M. V. Babich, Real finite-gap solutions of equations connected with the sine-Gordon equation,
Algebra i Analiz, 1990, Volume 2, Issue 3, 63–77

М.В.Бабич

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С УРАВНЕНИЕМ SINE-GORDON

Из множества общих (комплексных) конечнозонных решений уравнения $u_{xt}=-4\sin u$ (sine-Gordon) выделены вещественные решения следующих уравнений: $\Box u=\sin u$, $\Box u=\operatorname{sh} u$, $\Box u=\operatorname{ch} u$, $\Delta u=\sin u$, $\Delta u=\operatorname{sh} u$, $\Delta u=-\operatorname{sh} u$, $\Delta u=\operatorname{ch} u$. Для каждого из них получены явные условия на параметры общего решения (точки ветвления гиперэллиптической римановой поверхности и произвольный g-й комплексный вектор), приводящие к вещественности алгебро-геометрического решения данного уравнения.

В этой работе мы будем изучать вещественность конечнозонных решений уравнений

$$
\begin{array}{llr}
\text{а) } \Box u=\sin u, & \text{г) } \Delta u=\sin u, & \\
\text{б) } \Box u=\operatorname{sh} u, & \text{д) } \Delta u=\operatorname{sh} u, & \\
\text{в) } \Box u=\operatorname{ch} u, & \text{е) } \Delta u=-\operatorname{sh} u, & (1)\\
 & \text{ж) } \Delta u=\operatorname{ch} u, &
\end{array}
$$

связанных с комплексным уравнением sine-Gordon

$$\partial_\mu\partial_\nu u = -4\sin u. \tag{2}$$

Здесь $\mu,\nu\in\mathbb{C}$ – независимые комплексные переменные; $\Box,\Delta$ – двумерные операторы Даламбера; $\Box=\partial_t\partial_t-\partial_x\partial_x$ и Лапласа $\Delta=\partial_t\partial_t+\partial_x\partial_x$; $x,t\in\mathbb{R}$ – вещественные переменные. Символ $\partial_{\dots}$ означает частную производную: $\partial_\nu u=\partial u/\partial\nu$. Уравнения (1) имеют многочисленные приложения в математике и физике [1-4].

Конечнозонные решения (2) были впервые получены В.А.Козелом и В.П.Котляровым в работе [5]. Первые результаты по вещественности решений уравнения (1а) можно найти в той же работе [5], у А.Р.Итса [6] и у И.В.Чередника [7]. Эффективное описание всех вещественных решений (1а) было получено Б.А.Дубровиным и С.М.Натанзоном [8], сходные результаты были получены Е.Д.Белоколосом и В.З.Энольским [9].

Результатом данной работы являются условия на параметры конечнозонного решения уравнения (2) (см. ниже формулу (3)), приводящие к вещественным решениям уравнений (1а-1ж). Этими параметрами являются поверхность Г и два вещественных вектора α и β (см.(3)).

С помощью вещественных замен $v\longrightarrow\pm v+\mathrm{const}$; $(x;t)\longrightarrow(x\cdot\mathrm{const};t\cdot\mathrm{const})$; $(x;t)\longmapsto(t;x)$ любое из уравнений вида $(\partial_t^2\pm\partial_x^2)v=F(v)$, где $F(v)$ – вещественная

Ключевые слова: конечнозонное решение, риманова поверхность, абелев интеграл, Θ-функция, антиинволюция, sine-Gordon-уравнение.

линейная комбинация $\sin v$, $\cos v$ или $\operatorname{sh} v$, $\operatorname{ch} v$ (с различимыми по модулю коэффициентами при $\operatorname{sh} v$ и $\operatorname{ch} v$), можно привести к одному из уравнений (1).

Работа построена следующим образом: сначала описаны общие конечнозонные комплексные решения (2), разобраны способы введения x, t так, чтобы $\partial_\nu\partial_\mu=i^k(\partial_t^2\pm\partial_x^2)$.

Далее исследованы римановы поверхности, обладающие антиголоморфным автоморфизмом τ, оставляющим на месте точки P_0, P_∞, в которых Ψ-функция имеет существенные особенности. Для этих поверхностей получены законы сопряжения $\mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}_\infty$-векторов b-периодов дифференциалов $d\Omega_0$, $d\Omega_\infty$, имеющих полюса определенного вида в точках P_0, P_∞. Поскольку $\nu(x;t)$, $\mu(x,t)$ уже определены и известен закон их комплексного сопряжения, то ясно, как сопрягается вектор $\mathbf{z}(x;t)=i\mathbf{V}_0\nu+i\mathbf{V}_\infty\mu$, являющийся аргументом тэта-функции, входящей в решение.

Условие симметричности или антисимметричности $\mathbf{z}$ под действием сопряжения τ сужает множество допустимых поверхностей, а также окончательно определяет допустимые виды зависимости ν, μ от x, t; при этом $\tau^2=1$. С учетом возможности замены $(x;t)\longrightarrow(t;x)$ уже в окончательной формуле мы получим для каждого уравнения лишь два принципиально различных $\mathbf{z}$.

После того как найдены поверхности с нужными свойствами $\mathbf{z}(x;t)$, мы строим по ним решения (2). При комплексном сопряжении, тэта-функции, входящие в решение, приобретают независящие от x, t множители и меняют свои характеристики, являющиеся сободными параметрами комплексного решения (2). Сам аргумент тэта-функций - вектор $\mathbf{z}\ (x;t)$ - не меняется.

В зависимости от того, какие решения (2) - мнимые (для sh, ch) или вещественные (для sin) - мы хотим получить, выписываются разные условия на характеристики Θ-функций. Решая соответствующие уравнения, мы получим искомые ограничения на параметры α и β.

В конце работы приведена сводка результатов.

Комплексные конечнозонные решения уравнения SG

Напишем основную формулу - формулу для общих (комплексных) решений уравнения (2).

Пусть имеется гиперэллиптическая риманова поверхность Γ с точками ветвления $z=0$ и $z=\infty$

$$y^2 = z\prod_{i=1}^{2g}(z-a_i),\quad a_i\in\mathbb{C}.$$

Мы будем использовать следующие обозначения:

$P(y;z)$ или $(y;z)$ - точка поверхности Γ с координатами y,z; $P_0=P(0;0)$, $P_\infty=P(\infty,\infty)$;

σ - гиперэллиптическая инволюция:

$$(y;z)\xrightarrow{\sigma}(-y,z);$$

π - проекция Γ на плоскость $\overline{\mathbb{C}}_z$:

$$P(y;z) \longmapsto z, \quad P(y;z) \in \Gamma, \quad z \in \bar{\mathbb{C}}_z.$$

Пусть имеется путь $\mathcal{L}' \subset \Gamma$, идущий из точки P_0 в точку P_∞ и обладающий свойствами:

1. $\pi\mathcal{L}'$ не имеет самопересечений (следовательно, и $\mathcal{L}'$ тоже);
2. $\pi\mathcal{L}' \cap \{a_i, i=1,\dots,2g\} = \varnothing$, т.е. $\mathcal{L}'$ не проходит через точки ветвления Г.

