Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Н. Фомин, О минимальной степени линейности конечных простых групп,
Алгебра и логика, 1986, том 25, номер 1, 103–110

https://www.mathnet.ru/al1931

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
16 декабря 2025 г., 21:14:06

Алгебра и логика, 25, № 1 (1986),103-110

УДК 512.542

О МИНИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ ЛИНЕЙНОСТИ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП

А.Н.ФОМИН

В данной статье приводятся утверждения, аналогичные результатам работы [1]. Как и в [1], под классом групп $\mathfrak{M}$ понимается множество $\mathfrak{M}$ групп, рассматриваемых с точностью до изоморфизма, т.е. если $A \simeq B$ и $B \in \mathfrak{M}$, то $A \in \mathfrak{M}$. Далее, N обозначает множество натуральных чисел, Q - множество всех чисел, каждое из которых есть натуральная степень простого числа; $q = p^m$, $m \in N$; p - простое число. Запись $X \to Y$ означает, что X есть секция группы Y.

Определение 1. Пусть G - конечная группа. Тогда наименьшее среди натуральных чисел n таких, что G является секцией группы $L_n(q)$, называется β_q-степенью группы G и обозначается через $\beta_q(G)$. Натуральное число $\mathrm{Min}_{r \in Q}\, \beta_r(G)$ называется β-степенью группы G и обозначается через $\beta(G)$.

Определение 2. Конечная группа A называется β_q-широкой секцией группы G, если A - простая неабелева группа, $p \in \pi(A)$, $\beta_q(A) = \beta_q(G)$, $A \not\simeq G$, $A \to G$, и если X - простая неабелева группа и $A \to X \to G$, то либо $X \simeq A$, либо $X \simeq G$.

Определение 3. Подгруппа A конечной группы G называется β-широкой, если A - простая неабелева группа, $A \neq G$, $\beta(A) = \beta(G)$ и если X - простая неабелева группа и $A \leq X \leq G$, то либо $A = X$, либо $X = G$.

Предложения 1, 2 показывают, что свойства β_q-широких секций

© Институт математики СО АН СССР, 1986

и β-широких подгрупп конечных групп близки к свойствам широких подгрупп конечных групп.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{M}_q$ *– класс конечных простых неабелевых групп, содержащий каждую простую неабелеву группу из множества* $\{L_n(q) \mid n \in N\}$. *Тогда* $\mathfrak{M}_q$ *содержит любую конечную простую неабелеву группу, порядок которой делится на* p, *если для каждой группы* G *из* $\mathfrak{M}_q$ *в класс* $\mathfrak{M}_q$ *входит любая простая неабелева группа* X, *удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $p \in \pi(X)$;

2) *в группе* G *есть такая подгруппа* $\mathcal{D}$, *что*

а) $\mathcal{D}/O_{p'}(\mathcal{D}) \simeq X$;

б) $M \equiv N_G(\mathcal{D})$ *– максимальная подгруппа группы* G;

в) $O_{p'}(M) = O_{p'}(\mathcal{D})$, M *– единственная максимальная подгруппа группы* G, *содержащая* $\mathcal{D}$;

г) $C_{\overline{M}}(\overline{\mathcal{D}}) = 1$, *где* $\overline{M} = M/O_{p'}(M)$, $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D}/O_{p'}(M)$.

Эта теорема легко следует из леммы 1 и предложения 1.

Лемма 1. *Пусть* $\mathfrak{M}_q$ *– класс конечных простых неабелевых групп, содержащий все простые неабелевы группы из множества* $\{L_n(q) \mid n \in N\}$. *Тогда если все* β_q*-широкие секции каждой группы из* $\mathfrak{M}_q$ *принадлежат* $\mathfrak{M}_q$, *то класс* $\mathfrak{M}_q$ *содержит любую конечную простую неабелеву группу, порядок которой делится на* p.

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Тогда существует такое натуральное число n, что все конечные простые неабелевы pd-группы, β_q-степень которых строго меньше n, лежат в $\mathfrak{M}_q$, и существуют конечные простые неабелевы pd-группы с β_q-степенью, равной n, не принадлежащие $\mathfrak{M}_q$. Среди последних выберем группу X наибольшего порядка. Ясно, что $\beta_q(X) = n$, $X \to L_n(q)$, $L_n(q) \in \mathfrak{M}_q$. Теперь нетрудно усмотреть, что в $L_n(q)$ есть такая простая неабелева секция Y, что $Y \in \mathfrak{M}_q$ и X – β_q-широкая секция группы Y. По условию леммы, $X \in \mathfrak{M}_q$. Следовательно, наше предположение неверно. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $Y \to L_n(q)$, T *– неединичная* p*-подгруппа из*

Y, $X \to N_Y(T)$, X - *простая неабелева группа. Тогда* $\beta_q(X) < n$.

