательству предложения 1. ▶

Из результатов предыдущего параграфа следует, что если метрика многообразия знакоопределена,  $r=1$ ,  $J^3 + J = 0$ , композиционный тензор задается тождеством (2.1.9) и  $\theta(X) = 2J^2N(\xi, X)$ , понятие  $GA\mathcal{E}s$ -структуры тождественно понятию почти косимплектической структуры. Как и выше, справедлива

**Теорема 9.** Псевдорасщепляемое  $\omega$ -редуктивное  $GA\mathcal{E}s$ -многообразие регулярно. ▶

**Теорема 10 ([9]).** Структурная форма псевдорасщепляемого  $GA\mathcal{E}s$ -многообразия ранга  $r \geq 1$  со знакоопределенной метрикой определяет на этом многообразии слоение коразмерности 1, листы которого представляют собой минимальные гиперповерхности с естественно индуцированной на них расщепляемой обобщенной почти келеровой структурой, а их ортогональные траектории являются геодезическими. При этом  $GA\mathcal{E}s$ -структура является обобщенной косимплектической тогда и только тогда, когда эти поверхности вполне геодезические.

**Теорема 11 ([9]).** Класс почти косимплектических структур на трехмерном односвязном многообразии находится в естественном взаимно однозначном соответствии с классом функций на этом многообразии, поверхности уровня которых минимальны, а их ортогональными траекториями являются геодезические. При этом структура является косимплектической тогда и только тогда, когда эти поверхности уровня вполне геодезические.

**Теорема 12 ([9]).** Псевдорасщепляемое редуктивное  $GA\mathcal{E}s$ -многообразие удовлетворяет аксиоме Ф-голоморфных  $m$ -плоскостей тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно одному из следующих многообразий, снабженных канонической косимплекти-

ческой структурой классического либо гиперболического типа:  
 1.  $C_k^n \times \mathbb{R}^1$ ; 2.  $CP_k^n \times \mathbb{R}^1$ ; 3.  $CD_k^n \times \mathbb{R}^1$ ; 4.  $(\mathbb{R}^n \boxtimes \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^1$ ; 5.  $(\mathbb{R}P^n \boxtimes \mathbb{R}P^n) \times \mathbb{R}^1$ ; 6.  $\{C_k^n \times (\mathbb{R}^m \boxtimes \mathbb{R}^m)\} \times \mathbb{R}^1$ .

$GA\mathcal{E}$ -структуры рассмотренных четырех видов мы назовем для краткости структурами квазикелерова типа. На них определена каноническая связность  $\bar{\nabla}$ , в которой метрика  $g$  и структурные операторы, а значит, и метрика  $\ll \cdot, \cdot \gg$  ковариантно постоянны, откуда следует, что псевдорасщепляемые  $\omega$ -редуктивные  $GA\mathcal{E}$ -многообразия этого типа регулярны.

Теоремы 2, 5, 8, 12 дают полную классификацию псевдорасщепляемых редуктивных обобщенных почти контактных многообразий квазикелерова типа, удовлетворяющих аксиоме  $\Phi$ -голоморфных  $m$ -плоскостей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М. Физматгиз, 1962, 516 с. (РЖМат, 1964, 1A198K)
2. Гого М., Гроссханс Ф., Полупростые алгебры Лн. М.: Мир, 1981, 336 с. (РЖМат, 1982, 4A299K)
3. Каиш Ф. Модули и кольца. М.: Мир, 1981, 368 с. (РЖМат, 1982, 3A247K)
4. Киршченко В. Ф., Аксиома голоморфных плоскостей в обобщенной эрмитовой геометрии. Докл. АН СССР, 1981, 260, № 4, 795—799 (РЖМат, 1982, 2A776)
5. —, Аксиома  $\Phi$ -голоморфных плоскостей в контактной метрической геометрии. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1984, 48, № 4, 711—734 (РЖМат, 1984, 12A752)
6. —, Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1983, 47, № 6, 1208—1223 (РЖМат, 1984, 5A775)
7. —, Обобщенные приближенно келеровы многообразия постоянной голоморфной конформной кривизны. Докл. АН СССР, 1982, 265, № 2, 287—291 (РЖМат, 1982, 11A600)
8. —, О геометрии приближенно сасакневых многообразий. Докл. АН СССР, 1983, 269, № 1, 24—29 (РЖМат, 1983, 8A730)
9. —, Почти косимплектические многообразия, удовлетворяющие аксиоме  $\Phi$ -голоморфных плоскостей. Докл. АН СССР, 1983, 273, № 2, 280—284 (РЖМат, 1984, 3A809)
10. Кобялси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М.: Наука, 1981, 414 с. (РЖМат, 1982, 3A758K)
11. Широков А. П., Структуры на дифференцируемых многообразиях. Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР. Алгебра, Топология. Геометрия, М., 1974, № 11, 153—207 (РЖМат, 1974, 11A795)
12. Adati T., Miyazawa T., On paracontact Riemannian manifolds. TRU Math., 1977, 13, № 2, 27—39 (РЖМат, 1978, 11A740)
13. Blair D. E., Contact manifolds in Riemannian geometry. Lect. Notes Math., 1976, 509, 146 pp. (РЖМат, 1976, 9A640)
14. —, Geometry of manifolds with structural group  $U(n) \times O(S)$ . J. Different. Geom. 1970, 4, № 2, 155—167 (РЖМат, 1971, 4A707)
15. —, Showers D. K., Almost contact manifolds with killing structure tensors. II. J. Different. Geom., 1974, 9, № 4, 577—582 (РЖМат, 1975, 5A698)
16. —, —, Yano K., Nearly Sasakian structures. Kodai Math. Semin. Repts., 1976, 27, № 1-2, 175—180 (РЖМат, 1976, 11A792)
17. Bouzon J., Structures presque cocomplexes. Univ. et Politechn. Torino. Rend. Sem. Nat., 1964—65, 24, 53—123 (РЖМат, 1966, 11A296)