Рассмотрим замкнутый цикл $\mathcal{L}'-\sigma\mathcal{L}'$ и продеформируем его в контур $\mathcal{L} \subset \Gamma$, обладающий свойствами:

1. $\pi\mathcal{L}$ не имеет самопересечений;
2. $\bar{\mathbb{C}}_z \backslash \pi\mathcal{L}$ состоит из двух связных открытых множеств

$$\mathcal{D}_0 \supset \{0;\infty\}, \quad \mathcal{D}_1 \supset \{a_i, i=1,\dots,2g\}; \quad \bar{\mathbb{C}}_z \backslash \pi\mathcal{L} = \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1.$$

На $\Gamma\backslash\mathcal{L}$ можно задать функцию $\sqrt{z} = \sqrt{z}(P)$. Она будет иметь противоположные знаки на разных сторонах разреза $\mathcal{L}$.[1]

Введем на Г канонический базис группы гомологий: $\{\mathbf{a};\ \mathbf{b}\}$. Рассмотрим нормированные дифференциалы второго рода $d\Omega_0(P)$, $d\Omega_\infty(P)$, для которых

$$\int d\Omega(P) \sim 1/\sqrt{z}(P), \quad z \sim 0, \quad P \sim P_0;$$

$$\int d\Omega_\infty(P) \sim \sqrt{z}(P), \quad z \sim \infty, \quad P \sim P_\infty.$$

Векторы их b-периодов обозначим $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{V}_\infty$.

Пусть $\mathcal{L} = \langle\Delta_2;\mathbf{a}\rangle + \langle\Delta_1;\mathbf{b}\rangle$. Тогда

$$u = \frac{2}{i}\ \ln\left[\frac{\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(\mathbf{z})}{\Theta\begin{bmatrix}\alpha+\Delta_1/2\\ \beta+\Delta_2/2\end{bmatrix}(\mathbf{z})}\ \exp\left\{\frac{i\pi}{4}\langle\Delta_1;\Delta_2\rangle + i\pi\langle\alpha;\Delta_2\rangle\right\}\right] \tag{3}$$

– решение уравнения (2). Здесь $\mathbf{z} = i\mathbf{V}_0\nu + i\mathbf{V}_\infty\mu$; $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^g$ – произвольные постоянные вещественные векторы – свободные параметры решения, а $\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(\mathbf{z})$ – тэта-функция с характеристиками (см. ниже раздел „Сопряжение конечнозонных формул").

Введение физических переменных x,t

Как, имея решение (2) – функцию $u(\mu;\nu)$, получать решения (1а–1ж)?

Рассмотрим сначала эллиптические уравнения (1г–1ж). Если мы определим $x,t \in \mathbb{R}$ равенствами $\nu = (t+ix)/\varepsilon_1$, $\mu = (t-ix)/\varepsilon_2$, где $|\varepsilon_{1,2}| = 1$, то

$$\partial_\mu\partial_\nu = 4\varepsilon_1\varepsilon_2\Delta = 4\varepsilon_1\varepsilon_2(\partial_x^2+\partial_t^2), \quad \bar{\nu} = \varepsilon_1\varepsilon_2\mu, \quad \bar{\mu} = \varepsilon_1\varepsilon_2\nu.$$

Для уравнения $\Delta v = \sin v$ (1г) положим $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$, $v = u$ или $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$, $v = u+\pi$.

Для уравнения $\Delta v = \mathrm{sh}\ v$ (1д) положим $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$, $v = iu$ или $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$, $v = i(u+\pi)$.

Для уравнения $\Delta v = -\mathrm{sh}\ v$ (1е) положим $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$, $v = i(u+\pi)$ или $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$, $v = iu$.

---

[1] Таких две функции. Выберем любую из них и назовем ее $\sqrt{z}(P)$, вторая будет $-\sqrt{z}(P)$.

Для уравнения $\Delta u=\mathrm{ch}\ u$ (1ж) положим $\varepsilon_1\varepsilon_2=i$, $\nu=i(\pi/2-u)$ или $\varepsilon_1\varepsilon_2=-i$, $\nu=(\pi/2+u)/i$.

Аргументом Θ-функции в решении (3) является $\mathbf{z}=i\mathbf{V}_0\nu+i\mathbf{V}_\infty\mu$.

Следовательно, получаем следующее правило сопряжения:

$$\bar{\mathbf{z}} = -i\varepsilon_1\varepsilon_2(\bar{\mathbf{V}}_0\mu + \bar{\mathbf{V}}_\infty\nu).$$

Закон сопряжения $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_\infty$ определяется кривой Γ и τ – действующим на Γ антиголоморфным автоморфизмом. Поскольку множество существенных особенностей Ψ-функции (т.е. множество $\{P_0, P_\infty\}$) должно быть инвариантно относительно действия τ, возможны два случая - $P_0 \rightleftarrows P_\infty$ и $P_0 \longrightarrow P_0$, $P_\infty \longrightarrow P_\infty$. Рассмотрим сначала первый случай, поскольку именно он соответствует эллиптическим уравнениям. Проектируя τ на $\mathbb{C}_z$, получаем антиинволюцию $\tau_z=\pi\tau$ на $\mathbb{C}_z$, меняющую местами 0 и ∞. Общий вид такого отображения: $\tau_z z=k/\bar{z}$. Будем считать, что $|k|=1$. Вернемся на Γ. В окрестности точки P_∞ можно естественным образом выделить два локальных параметра - $1/\sqrt{z}(P)$ и $\overline{\sqrt{z}(\tau P)}$: $\sqrt{z}(\tau P)\sim\varepsilon/\overline{\sqrt{z}(P)}$, если $P\sim P_\infty$, или, что то же, $\sqrt{z(P)}\sim\varepsilon/\overline{\sqrt{z}(\tau^{-1}P)}$ при $P\sim P_0$. Аналогично $1/\sqrt{z}(\tau P)\sim\overline{\sqrt{z}(P)}/\varepsilon'$, если $P\sim P_0$, или $1/\sqrt{z}(P)\sim \overline{\sqrt{z}(\tau^{-1}P)}/\varepsilon'$ при $P\sim P_\infty$. Заметим, что $\sqrt{z}(\tau^2P)=\varepsilon/\overline{\sqrt{z}(\tau P)} = \varepsilon\sqrt{z}/\bar{\varepsilon}'=\varepsilon\varepsilon'\sqrt{z}(P)$. Поскольку $\tau z=k/\bar{z}$, мы имеем $k=\varepsilon^2=1/(\varepsilon')^2$, $(\varepsilon\varepsilon')^2=1$, $\varepsilon\varepsilon'=\pm1$. Изучим закон сопряжения векторов $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{V}_\infty$. Для этого исследуем поведение главных частей дифференциалов $d\Omega_0$, $d\Omega_\infty$ при отображении τ:

$$\bar{\mathbf{V}}_0 = \int_{\mathfrak{b}} \overline{d\Omega_0(P)} = \int_{\tau\mathfrak{b}} \overline{d\Omega_0(\tau^{-1}P)};$$

$$P\sim P_\infty \Longrightarrow \overline{d\Omega_0(\tau^{-1}P)}\sim d(1/\overline{\sqrt{z}(\tau^{-1}P)}) = d\sqrt{z}(P)/\varepsilon'\sim d\Omega_\infty(P)/\varepsilon';$$

$$P\sim P_0 \Longrightarrow \overline{d\Omega_\infty(\tau^{-1}P)}\sim d\overline{\sqrt{z}(\tau^{-1}P)} = \varepsilon d(1/\sqrt{z}(P))\sim\varepsilon d\Omega_0(P).$$