Доказательство. Обозначим $GL(n,q)$ через G. Ясно, что в G есть такие подгруппы A и B, что $A \trianglelefteq B$, $B/A \simeq X$ и $p \in \pi(A)$. Пусть P - силовская p-подгруппа группы A. Тогда $X \to N_G(P)$. Теперь через V обозначим n-мерное векторное пространство над полем F из q элементов и рассмотрим естественное действие G на V. Так как $char(F) = p$, то $C_V(P) \equiv \equiv V_0$ - ненулевое собственное подпространство пространства V. Понятно, что V_0 допустимо относительно $N_G(P)$ и $n_2 = n - n_1$, где $n_1 = dim(V_0)$, $n_2 = dim(V/V_0)$. Из $N_G(P)$ только p-элементы могут оставлять на месте каждый элемент из $V_0 \cup V/V_0$. Поэтому X является секцией по крайней мере одной из групп $GL(n_1,q)$ и $GL(n_2,q)$. Следовательно, $\beta_q(X) < n$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть* $Y \to L_n(q)$, $B \leq Y$, $A \trianglelefteq B$, $B/A = X$ - *простая неабелева группа и* $\beta_q(X) = n$. *Тогда* $A, C_Y(B)$ *и централизатор в* $N_Y(A)/A$ *подгруппы* B/A *являются* p'-*группами. Если, дополнительно,* $p \in \pi(X)$ *и* Z - *простая неабелева секция из* $N_Y(B)/B$, *то* $\beta_q(Z) < n$.

Лемма 3. *Пусть* $Y \to L_n(q)$, $B_i \leq Y$, $B_i/O_{p'}(B_i) = X_i$ - *простая неабелева группа,* $\beta_q(X_i) = n$, $O_{p'}(B_i) \leq \Phi(B_i)$, $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, *и пусть* $Z = \langle B_i \mid 1 \leq i \leq k \rangle$. *Тогда* $[Z,Z] = Z$, $Z/O_{p'}(Z) \equiv X$ - *простая неабелева группа и* $\beta_q(X) = n$.

Доказательство. Сначала отметим, что из условий леммы следует, что $p \in \pi(X_i)$. Здесь i - произвольное число из множества $\{1,2,\ldots,k\}$. Если $R \triangleleft Z$ и в Z/R есть простая неабелева секция, β_q - степень которой равна n, то, в силу следствия леммы 2, $R \leq O_{p'}(Z)$. Пусть теперь $R \trianglelefteq Z$ и в Z/R нет простых неабелевых секций, β_q - степень которых равна n. Тогда все силовские p-подгруппы группы B_i лежат в R. Так как $O_{p'}(B_i) \leq \Phi(B_i)$, X_i - простая неабелева pd-груп-

па, то B_i порождается множеством всех своих силовских p-подгрупп, поэтому $B_i \leq R$. Значит, $R = Z$. Следовательно, X - простая неабелева группа. Понятно, что $\beta_q(X) = n$. Так как $O_{p'}(B_i) \leq \Phi(B_i)$, то $[B_i, B_i] = B_i$. Следовательно, $[Z, Z] = Z$. Лемма доказана.

Определение 4. Пусть X - секция группы G. Тогда любая подгруппа B группы G, содержащая такую нормальную в B подгруппу A, что $B/A \simeq X$, называется носителем секции X в группе G. Если, кроме того, $B \neq G$, то B - собственный носитель секции X в группе G. Максимальные по включению элементы из множества всех собственных носителей секции X в группе G называются максимальными носителями секции X в группе G.

Предложение 1. *Пусть G - конечная группа, $\beta_q(G) = n$, X — β_q- широкая секция группы G, B - собственный ее носитель в G, $A \trianglelefteq B$, $B(A) \simeq X$, M - максимальная подгруппа группы G, содержащая B, $\mathcal{D} = O_{p'}(M)B$. Тогда*

1) $A = O_{p'}(B) \leq O_{p'}(M)$; если B - максимальный носитель секции X в группе G, то $A = O_{p'}(M)$, т.е. $B = \mathcal{D}$;

2) $\mathcal{D} \trianglelefteq M$, т.е. либо $N_G(\mathcal{D}) = M$, либо $N_G(\mathcal{D}) = G$; если B - максимальный носитель секции X в группе G и $B \ntrianglelefteq G$, то $M = N_G(B)$ - единственная среди максимальных подгрупп группы G, содержащая B;

3) $C_{\overline{M}}(\overline{X}) = 1$, где $\overline{M} = M/O_{p'}(M)$, $\overline{X} = \mathcal{D}/O_{p'}(M) \simeq$ $\simeq X$;

4) любая простая неабелева секция из $M/\mathcal{D}$ имеет β_q-степень, меньшую чем n.

