

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИКИ**

Выпуск 5

Издание выходит с 2003 года

А. А. Гончар, С. П. Суетин

Об аппроксимациях Паде
мероморфных функций
марковского типа

Москва

2004

УДК 517.53
ББК (В)22.161.5
С56

Редакционный совет:

*С. И. Адян, Д. В. Аносов, О. В. Бесов, В. С. Владимиров,
А. М. Зубков, А. Д. Изаак (ответственный секретарь),
А. А. Карацуба, В. В. Козлов, С. П. Новиков, В. П. Павлов,
А. Н. Паришин (заместитель главного редактора),
Ю. В. Прохоров, А. Г. Сергеев (главный редактор),
А. А. Славнов, Е. М. Чирка*

С56 **Современные проблемы математики** / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). — М.: МИАН, 2004. Вып. 5 : Об аппроксимациях Паде мероморфных функций марковского типа / Гончар А. А., Суегин С. П. — 68 с.

ISBN 5-98419-009-5

Серия “Современные проблемы математики” — рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии публикуются работы, отражающие научные достижения сотрудников и аспирантов МИАН. Особое внимание уделяется исследованиям, выполненным в рамках научных программ Российской академии наук. Публикация работ осуществляется по решению Редакционного совета, в который входят представители администрации и заведующие отделами МИАН. Издания серии рассылаются по стандартному обязательному списку, в библиотеки математических институтов и ведущих университетов страны.

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-14126).

ISBN 5-98419-009-5

© Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН, 2004

Об аппроксимациях Паде мероморфных функций марковского типа

А. А. Гончар, С. П. Суетин

§ 1. Введение

1. Теория аппроксимаций Паде – *локально наилучших рациональных аппроксимаций степенного ряда* – составляет важное направление в комплексном анализе и теории приближений. В XVIII–XIX вв. это направление развивалось, в основном, в рамках классической теории непрерывных дробей. Интерес к аппроксимациям Паде и более общим конструкциям рациональных аппроксимаций аналитических функций резко возрос во второй половине прошлого века. Благодаря современному развитию вычислительной техники такие аппроксимации нашли многочисленные применения в различных задачах математической физики, механики и прикладной математики. В свою очередь, анализ возникающих при этом математических проблем привел к новым задачам и результатам в комплексном анализе, теории потенциала, теории ортогональных многочленов (см. [1], где имеется обширная библиография работ в рассматриваемом направлении).

Подчеркнем, что речь идет о приближениях рациональными функциями со *свободными* полюсами, а сами рассматриваемые аппроксимации – непрерывные дроби, аппроксимации Паде и их различные обобщения – имеют *нелинейный* характер. Оптимальный выбор коэффициентов как числителей, так и знаменателей аппроксимаций Паде позволяет с их помощью *локализовать особенности* функции, заданной своим разложением в степенной ряд, и *осуществлять ее эффективное аналитическое продолжение* за пределы круга сходимости степенного ряда. В этом состоит принципиальное преимущество рассматриваемых рациональных

аппроксимаций перед полиномиальными приближениями и рациональными аппроксимациями с заранее *фиксированными* полюсами.

Настоящая работа посвящена асимптотическим свойствам диагональных аппроксимаций Паде для мероморфных функций марковского типа. Многие замечательные свойства аппроксимаций Паде и их обобщений были открыты сначала эмпирически в результате численных расчетов и лишь затем строго обоснованы. Именно так была сделана и эта работа: сначала с помощью компьютерных расчетов было обнаружено новое свойство, связанное с асимптотическим поведением полюсов диагональных аппроксимаций Паде, а затем, с целью доказательства того, что соответствующая закономерность имеет место в достаточно широком классе мероморфных функций, были получены новые формулы сильной асимптотики для диагональных аппроксимаций Паде и их знаменателей.