Дифференциалы $d\Omega_{0,\infty}(P)$ нормированы по определению; пусть τ переводит a-циклы в a-циклы, тогда $\overline{d\Omega_{0,\infty}(\tau^{-1}P)}$ тоже нормированы. Если у нормированных дифференциалов совпадают главные части, то дифференциалы равны, и мы имеем $\overline{\tau^* d\Omega_0}=d\Omega_\infty/\varepsilon'$; $\overline{\tau^* d\Omega_\infty}=\varepsilon d\Omega_0$, где $\tau^* d\Omega(P)=d\Omega(\tau^{-1}P)$. Пусть τ действует на b-циклы так: $\tau\mathfrak{b}=-T\mathfrak{b}+\Phi\mathfrak{a}$. Тогда для векторов $\mathbf{V}_\infty, \mathbf{V}_0$ получаем следующие правила сопряжения:

$$\bar{\mathbf{V}}_0 = -\frac{1}{\varepsilon'}T\bar{\mathbf{V}}_\infty;\qquad \bar{\mathbf{V}}_\infty = -\varepsilon TV_0,$$

а для вектора $\mathbf{z}=i(\mathbf{V}_0\tau+\mathbf{V}_\infty\mu)$ имеем

$$\bar{\mathbf{z}} = i\ T\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon\mathbf{V}_0\nu + \frac{1}{\varepsilon'}\mathbf{V}_\infty\mu).$$

Положим $\tau\mathbf{z}=T^{-1}\bar{\mathbf{z}}$ для $\mathbf{z}\in\mathbb{C}^g$. Аргументом Θ-функции после комплексного сопряжения станет $\tau\mathbf{z}$ (см. формулу (8)). Необходимо, чтобы он совпал (с точностью до знака) с $\mathbf{z}$: $\tau\mathbf{z}=\pm\mathbf{z}$, иначе мы не сможем приравнивать друг другу Θ-функции до и после сопряжения. Поскольку ν и μ меняются независимо, с необходимостью имеем $\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon'}$,

$\varepsilon\varepsilon'=1$, откуда следует, что $\tau^2=1$. Забегая вперед, скажем, что это приведет к условию $g \not| 2$ для кривой, по которой строятся решения уравнения (1ж).

Нужно рассмотреть два случая:

1. $\tau z=z \Leftrightarrow \varepsilon_1\varepsilon_2=\varepsilon'=1/\varepsilon$, $\nu=t-ix$, $\mu=\varepsilon'(t+ix)$;
2. $\tau z=-z \Leftrightarrow \varepsilon_1\varepsilon_2=-\varepsilon'=-1/\varepsilon$, $\nu=t-ix$, $\mu=-\varepsilon'(t+ix)$.

Поскольку ε зависит лишь от произведения $\varepsilon_1\varepsilon_2$, можно считать, что $\varepsilon_2=1$. Из равенства $\tau_z z=k/\bar z$ следует, что поверхность обладает автоморфизмом $\tau z=k/\bar z$, поэтому $\tau^2 z = k^2 z$, и поскольку $\tau^2=1$, то $k^2=1$, и возможны два типа поверхностей: $k=1$, $\tau z=1/\bar z$ - обозначим поверхность с таким автоморфизмом C_4 (рис. 4), а поверхность с автоморфизмом $\tau_z z=-1/\bar z$ (т.е. $k=-1$) обозначим C_5 (рис. 5). Рассмотрим сначала поверхность C_4:

$$y^2= z\prod_{k=1}^{k_1}(z-e^{i\varphi_{2k-1}})(z-e^{i\varphi_{2k}})\prod_{j=1}^{k_2}(z-a_j)(z-1/\bar a_j).$$

На ней имеются две антиинволюции τ_1 и τ_2, причем $\tau_m z=1/\bar z$; $\tau_m y=(-1)^m\gamma\bar y/\bar z^{g+1}$; где $\gamma=\sqrt{\prod_{j=1}^{k_2} a_j/\bar a_j \prod_{k=1}^{k_1} e^{i(\varphi_{2k-1}+\varphi_{2k})}}$ - какое-то фиксированное значение корня.

Рассмотрим $\pi^{-1}O_1\subset C_4$ - прообраз единичной окружности. Он представляет собой объединение вещественных и мнимых овалов, разделенных точками ветвления $\exp\{i\varphi_k\}$. Овалы, вещественные для одной антиинволюции, являются мнимыми для другой. Обозначим через τ ту антиинволюцию, у которой есть хотя бы один вещественный овал. Если существуют точки ветвления $\exp\{i\varphi_k\}$, то τ - любая из двух антиинволюций. Выберем путь $\mathcal{L}'$ симметричным относительно τ (симметричным, как множество точек). Контур $\mathcal{L}=\mathcal{L}'-\sigma\mathcal{L}'$ пересечет $\pi^{-1}O_1$ в точках вещественного овала (рис. 4). При таком выборе $\mathcal{L}$ в окрестности $\pi^{-1}O_1$ имеем $\sqrt{\tau z}=1/\sqrt{\bar z}$, и благодаря симметричности $\mathcal{L}$ это соотношение будет верно и в окрестности точек P_0, P_∞. Таким образом, $\varepsilon=\varepsilon'=1$ для C_4.

Подведем итог исследования кривой C_4. Для четного относительно τ вектора z (будем обозначать его z_1) имеем

$$z_1 = i(V_0+ V_\infty)t + (V_0- V_\infty)x. \tag{4а}$$

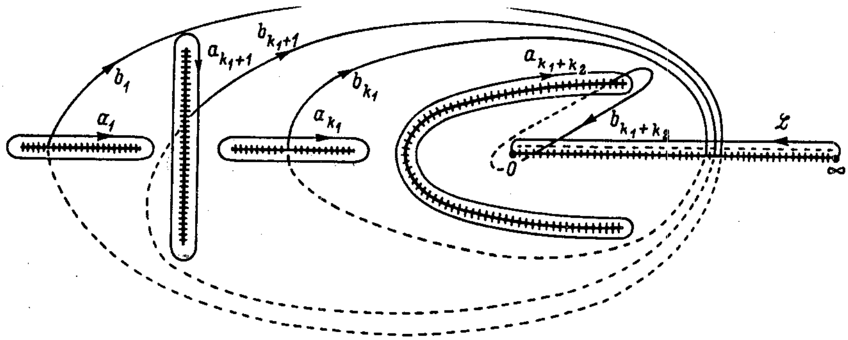
В этом случае $\nu=t-ix$, $\mu=t+ix$, $\partial_\nu\partial_\mu=4\Delta$; уравнение (2) имеет вид $\Delta u=-\sin u$. Для нечетного $z(\tau z=-z)$, обозначим его z_2, имеем

$$z_2 = i(V_0- V_\infty)t + (V_0+ V_\infty)x. \tag{4б}$$

В этом случае $\nu=t-ix$, $\mu=-t-ix$, $\partial_\nu\partial_\mu=-4\Delta$; уравнение (2) в переменных x, t имеет вид $\Delta u=\sin u$. Обратимся теперь к кривой C_5:

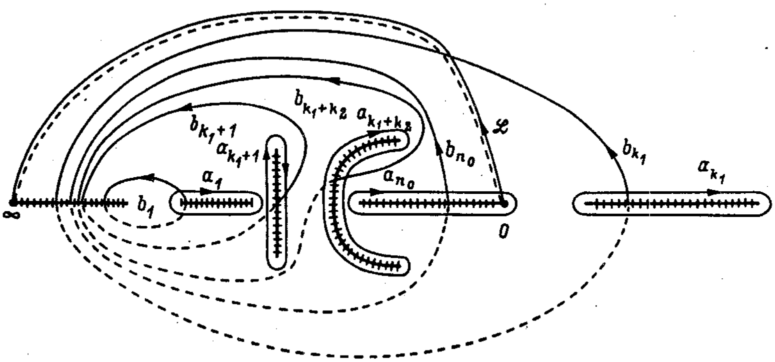
$$y^2 = z\prod_{i=1}^{g}(z - q_i)(z + 1/\bar a_i).$$

На C_5 также имеется два сопряжения τ_1 и τ_2, причем $\tau_k z=-1/\bar z$; $\tau_k y=(-1)^k\gamma\bar y/\bar z^{g+1}$; где $\gamma=\sqrt{\prod_{j=1}^{g}\left(-\frac{a_i}{\bar a_i}\right)}$ - какое-то значение этого корня. Из равенства $\tau_k^2 y=(-1)^{g+1}y$ следует, что кривая C_5 имеет нечетный род.