Доказательство. В силу следствия леммы 2, $A = O_{p'}(B)$. Через B_1 обозначим такую подгруппу группы B, что $B = O_{p'}(B)B_1$ и $O_{p'}(B) \cap B_1 = O_{p'}(B_1) \leq \Phi(B_1)$. Пусть $Z = \langle B_1^g \mid g \in M \rangle$. Тогда, в силу леммы 3, $Z/O_{p'}(Z)$ - простая неабелева группа, β_q- степень которой равна n. Так как $X \to Z$, то из определения β_q- широкой секции следует, что $Z/O_{p'}(Z) \simeq X$ и

$\mathcal{Z}=O_{p'}(\mathcal{Z})B_1$. Далее, $\mathcal{Z}$ - нормальная подгруппа в группе M, $O_{p'}(\mathcal{Z})\leq O_{p'}(M)$.

Обозначим через $\overline{M}$ фактор-группу $M/O_{p'}(M)$. Пусть $\overline{\mathcal{Z}}=\mathcal{Z}O_{p'}(M)/O_{p'}(M)$. Тогда, в силу следствия леммы 2, $C_{\overline{M}}(\overline{\mathcal{Z}})\leq O_{p'}(\overline{M})$. Так как $O_{p'}(\overline{M})=1$, то $C_{\overline{M}}(\overline{\mathcal{Z}})=1$. Поэтому $O_{p'}(B)\leq O_{p'}(M)$. Теперь ясно, что $O_{p'}(M)\mathcal{Z}=O_{p'}(M)B=\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}\trianglelefteq M$. Если B - максимальный носитель секции X в группе G, то легко видеть, что $\mathcal{D}=B$ и $O_{p'}(M)=A$, и если к тому же B содержится в максимальной подгруппе M_1 группы G и $M_1\neq M$, то $B\trianglelefteq M_1$ и $B\trianglelefteq G$. Утверждения 3) и 4) вытекают из следствия леммы 2. Предложение доказано.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ - класс конечных простых неабелевых групп, содержащий каждую простую группу из множества $\{L_n(r)\mid n\in N,\ r\in Q\}$. Тогда $\mathfrak{M}$ совпадает с классом всех конечных простых неабелевых групп, если для каждой группы G из $\mathfrak{M}$ классу $\mathfrak{M}$ принадлежит и любая простая неабелева подгруппа X группы G, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $M=N_G(X)$ *- максимальная подгруппа группы* G;

2) $C_G(X)=1$;

3) M *- единственная максимальная подгруппа группы* G, *содержащая* X;

4) $\beta(X)=\beta(G)$.

Эта теорема непосредственно вытекает из нижеследующих леммы 4 и предложения 2.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{M}$ - класс конечных простых неабелевых групп, содержащий все простые неабелевы группы из множества $\{L_n(r)\mid n\in N,\ r\in Q\}$. Тогда если каждая β-широкая подгруппа любой группы из $\mathfrak{M}$ лежит в $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}$ есть класс всех конечных простых неабелевых групп.*

Доказательство, ввиду его простоты и аналогичности доказательству леммы 1, опускается.

Лемма 5. *Пусть* $G = GL(n,q)$, $B \leq G$, X *- простая неабелева группа,* $\beta(X) = n$, $X \to B$. *Тогда* $C_G(B) = Z(G)$.

Доказательство легко следует из хорошо известной леммы Шура о неприводимых представлениях групп.

Лемма 6. *Пусть* $G = GL(n,q)$, $B \leq G$, $A \trianglelefteq B$, $B/A = X$ *- простая неабелева группа и* $\beta(X) = n$. *Тогда* $A \leq Z(G)$.

Доказательство. В силу предыдущей леммы, достаточно показать, что X является секцией в централизаторе любой примарной силовской подгруппы группы A. Предположим противное, т.е. пусть $r \in \pi(A)$, R - силовская r-подгруппа группы A и $X \not\to C_G(R)$. Тогда ясно, что $X \to N_G(R)$. В силу леммы 2, $r \neq p$. Через D обозначим подгруппу наименьшего порядка группы R, для которой $X \to N_G(D)$, $X \not\to C_G(D)$. Тогда из леммы 5 следует, что любая собственная характеристическая подгруппа группы D лежит в циклической группе $D \cap Z(G)$. Группа D порождается всеми элементами порядка r, в противном случае в D была бы только одна циклическая группа порядка r и из $X \to N_G(D)$ следовало бы $X \to C_G(D)$. Теперь из свойств D вытекает, что D - либо элементарная абелева группа порядка r^s, либо экстраспециальная группа порядка r^{2s+1}, либо центральное склеивание экстраспециальной группы порядка r^{2s+1} с циклической группой порядка r^2 и $|D| = r^{2s+2}$, где s - некоторое натуральное число. Теперь через V обозначим n-мерное векторное пространство над полем F из q элементов, на которое G действует естественным образом.