18. Chern S. S., Pseudo-groupes continus infinis. Colloq. Internat. Centre nat. rech. scient. 52, Strasbourg, 1953, Paris, 1953, 119—136 (PЖMar, 1957, 6649)
19. Diaz Miranda A., Reventos A., Homogeneous contact compact manifolds and homogeneous symplectic manifolds. Bull. sci. math., 1982, 106, № 4, 337—350 (PЖMar, 1983, 7A646)
20. Dube K. K., On almost hyperbolic Hermitian manifolds. An. Univ. Timișoara. Ser. ști Mat., 1973, 11, Fasc. 1, 47—54
21. Goldberg S., Yano K., Integrability of almost cosymplectic structures. Pacific J. Math., 1969, 31, № 2, 373—382 (PЖMar, 1971, 2A608)
22. Gray A., Nearly Kähler manifolds. J. Different. Geom., 1970, 4, № 3, 283—309 (PЖMar, 1971, 4A715)
23. —, The structure of nearly Kähler manifolds. Ann. Math., 1976, 223, № 3, 233—248 (PЖMar, 1977, 3A657)
24. —, Hervella L. M., The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. Ann. math. pure ed appl., 1980, 123, № 4, 35—58 (PЖMar, 1981, 2A696)
25. —, Vanhecke L., Almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curvature. Cas. pěstov. mat., 1979, 104, № 2, 170—179 (PЖMar, 1979, 10A501)
26. Gray J. W., Some global properties of contact structures. Ann. Math., 1959, 69, № 2, 421—450 (PЖMar, 1960, 5836)
27. Ishihara I., Anti-invariant submanifolds of a Sasakian space form. Kodai Math. J., 1979, 2, № 2, 171—186 (PЖMar, 1980, 1A816)
28. Kiritchenko V. F., Sur la géométrie des variétés approximativement cosymplectiques. C. r. Acad. sci., 1982, sér. 1, 295, № 12, 673—676 (PЖMar, 1983, 6A695)
29. —, Classification des variétés presque sasakiennes satisfaisant à l'axiome des plans  $\Phi$ -holomorphes. C. r. Acad. sci. 1982, sér. 1, 295, № 13, 739—742 (PЖMar, 1983, 7A645)
30. Kobayashi S., Principal fibre bundles with 1-dimensional toroidal group. Tôhoku Math. J., 1956, № 1, 29—45 (PЖMar, 1957, 8204)
31. Libermann P., Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales. Ann. Mat., 1951, 36, 247—261
32. Ogiue K., On fibering of almost contact manifolds. Kodai Math. Semin. Repts., 1965, 17, № 1, 53—62 (PЖMar, 1966, 3A435)
33. Prvanovic M., Homomorphically projective transformation in a locally product space. Math. Balcan., 1971, № 1, 195—213 (PЖMar, 1972, 3A660)
34. Rosca R., Para-Kählerian manifolds carrying a pair of concurrent self-orthogonal vector fields. Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 1976, 46, 205—215 (PЖMar, 1979, 8A689)
35. Sasaki S., On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structures. I. Tôhoku Math. J., 1960, 12, № 3, 459—476 (PЖMar, 1962, 12A305)
36. Satō I., On a structure similar to the almost contact structures. I. Tensor, 1976, 30, № 3, 219—224 (PЖMar, 1977, 9A803)
37. —, On a structure similar to the almost contact structures. II. Tensor, 1977, 31, № 2, 199—205 (PЖMar, 1978, 6A655)
38. Takamatsu K., Watanabe Y., Classification of a conformally flat  $K$ -space. Tôhoku Math. J., 1972, 24, № 3, 435—440 (PЖMar, 1973, 6A747)
39. Tanno S., Sasakian manifolds with constant  $\phi$ -holomorphic sectional curvature. Tôhoku Math. J., 1969, 21, № 3, 501—507 (PЖMar, 1970, 6A540)
40. Upadhyay M. D., Dube K. K., Almost contact hyperbolic- $(f, g, \eta, \xi)$  structure. Acta math. Acad. sci. hung., 1976, 28, № 1-2, 1—4 (PЖMar, 1977, 8A686)
41. Vaisman I., Connexions remarquables sur les variétés hor-ehresmanniennes. C. r. Acad. sci., 1971, 273, № 25, A1253—A1256 (PЖMar, 1972, 6A663)
42. Yano K., On a structure defined by a tensor field  $f$  of a type  $(1,1)$  satisfying  $f^2 + f = 0$ . Tensor, 1963, 14, 99—109 (PЖMar, 1965, 10A436)
43. —, Mogi I., On real representation of Kählerian manifolds. Ann. Math., 1955, 61, № 1, 170—189 (PЖMar, 1956, 3305)