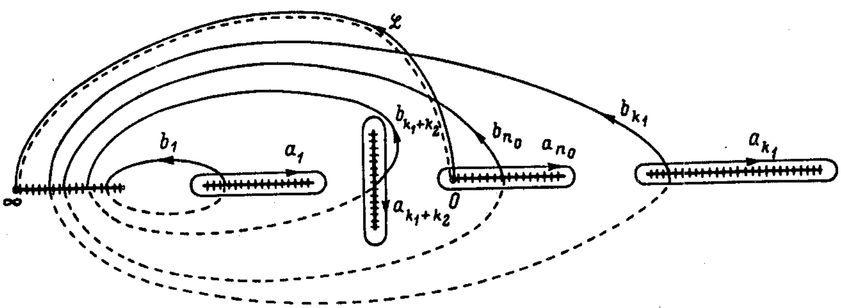
C_1. $\qquad \Delta_1 = 0, \ \Delta_2 = (1, \dots, 1)$

Рис. 1



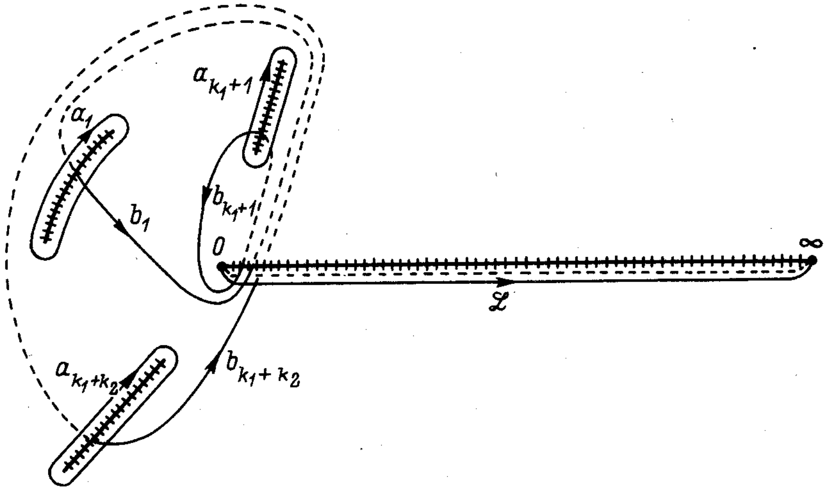
C_2. $$\begin{array}{l} \overbrace{}^{n_0} \\ \Delta_1 = (0, \dots, 0, 1 \mid 0, \dots, 0 \mid 0, \dots, 0) \\ \Delta_2 = (\underbrace{0, \dots, 0, 0 \mid 1, \dots, 1}_{k_1} \mid \underbrace{0, \dots, 0}_{k_2}) \end{array}$$

Рис. 2



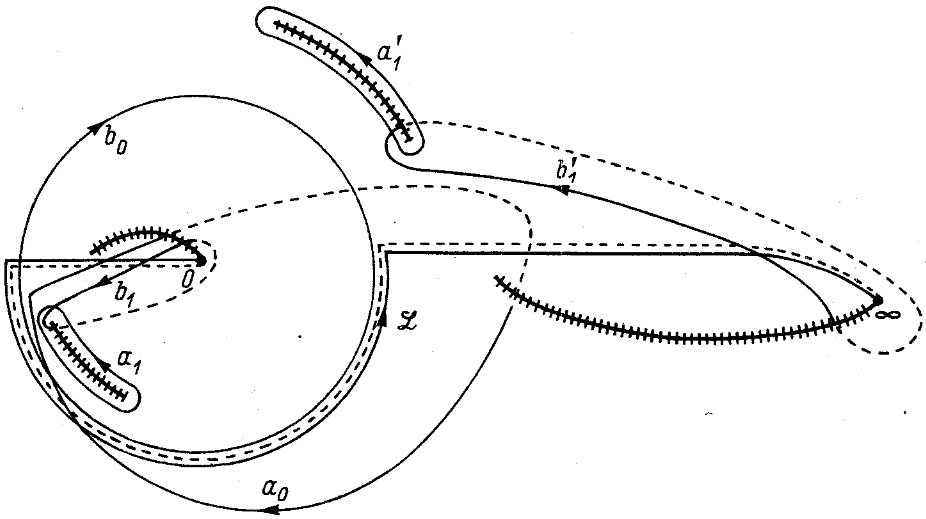
C_3. $$\begin{array}{l} \overbrace{}^{n_0} \\ \Delta_1 = (0, \dots, 0, 1 \mid 0, \dots, 0 \mid 0, \dots, 0) \\ \Delta_2 = (\underbrace{0, \dots, 0, 1 \mid 1, \dots, 1}_{k_1} \mid \underbrace{0, \dots, 0}_{k_2}) \end{array}$$

Рис. 3



C_4. $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = (1, \dots, 1)$

Рис. 4



C_5. $\Delta_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\Delta_2 = (1, 1, \dots, 1)$

Рис. 5

Пусть сначала $|a_1|\neq 1$. Тогда $\pi^{-1}O_1$ - два непересекающихся цикла на C_5. Одно из двух τ_k меняет эти циклы местами, другое, его-то мы и обозначим через τ, переводит каждый из этих двух циклов в себя. Выберем $\mathcal{L}$ следующим образом (рис.5). Пусть $P(t)\in\mathcal{L}$ движется от P_0 к $\pi^{-1}O_1$ по радиусу. Точка $\tau P(t)\in\mathcal{L}$ тоже движется по радиусу от P_∞ к $\pi^{-1}O_1$, $P(t)=(z(t);y(t))\subset\mathcal{L}$. На этих участках $\arg z(t)=\mathrm{const}$, $\arg\tau z=\mathrm{const}$. Пусть $t\in[0,1/3]$, когда $P(t)$ изменяется от P_0 до $\pi^{-1}O_1$: $P(0)=P_0$, $P(\frac{1}{3})\in\pi^{-1}O_1$. После того как обе точки достигнут $\pi^{-1}O_1$ (поскольку это $P(t)$ и $\tau P(t)$, то они окажутся вместе на одном из двух циклов $\pi^{-1}O_1$), соединим их полуокружностью. В зависимости от выбора этой полуокружности будет задана функция $\sqrt{z}$ с тем или иным законом сопряжения. Пусть $P(t)\in\pi^{-1}O_1$, $t\in\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$ движется к $\tau P(1/3)=P(2/3)$ по $\pi^{-1}O_1$ в положительном направлении (против часовой стрелки). Тогда если $\arg z(t) = =\arg z(1/3) + 3\pi(t-1/3)$, $t\in[1/3;\ 2/3]$, $P=(y;z)$, то $\arg\sqrt{z}(2/3) - \arg\sqrt{z}(1/3)=\pi/2$. Поскольку на радиальных участках $\arg\sqrt{z}=\mathrm{const}$, мы имеем в окрестности P_0, P_∞ то же соотношение $\tau\sqrt{z}=i/\sqrt{z}$. Это означает, что для C_5 (при данном контуре $\mathcal{L}$) $\varepsilon'=i$. Теперь легко построить $\mu(x;t)$ и $\nu(x;t)$, а значит, и z. Приведем сразу конечный результат.