2. Пусть

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k+1}} \quad (1)$$

– степенной ряд с центром в бесконечно удаленной точке $z = \infty$, $f_n = [n/n]_f$, $n = 1, 2, \dots$, – последовательность его диагональных¹ аппроксимаций Паде. В случае, когда все ганкелевы определители

$$H_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n} \end{vmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

отличны от нуля, ряду (1) с помощью классического алгоритма Евклида сопоставляется чебышевская непрерывная дробь [2]:

$$f \sim \frac{a_1}{z - b_1 - \frac{a_2}{z - b_2 - \dots}}, \quad (2)$$

¹Термин “диагональная последовательность” связан с тем, что такие аппроксимации составляют главную диагональ в общей *таблице Паде* ряда f (см. [1]).

n -я подходящая дробь которой совпадает с f_n и обладает следующим характеристическим свойством:

$$(f - f_n)(z) = \frac{A_n}{z^{2n+1}} + \dots, \quad (3)$$

где $A_n \neq 0$. Тем самым, дробь (2) есть просто другая (эквивалентная) форма записи для последовательности $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

В общем случае удобно основываться на следующем определении n -й диагональной аппроксимации Паде ряда f (определение Фробениуса): $f_n = P_n/Q_n$, где P_n, Q_n – полиномы от z , $\deg P_n < \deg Q_n \leq n$ ($Q_n \neq 0$) и выполняется соотношение

$$R_n(z) := (Q_n f - P_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Этими условиями полиномы P_n и Q_n определяются не однозначно, но рациональная дробь $f_n = P_n/Q_n$ единственна (с точностью до стандартного отождествления). Функция R_n называется *функцией остатка*. Для *нормальных* индексов n порядок рациональной функции f_n равен n . Тем самым, для таких n полиномы P_n и Q_n , удовлетворяющие условию (4), не имеют общих нулей, $\deg Q_n = n$ и выполняется соотношение (3) (где, возможно, $A_n = 0$). Каково бы ни было n , справедливо равенство $f_n = f_{n_k}$, где n_k – наибольший нормальный индекс, не превосходящий n . Тем самым, последовательность нормальных индексов $\{n_k\} = \Lambda = \Lambda(f)$ для ряда f разбивает натуральный ряд чисел на множества $\Lambda_k = \{n : n_k \leq n < n_{k+1}\}$ такие, что $f_n = f_{n_k}$ для $n \in \Lambda_k$. Такая структура последовательности $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ позволяет в вопросах сходимости диагональных аппроксимаций Паде ограничиться рассмотрением последовательности $\{f_n\}_{n \in \Lambda}$.

Для *марковской* функции

$$\hat{\sigma}(z) := \int \frac{d\sigma(x)}{z-x}, \quad z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus S, \quad (5)$$

где σ – положительная борелевская мера с бесконечным носителем $S = \text{Supp } \sigma \in \mathbb{R}$, коэффициенты соответствующего ей ряда (1) совпадают с моментами меры σ :

$$c_n = \int x^n d\sigma(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

При этом все определители H_n положительны, полиномы $Q_n(z) = Q_n(z; \hat{\sigma})$ имеют степень n и при нормировке $Q_n(z; \hat{\sigma}) = z^n + \dots$ определяются единственным образом:

$$Q_n(z; \hat{\sigma}) = \frac{1}{H_{n-1}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix} = z^n + \dots, \quad n = 1, \dots$$

Полиномы Q_n ортогональны по мере σ , при этом для функции остатка (4) справедливо представление

$$R_n(z) = \int \frac{Q_n(x) d\sigma(x)}{z - x}, \quad z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus S, \quad (6)$$

а для полиномов P_n – представление

$$P_n(z) = \int \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z - x} d\sigma(x); \quad (7)$$

в теории ортогональных многочленов (6) принято называть функцией второго рода, а (7) – многочленами второго рода.

Классическая теорема Маркова [3] утверждает, что для марковской функции $\hat{\sigma}$ чебышевская непрерывная дробь (2) равномерно сходится внутри (на компактных подмножествах) области $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus [\alpha, \beta]$, где $[\alpha, \beta]$ – выпуклая оболочка S .

3. В 1975 году в работе [4] одним из авторов настоящей статьи было получено обобщение теоремы Маркова на класс мероморфных функций вида

$$f = \hat{\sigma} + r, \quad (8)$$

где r – рациональная функция с комплексными коэффициентами (r – “рациональное возмущение” марковской функции $\hat{\sigma}$). Основной результат работы [4] состоит в следующем².