Пусть D - неабелева группа. Тогда через M обозначим ее экстраспециальную подгруппу порядка r^{2s+1} (т.е. $M = D$ или $D = MZ(D)$). Так как $Z(M) = \Phi(M)$ - неединичная группа скалярных

матриц, то группа M действует точно на любое M-допустимое неприводимое относительно M подпространство V_1 пространства V. Хорошо известно, что размерность любого точного неприводимого модуля M над полем, содержащим примитивный корень степени r^2 из единицы, равна r^s. Следовательно, $n \geqslant \dim V_1 \geqslant r^s$. С другой стороны, из строения $\mathcal{D}$ вытекает, что $X \to Aut(\mathcal{D}/Z(\mathcal{D}))$, т.е. $X \to GL(2s,r)$. Теперь, используя определение β-степени, получаем, что $2s \geqslant n \geqslant r^s$. Это возможно только при $r = s = 2$, $n = 4$. Поэтому M - экстраспециальная группа порядка 2^5, $\mathcal{D} = M$ или $\mathcal{D}$ -центральное склеивание M и циклической группы порядка 4. Группы автоморфизмов экстраспециальных групп порядка 2^5 хорошо известны. Используя их строение, нетрудно показать, что любая простая неабелева секция группы $Aut(\mathcal{D})$ изоморфна знакопеременной группе A_5 или A_6. Так как $\beta(A_5) = \beta(A_6) = 2$ и $X \to Aut(\mathcal{D})$, то $n = \beta(X) = 2$. Это противоречит тому, что $n = 4$.

Следовательно, $\mathcal{D}$ - элементарная абелева r-группа, $|\mathcal{D}| = r^s$. Так как $X \to N_G(\mathcal{D})/C_G(\mathcal{D})$, то $X \to GL(s,r)$ и $s \geqslant n = \beta(X)$. Используя неравенство $s \geqslant n$ и рассматривая действие $\mathcal{D}$ на V, легко установить существование в V базиса, относительно которого каждый элемент из $\mathcal{D}$ представляется диагональной матрицей. Отсюда следует, что $s = n$ и $|\mathcal{D} : \mathcal{D} \cap SL(n,q)| = r$. Так как $\mathcal{D} \cap SL(n,q) \trianglelefteq N_G(\mathcal{D})$, то из условий выбора $\mathcal{D}$ получаем, что $X \to C_G(\mathcal{D})$. Это противоречит нашему предположению. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть* $Y \to L_n(q)$, $B \leq Y$, $A \trianglelefteq B$, $B/A = X$ - *простая неабелева группа,* $\beta(X) = n$. *Тогда* $A = 1$ *и, в частности,* $C_Y(B) = 1$.

Лемма 7. *Пусть* $Y \to L_n(q)$, $X_1, X_2, \ldots, X_k$ - *простые неабелевы подгруппы группы* Y, β - *степень которых равна* n. *Тогда* $X \equiv \langle X_i \mid 1 \leq i \leq k \rangle$ - *простая неабелева группа и* $\beta(X) = n$.

Доказательство. Пусть $A \trianglelefteq X$ и $X/A \neq 1$. Тогда $X_j \to X/A$ хотя бы для одного j из $\{1, 2, \ldots, k\}$. В силу следствия леммы 6, $A = 1$. Значит, X - простая неабелева группа. Очевидно, $\beta(X) = n$. Лемма доказана.

Предложение 2. *Пусть* A - β-*широкая подгруппа конечной простой неабелевой группы* G. *Тогда*

1) $M \equiv N_G(A)$ - *максимальная в* G *подгруппа;*

2) $C_G(A) = 1$;

3) M – *единственная максимальная подгруппа группы* G, *содержащая* A;

4) *если* X – *простая неабелева секция группы* M/A, *то* $\beta(X) < \beta(A)$.

Доказательство. Пусть M – максимальная подгруппа группы G, содержащая A, и $\mathcal{D}$ – подгруппа, порожденная всеми простыми неабелевыми подгруппами из M, β-степень которых равна $n = \beta(G)$. Тогда, в силу леммы 7, $\mathcal{D}$ – простая неабелева группа и $\beta(\mathcal{D}) = n$. Ясно, что $\mathcal{D} \trianglelefteq M$, $A \leq \mathcal{D}$. Из определения β-широкой подгруппы видно, что $\mathcal{D} = A$. Теперь из простоты группы G следуют утверждения 1) и 3) доказываемого предложения. Утверждения 2) и 4) справедливы в силу следствия леммы 6. Предложение доказано.

Литература

1. В.Д.МАЗУРОВ, А.Н.ФОМИН, О конечных простых неабелевых группах, Матем. заметки, 34, № 6 (1983), 821-824.

Поступило 19 ноября 1985 г.