Для четного z ($\tau z=z$) имеем

$$z_1 = (iV_0+ V_\infty)t + (V_0-iV_\infty)x. \tag{5а}$$

В этом случае уравнение (2) имеет вид $i\Delta u = \sin u$.

Для нечетного z ($\tau z=-z$) имеем

$$z_2 = (iV_0- V_\infty)t + (V_0+iV_\infty)x. \tag{5б}$$

Уравнение (2) имеет вид $-i\Delta u = \sin u$.

Мы разобрали все возможные случаи кривых с $\tau P_0=P_\infty$. Оказалось, что по ним строятся решения уравнений $i^k\Delta u = \sin u$. Остался случай $\tau P_{0;\infty} = P_{0;\infty}$. Этим кривым будут соответствовать гиперболические уравнения $i^k \,\square\, u = \sin u$.

Пусть $\tau P_0=P_0$, $\tau P_\infty=P_\infty$. Поскольку проекция τ_z антиголоморфна и оставляет точки 0, ∞ на месте, то $\tau z = k\bar{z}$ и τ - симметрия относительно прямой $\arg z = (\arg k)/2$. Такая кривая конформно эквивалентна кривой, симметричной относительно вещественной оси, т.е. можно без потери общности считать, что $\tau z = \bar{z}$. Проведем рассуждения, аналогичные тем, что были приведены для эллиптических уравнений.

Пусть $\sqrt{\tau z} \sim \varepsilon\overline{\sqrt{z}}$, $z \sim 0$; $1/\sqrt{\tau z} \sim \varepsilon'/\overline{\sqrt{z}}$, $z \sim \infty$. Это приводит к равенству: $\bar{z}= = i\ T(\varepsilon_1^2\varepsilon V_0\nu+\varepsilon_2^2\varepsilon' V_\infty\mu)$, где $\nu = (t-x)/\varepsilon_1;\mu = (t+x)/\varepsilon_2$. Условие $\tau z = \pm z$ дает $\varepsilon_1^2\varepsilon=\varepsilon_2^2\varepsilon'=\pm 1$. Общий вид кривых, обладающих автоморфизмом $z \longrightarrow \bar{z}$, такой:

$$y^2 = z\prod_{k=1}^{k_1} (z - b_{2k-1})(z - b_{2k})\prod_{i=1}^{k_2} (z - a_i)(z - \bar{a}_i),\ \mathrm{Im}\ b_i=0,\ \mathrm{Im}\ a_i \neq 0.$$

Поскольку $\tau z = \bar{z}$, имеем $\sqrt{\tau z}=\pm\overline{\sqrt{z}}$, т.е. $\varepsilon;\varepsilon'\in\{1;-1\}$. Все наши кривые можно разбить на два класса, отвечающие случаям $\varepsilon\varepsilon'=1$ и $\varepsilon\varepsilon'=-1$.

I. $\varepsilon\varepsilon'=1$. Этот класс характеризуется условием $\prod_{k=1}^{2k_1} b_k>0$. Сюда же относится случай, когда b_j вообще отсутствуют (нет вещественных точек ветвления). Это кривые C_1, C_2(рис. 1, 2). У кривой C_1 или все вещественные точки ветвления имеют один знак, или их вовсе нет (только $z = 0$). У кривой C_2 имеются точки ветвления разных знаков, причем $\prod b_k > 0$. Учитывая возможность замены $x \rightleftarrows t$ уже в окончательном, вещественном решении, мы опять получаем два вектора - четный ($\tau z_1 = z_1$) и нечетный ($\tau z_2 = -z_2$) - и два вида уравнения (2):

$$1.\quad z_1 = i(V_0+V_\infty)t + i(V_\infty-V_0)\,x, \qquad \Box\, u = -\sin u; \tag{6а}$$

$$2.\quad z_2 = (V_0+V_\infty)t + (V_\infty-V_0)\,x, \qquad \Box\, u = \sin u. \tag{6б}$$

II. $\varepsilon\varepsilon' = -1$. Здесь $\prod_{k=1}^{2k_1} b_k < 0$. Соответствующая кривая обозначается C_3(рис. 3).

Снова имеем два нетривиальных способа ввести x и t:

$$1.\quad z_1 = (iV_\infty+V_0)t + (iV_\infty+V_0)\,x, \qquad i\,\Box\, u = -\sin u; \tag{7а}$$

$$2.\quad z_2 = (iV_0+V_\infty)t + (V_\infty-iV_0)\,x, \qquad i\,\Box\, u = \sin u. \tag{7б}$$

Сопряжение конечнозонных формул

Пусть на Γ действует антиинволюция τ, которая имеет следующее представление в группе гомологий: $\tau a = T_A a$; $\tau b = -Tb + \Phi a$. Нетрудно показать, что $T_A = T^T$, $T\Phi = \Phi T^T = (T\Phi)^T = (\Phi T^T)^T$, $T\Phi T^T = \Phi = \Phi^T$; $\tau^* du = -T\overline{du}$, $\bar{B} = -TBT^T - 2\pi i\Phi T^T$, где du - нормированный базис голоморфных дифференциалов $\int_{a_k} du_j = 2\pi i\delta_{jk}$; $\tau^* du(P) = du(\tau\bar{P})$, $(B)_{ij} = \int_{b_i} du_j$ - матрица b-периодов Γ.

Определим тэта-функцию с характеристиками $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^g$

$$\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(z) = \sum_{N\in\mathbb{Z}^g} \exp\left\{\tfrac{1}{2}\langle B(N+\alpha); N+\alpha\rangle + \langle z+2\pi i\beta; N+\alpha\rangle\right\}.$$

Воспользовавшись приведенными выше формулами, получим

$$\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(z) = \Theta\begin{bmatrix}T^T\alpha\\ -T\beta - T\Phi T^T\alpha - d/2\end{bmatrix}(T\bar{z}) \exp\{\pi i\langle \Phi T^T\alpha + Td; \alpha\rangle\} =$$

$$= \Theta\left[\tau\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} - \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\ d\end{bmatrix}\right](\tau z) \exp\{\pi i\langle \Phi\alpha + d;\ T^T\alpha\rangle\}; \tag{8}$$

здесь $\tau\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}T^T\alpha\\ -T\beta - T\Phi T^T\alpha\end{bmatrix} = T(B\alpha + 2\pi i\beta)$, $d = \operatorname{diag}(T\Phi)$, $\tau z = Tz = \tau\begin{bmatrix}\alpha_z\\ \beta_z\end{bmatrix}$, если $z = B\alpha_z + 2\pi i\beta_z$.

Для получения вещественных решений уравнений с обычными тригонометрическими функциями в правой части (1а, 1д), необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\overline{\left(\frac{\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(z)}{\Theta\begin{bmatrix}\alpha+\Delta_1/2\\ \beta+\Delta_2/2\end{bmatrix}(z)}\right)} = e^{i\,\mathrm{const}}\ \frac{\Theta\begin{bmatrix}\alpha+\Delta_1/2\\ \beta+\Delta_2/2\end{bmatrix}(z)}{\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(z)}.$$

Воспользуемся формулой (8). Поскольку $\Theta\begin{bmatrix}-\alpha\\ -\beta\end{bmatrix}(-z) = \Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(z)$, возникают две системы уравнений на характеристики (первая соответствует случаю $\tau z = z$, вторая $\tau z = -z$):

$$\begin{cases} T^{T}\alpha = \alpha + \Delta_1/2 + m_\alpha, \\ -T\beta-\Phi_\alpha-d/2=\beta+\Delta_2/2+m_\beta, \end{cases} \qquad \begin{cases} -T^{T}\alpha = \alpha + \Delta_1/2 + m_\alpha, \\ T\beta+\Phi_\alpha+d/2=\beta+\Delta_2/2+m_\beta, \end{cases}$$

где m_α и m_β - произвольные целочисленные векторы из $\mathbb{Z}^g$. Указанные уравнения для α и β перепишем в виде

$$\begin{cases} (T^{T}-I)\alpha-\Delta_1/2 = m_\alpha=0 \ (\mathrm{mod}\ \mathbb{Z}^g), \\ (T+I)\beta + \Phi\alpha + d/2 + \Delta_2/2 = 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathbb{Z}^g); \end{cases} \tag{9а}$$

$$\begin{cases} (T^{T}+I)\alpha+\Delta_1/2 = -m_\alpha=0 \ (\mathrm{mod}\ \mathbb{Z}\ ), \\ (T-I)\beta+\Phi\alpha+d/2-\Delta_2/2 = 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathbb{Z}^g). \end{cases} \tag{9б}$$

Если выполнена одна из этих систем, то

$$\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(z) = \Theta\begin{bmatrix}\alpha+\Delta_1/2+m_\alpha\\ \beta+\Delta_2/2+m_\beta\end{bmatrix}(z)\ \exp\ \{\pi i<\Phi T^{T}\alpha+Td;\alpha>\} = \Theta\begin{bmatrix}\alpha+\Delta_1/2\\ \beta+\Delta_2/2\end{bmatrix}(z)\ \exp\ \{\pi i<\Phi T^{T}\alpha+Td;\alpha>+$$
$$+ 2\pi i < \alpha + \Delta_1/2;\ m_\beta>\}.$$

Пользуясь формулами сопряжения для Θ-функции и очевидным равенством $(2/i)\ \ln\ \varphi_1/\varphi_2 = 4\ \arg\ \varphi_1+2\varphi_3$ при условии $\overline{\varphi_1}=\varphi_2\exp(i\varphi_3)$, из формулы (3) получаем

$$u = \frac{2}{i}\ \ln\ \Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(z)\ /\ \Theta\begin{bmatrix}\alpha+\Delta_1/2\\ \beta+\Delta_2/2\end{bmatrix}(z) + \frac{\pi}{2}<\Delta_1;\Delta_2> + 2\pi<\alpha;\Delta_2> = 4\ \arg\ \Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(z) +$$
$$+ 2\pi<\Phi T^{T}\alpha + Td;\alpha> + 4\pi<\alpha+\Delta_1/2;\ m_\beta> + \frac{\pi}{2}<\Delta_1;\Delta_2> + 2\pi<\alpha;\Delta_2> = 4\ \arg\ \Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(z) +$$
$$+ \Psi + \frac{\pi}{2}<\Delta_1;\Delta_2>,$$

где, конечно,

$$\Psi = 2\pi<\Phi T^{T}\alpha + Td;\alpha> + 4\pi<\alpha + \Delta_1/2;\ m_\beta> + 2\pi<\alpha;\ \Delta_2>.$$

Поскольку $P_1 = \frac{1}{2}(I+T)$, $P_2 = \frac{1}{2}(I-T)$ - проекторы, и $P_1P_2 = 0$, $P_1+P_2=I$, для Ψ имеем

$$\Psi/2\pi = <P_1\alpha;\ \Phi P_1\alpha + 2P_1(m_\beta+\Delta_2/2) + P_1 d> +$$
$$+ <P_2\alpha\ ;\ -\Phi P_2\alpha + 2P_2(m_\beta+(\Delta_2-d)/2)>.$$

Двум типам векторов z (четному и нечетному) отвечают два разных Ψ:

$$\Psi_\pm = \mp\pi\left(<m_\alpha + \frac{\Delta_1}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\ \Phi(m_\alpha + \frac{\Delta_1}{2}\right) - (I\pm T)d> +$$
$$+ <(I\pm T)\alpha;\ \frac{1}{2}\ \Phi(I\pm T)\alpha \pm 2\ (I\pm T)\beta>). \tag{10}$$

Утверждение 1. *Если* $\tau z = \pm z$ *и параметры* α,β *удовлетворяют* (9а, 9б), *то функция*

$$u(x;t) = 4\ \arg\ \Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(z(x;t)) + \Psi_\pm + \frac{\pi}{2}<\Delta_1;\Delta_2>$$

является вещественным решением уравнения (2), *при этом* $z(x;t)$ *задается формулами* (4а, 4б) *или* (6а, 6б), $\Psi_\pm$ *определяется равенством* (10).

Для получения вещественных решений уравнений с гиперболическими функциями в правой части необходимо, чтобы

$$\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(z)\ /\ \Theta\begin{bmatrix}\alpha+\Delta_1/2\\ \beta+\Delta_2/2\end{bmatrix}(z) = e^{i\ \mathrm{const}}\ \Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(z)\ /\ \Theta\begin{bmatrix}\alpha+\Delta_1/2\\ \beta+\Delta_2/2\end{bmatrix}(z).$$

Опять возникают две системы на характеристики:

$$\begin{cases} (T^{\mathrm{T}}-I)\alpha = m_{\alpha} = 0 \pmod{\mathbb{Z}^g}, \\ (T+I)\beta + \Phi\alpha + d/2 = -m_{\beta}=0 \pmod{\mathbb{Z}^g}, \\ (T^{\mathrm{T}}-I)\Delta_1/2 = 0 \pmod{\mathbb{Z}^g}, \\ (T+I)\Delta_2/2 + \Phi\Delta_1/2 = m_{\beta}-m'_{\beta}=0 \pmod{\mathbb{Z}^g}; \end{cases} \tag{11а}$$

$$\begin{cases} (T^{\mathrm{T}}+I)\alpha = m_{\alpha} \pmod{\mathbb{Z}^g}, \\ (T-I)\beta + \Phi\alpha + d/2 = m_{\beta}=0 \pmod{\mathbb{Z}^g}, \\ (T^{\mathrm{T}}+I)\Delta_1/2 = 0 \pmod{\mathbb{Z}^g}, \\ (T-I)\Delta_2/2 + \Phi\Delta_1/2 = m'_{\beta}-m_{\beta}=0 \pmod{\mathbb{Z}^g}. \end{cases} \tag{11б}$$

С помощью очевидного равенства

$$\frac{1}{i} \ln \varphi_1^2 = \frac{1}{i} \ln (\varphi_1\bar{\varphi}_1 \cdot \varphi_1/\bar{\varphi}_1) = \frac{1}{i} \ln |\varphi_1|^2 - \varphi_2, \text{ при } \bar{\varphi}_1 = \varphi_1 e^{i\varphi_2}$$

находим

$$\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}(\mathbf{z}) \Big/ \Theta\begin{bmatrix}\alpha+\Delta_1/2\\\beta+\Delta_2/2\end{bmatrix}(\mathbf{z}) = \left(\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}(\mathbf{z}) \Big/ \Theta\begin{bmatrix}\alpha+\Delta_1/2\\\beta+\Delta_2/2\end{bmatrix}(\mathbf{z})\right) \times$$
$$\times \exp\{-2\pi i<\Phi T^{\mathrm{T}}(\alpha+\Delta_1/2) + m'_{\beta};\ \Delta_1/2> + 2\pi i<\alpha; m_{\beta}-m'_{\beta}>\}.$$

Для решения получаем

$$u = \frac{2}{i} \ln \left| \frac{\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}(\mathbf{z})}{\Theta\begin{bmatrix}\alpha+\Delta_1/2\\\beta+\Delta_2/2\end{bmatrix}(\mathbf{z})} \right| + \Psi + \frac{\pi}{2} <\Delta_1;\ \Delta_2>,$$

где

$$\Psi = 2\pi<\Phi T^{\mathrm{T}}(\alpha+\Delta_1/2) + m'_{\beta};\ \Delta_1/2> + 2\pi<\alpha;\ m'_{\beta}-m_{\beta}> + 2\pi<\alpha;\ \Delta_2>.$$

Используя равенства (11а, 11б), получим

$$\Psi_{\pm} = \pi<\Phi T^{\mathrm{T}}\Delta_1/2 \pm \Phi m_{\alpha} + m'_{\beta};\ \Delta_1>-\pi<m_{\alpha};\Delta_2>. \tag{12}$$

Утверждение 2. *Если* $\tau\mathbf{z} = \pm\mathbf{z}$ *и параметры* α, β *удовлетворяют* (11а,11б), *то функция*

$$u(x;t) = \frac{2}{i} \ln \left| \frac{\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}(\mathbf{z})(x;t))}{\Theta\begin{bmatrix}\alpha+\Delta_1/2\\\beta+\Delta_2/2\end{bmatrix}(\mathbf{z})(x;t))} \right| + \Psi_{\pm} + \frac{\pi}{2} <\Delta_1;\ \Delta_2>$$

имеет постоянную вещественную часть $\Psi_{\pm}+ \frac{\pi}{2} <\Delta_1;\ \Delta_2>$ *и удовлетворяет уравнению* (2), *при этом* $\mathbf{z}(x;t)$ *задается формулами* (4а,4б), (5а,5б), (6а,6б), (7а,7б); $\Psi_{\pm}$ *определяется равенством* (12).

Отыскание всех решений системы (9а,9б) для кривых C_1, C_2, C_4 и (11а,11б) для C_1, C_2, C_3, C_4 и C_5 несложно, и мы его опускаем. Приведем окончательные результаты.

Сводка результатов

Запишем формулу (3) для решения уравнения (2) в следующей форме:

$$u = \frac{2}{i} \ln \left[\frac{\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}(\mathbf{z}(\mu;\nu)+\mathbf{z}^0)}{\Theta\begin{bmatrix}\alpha+\Delta_1/\\\beta+\Delta_2/\end{bmatrix}(\mathbf{z}(\mu;\nu)+\mathbf{z}^0)} \exp\left\{\frac{i\pi}{4} <\Delta_1;\Delta_2> + i\pi<\alpha;\Delta_2>\right\} \right].$$

Здесь α, $\beta\in\mathbb{R}^g$, $\mathbf{z}^0\in\mathbb{C}^g$ - произвольные постоянные. Они не являются независимыми.

Зафиксировав, скажем, $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ и произвольно меняя $z^0 \in \mathbb{C}^g$, мы получим все решения. Пусть характеристика $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ удовлетворяет условию вещественности (одной из систем (9а, 9б), (11а, 11б)). Очевидно, что если z^0 - произвольный вектор той же четности относительно τ, что и z ($\tau z(x;t)=\pm z(x;t)$ и одновременно $\tau z^0=\pm z^0$), то решение (12), построенное по этим α, β, z^0, тоже вещественно. Таким образом, все множество вещественных решений естественно распадается на связные компоненты. Укажем по одной характеристике $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ в каждой компоненте, а все вещественные решения можно получить, варьируя четный (если $\tau z = z$) или нечетный ($\tau z=-z$) относительно τ вектор z^0. Результаты вычислений сведем в таблицу.

Поясним обозначения, а также напомним некоторые старые определения. На кривых C_i действуют антиинволюции τ. Базис циклов (см. рисунки) выбран так, что

$$\tau a = Ta, \quad \tau b = -Tb + \Phi a.$$

Введем обозначения

$$<0> = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0\end{pmatrix}, \qquad <1> = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \dots & 1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = (0,\dots,0), \ \mathbf{1} = (1,\dots,1)$$

- прямоугольные матрицы и векторы, составленные из одних нулей или одних единиц. Их размерность либо ясна из контекста, либо поясняется отдельно.

Контур $\mathcal{L}$, обходящий точки 0, ∞ записывается через $\{a;b\}$ следующим образом: $\mathcal{L} = <\Delta_1;b> + <\Delta_2;a>$ (см. рисунки). Решения уравнений с оператором $\square = \partial_t^2-\partial_x^2$ в левой части строятся по кривой

$$y^2 = z\prod_{j=1}^{k_1}(z-b_{2j-1})(z-b_{2j-1})\prod_{k=1}^{k_2}(z-a_k)(z-\bar{a}_k); \ \operatorname{Im} b_j=0, \ \operatorname{Im} a_k \neq 0.$$

Для нее $T = -I$, $\Phi = -\begin{pmatrix}<0><0>\\ <0> \ I\end{pmatrix}$ (на диагонали блок <0> имеет размерность $k_1\times k_1$, блок I - размерность $k_2\times k_2$). В зависимости от взаимного положения точки $z = 0$ и точек $z = b_j$ рассматриваются три различных вида этой кривой:

C_1 - нет вещественных точек ветвления разных знаков; $b_j<0$ $\forall j$ (случай $b_j>0$ конформно эквивалентен этому). Сюда же относится случай $k_1=0$ - отсутствуют вещественные точки ветвления.

Пусть имеются вещественные точки ветвления разных знаков. Введем для этих кривых число n_0 такое, что $b_{2n_0-1}<0$, $b_{2n_0+1}>0$. Если имеется единственная положительная точка ветвления (положительный разрез отсутствует), то в этом случае полагаем $n_0=k_1$.

C_2 - у этой кривой имеются вещественные точки ветвления разных знаков, причем $\prod_{j=1}^{2k_1} b_j > 0$.

C_3 - имеются вещественные точки ветвления разных знаков и $\prod_{j=1}^{2k_1} b_j < 0$.

Решения уравнений (1г-1е) строятся по кривой C_4. Ее уравнение

$$y^2 = z\prod_{k=1}^{k_1}(z-e^{i\varphi_{2k-1}})(z-e^{i\varphi_{2k}})\prod_{j=1}^{k_2}(z-a_j)(z-1/\bar a_j);\ \operatorname{Im}\varphi_k=0;\ |a_j|\neq 1;$$

$$T=-I,\ \Phi=-\begin{pmatrix}\langle 1\rangle\langle 1\rangle\\ \langle 1\rangle\langle 1\rangle\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\langle 0\rangle\langle 0\rangle\\ \langle 0\rangle\ I\end{pmatrix};$$

размерность верхнего диагонального блока – $k_1\times k_1$, нижнего – $k_2\times k_2$. Решения уравнения (1ж) строятся по кривой C_5:

$$y^2 = z(z-a_0)(z+1/\bar a_0)\prod_{j=1}^{(g-1)/2}(z-a_{2j-1})(z-a_{2j})(z+1/\bar a_{2j-1})(z+1/\bar a_{2j});\ |a_j|\le 1.$$

На рис. 5 цикл a_j обходит пару точек a_{2j-1} и a_{2j}, а цикл a'_j обходит пару точек $1/\bar a_{2j-1}$ и $1/\bar a_{2j}$. Для этой кривой

$$T=-\left(\begin{array}{c|cc}1 & \multicolumn{2}{c}{0}\\ \hline 0 & \langle 0\rangle & I\\ & I & \langle 0\rangle\end{array}\right),\qquad \Phi=\langle 0\rangle.$$

Векторы Δ_1, Δ_2 приведены на рисунках соответствующих кривых. В таблице использованы также следующие обозначения:

$$z_1 = i(V_0+V_\infty)t + i(V_\infty-V_0)x + z^0,$$
$$z'_1(x;t) = z_1(t;x) = i(V_0+V_\infty)x + i(V_\infty-V_0)t + z^0,$$
$$z_2 = (iV_\infty-V_0)t + (iV_\infty+V_0)x + z^0,$$
$$z_3 = i(V_0+V_\infty)t + (V_0-V_\infty)x + z^0,$$
$$z_4 = (iV_0-V_\infty)t + (V_0-iV_\infty)x + z_4^0;$$

$z^0\in i\mathbb{R}^g$ – произвольный чисто мнимый g-й вектор, $z_4^0 = i(z_0^0, z', \bar z')$, где $z_0^0\in\mathbb{R}$, $z'\in\mathbb{C}^{(g-1)/2}$ – произвольны;

$\mathbf{m} = (m_1,\dots,m_{k_1})\in\mathbb{Z}^{k_1}$ – произвольный целочисленный k_1-й вектор;

$\mathbf{1} = (1,\dots,1)\in\mathbb{Z}^{k_2}$ – целочисленный k_2-й вектор;

$m_\Sigma = \sum_{i=1}^{k_1} m_i$; если $k_1=0$, то по определению $m_\Sigma = 0$;

$m_\Sigma^0 = \sum_{i=n_0+1}^{k_1} m_i$, если $k_1=n_0$, то по определению $m_\Sigma^0 = 0$;

$m_\Sigma^1 = m_\Sigma - m_\Sigma^0 = \sum_{i=1}^{n_0} m_i$; $m_{n_0} = (\mathbf{m})_{n_0}$ – координата вектора $\mathbf{m}$; n – произвольное число.

В заключение хочу поблагодарить А. И. Бобенко за постоянное внимание к работе и многочисленные стимулирующие беседы. Также приношу благодарность В. Б. Матвееву, отредактировавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний.

Уравнение	Решение
$\square u = \sin u$	$4 \arg \Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(\mathbf{z})$
$\square u = \mathrm{sh}\, u$	$2 \ln \left\| \Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(\mathbf{z}) \,/\, \Theta\begin{bmatrix}\alpha+\Delta_1/2\\ \beta+\Delta_2/2\end{bmatrix}(\mathbf{z}) \right\|$
$\square u = \mathrm{ch}\, u$	$(-1)^{{}^{m}\!\sum^{1}}\, 2 \ln \left\| \Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(\mathbf{z}) \,/\, \Theta\begin{bmatrix}\alpha+\Delta_1/2\\ \beta+\Delta_2/2\end{bmatrix}(\mathbf{z}) \right\|$
$\Delta u = \sin u$	$4 \arg \Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(\mathbf{z}) + (1+k_2)\pi$
$\Delta u = -\mathrm{sh}\, u$	$2 \ln \left\| \Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(\mathbf{z}) \,/\, \Theta\begin{bmatrix}\alpha+\Delta_1/2\\ \beta+\Delta_2/2\end{bmatrix}(\mathbf{z}) \right\|$
$\Delta u = \mathrm{sh}\, u$	$2 \ln \left\| \Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(\mathbf{z}) \,/\, \Theta\begin{bmatrix}\alpha+\Delta_1/2\\ \beta+\Delta_2/2\end{bmatrix}(\mathbf{z}) \right\|$
$\Delta u = \mathrm{ch}\, u$	$- 2 \ln \left\| \Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(\mathbf{z}) \,/\, \Theta\begin{bmatrix}\alpha+\Delta_1/2\\ \beta+\Delta_2/2\end{bmatrix}(\mathbf{z}) \right\|$

Список литературы

[1] Bobenko A.I. Finite-gap constant mean curvature tori in $\mathbb{R}^3$ and S^3. LOMI, preprint E-3-89. L., 1989.

[2] Wente H.C. Counterexample to a conjecture of H.Hopf //Pacific J. of Math. 1986. Vol. 121, N 1. P. 193–244.

[3] Доброхотов С.Ю., Маслов В.П. Современные проблемы математики. Т. 23 // Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. М., 1983. С. 33–78.

[4] Борисов А.Б., Талуц Г.Г., Танкеев А.П., Безматерных Г.В. Вихри и солитоны двухмерного синус-Гордон уравнения //Современные проблемы теории магнетизма. Сб.научн.тр. Киев: Наук.думка. 1986. С.103–111.

[5] Козел В.А., Котляров В.П. Почти периодические решения уранвнения $u_{tt}-u_{xx}+\sin u=0$ // ДАН УССР, 1976. А, N 10. С. 878–881.

[6] Matveev V.B. Abelian functions and solitons. Preprint Wroclaw Univ. N 373. 1976.

Кривая	$\tau z = z$			$\tau z = -z$		
	α	β	z	α	β	z
C_1 (k_1=0)	0	0	z_1	0	0	iz_1
C_1 ($k_1\neq$0)	–	–	–	0	$(m;0)/2$	iz_1
C_1	$(m;1)/2$ $m_\Sigma=k_2+1 \pmod 2$	0	z_1	0	$(m;1/2)/2$	iz_1
	$(m;1)/2$ $m_\Sigma=k_2 \pmod 2$	0	z'_1	0	$(m;1/2)/2$	iz'
C_2	$(m;1)/2$ $m^0_\Sigma=1 \pmod 2$	0	z_1	0	$(m;1/2)/2$ $m_{n_0}=0 \pmod 2$	iz_1
	$(m;1)/2$ $m^0_\Sigma=0 \pmod 2$	0	z'_1	0	$(m;1/2)/2$ $m_{n_0}=0 \pmod 2$	iz'_1
C_3	$(m;1)/2$	0	z_2	0	$(m;1/2)/2$	iz_2
C_4	$(m;1)/2$ $m_\Sigma=k_2 \pmod 2$	0	z_3	0	$(m;1/2)/2$	iz_3
C_4	$(m;1)/2$ $m_\Sigma=k_2+1 \pmod 2$	0	z_3	0	$(m;0)/2$	iz_3
C_4 (k_1=0)	0	0	z_3	–	–	–
C_5	1/2;0;0)	0	z_4	0	(0;0;0)	iz_4

[7] Чередник И.В. Об условиях вещественности в конечнозонном интегрировании // ДАН СССР. 1980. Т. 252, N 5. С. 1104-1108.

[8] Дубровин Б.А., Натанзон С.М. Вещественные двухзонные решения уравнения sine-Gordon // Функцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16, N 1. С. 27-43.

[9] Белоколос Е.Д., Энольский В.З. Обобщенный анзатц Лэмба // Теорет. и мат. физика. 1982. Т. 53, N 2. С. 271-282.

Ленинградский институт
авиационного приборостроения
190000, Ленинград, ул.Герцена, 67

Поступило 8 июня 1989 г.