ТЕОРЕМА 1. Пусть σ – положительная борелевская мера с носителем $\text{Supp } \sigma = [\alpha, \beta]$, $\sigma' > 0$ п.в. на $[\alpha, \beta]$ и $f = \hat{\sigma} + r$, где

²В [4] мера σ предполагалась такой, что имеет место асимптотика отношения многочленов, ортогональных на $[\alpha, \beta]$ относительно σ . Позднее Е. А. Рахмановым [5], [6] было показано, что при условии: $\sigma' > 0$ п.в. на $[\alpha, \beta]$, эта асимптотика отношения имеет место.

r – произвольная комплексная рациональная функция, все полюсы которой принадлежат области $\mathbb{C} \setminus [\alpha, \beta]$, и $r(\infty) = 0$. Тогда последовательность диагональных аппроксимаций Паде $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к f равномерно в сферической метрике³ внутри области $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus [\alpha, \beta]$.

Из теоремы 1 вытекает, что к каждому полюсу функции f в D стремится (со скоростью геометрической прогрессии; см. ниже формулу (10)) ровно столько полюсов f_n , какова его кратность, а все предельные точки остальных полюсов лежат на отрезке $[\alpha, \beta]$. Отметим, что из указанного асимптотического поведения полюсов диагональных аппроксимаций Паде для формального ряда f уже вытекает равномерная сходимости последовательности f_n внутри области $\widehat{\mathbb{C}} \setminus [\alpha, \beta]$ (в сферической метрике); тем самым, этот ряд определяет аналитическую функцию f , допускающую мероморфное продолжение во внешность отрезка $[\alpha, \beta]$ (см. [7], [8]).

Таким образом, диагональные аппроксимации Паде в классе функций вида (8), заданных своими разложениями в степенной ряд (1), полностью решают задачу эффективного аналитического продолжения степенного ряда в область $D = D_f$: полюсы этих аппроксимаций локализуют как отрезок $[\alpha, \beta] = \text{Supp } \sigma$, так и полюсы f в D с учетом их кратностей, а сами аппроксимации f_n восстанавливают f внутри D .

Из теоремы 1 получаем следующее утверждение о скорости сходимости последовательности f_n к функции f в “проколотов” области $D' = D \setminus \{\text{полюсы } f\}$:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |(f - f_n)(z)|^{1/n} \leq \frac{1}{|\Phi(z)|^2}, \quad (9)$$

где Φ – функция, отображающая внешность отрезка $[\alpha, \beta]$ на внешность единичного круга с условием $\Phi(\infty) = \infty$.

Отсюда уже вытекает [4, § 2, п. 10], что полюсы f_n стремятся к полюсам f в D со скоростью геометрической прогрессии

³Имеется в виду, что за расстояние между двумя точками в комплексной плоскости принимается расстояние между соответствующими точками на сфере Римана.

(в дальнейшем – *геометрически*); при этом если a – полюс f кратности $\mu \geq 1$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a - \zeta_{j,n}(a)|^{1/n} \leq \frac{1}{|\Phi(a)|^{2/\mu}}, \quad j = 1, \dots, \mu, \quad |\Phi(a)| > 1; \quad (10)$$

здесь $\zeta_{j,n}(a)$, $j = 1, \dots, \mu$, – полюсы⁴ f_n , перенумерованные в порядке неубывания их расстояний до точки a .

В работе [4, § 2, п. 11] было отмечено, что как теорема 1, так и ее следствия остаются в силе для любых мероморфных в области D функций f (с конечным числом полюсов в D), голоморфные составляющие f^* которых могут быть представлены в виде

$$f^*(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{s(x) d\sigma(x)}{z - x}, \quad z \in D,$$

где s – произвольная комплексная рациональная функция, все нули и полюсы которой принадлежат области D . В частности, это относится и к простейшим алгебраическим функциям вида

$$f(z) = \frac{r_1(z)}{w} + r_2(z), \quad (11)$$

где $w = \sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)}$, при условии, что все полюсы рациональных функций r_1, r_2 лежат в D , r_1 не имеет нулей на отрезке $[\alpha, \beta]$ и в D зафиксирована определенная ветвь квадратного корня.

4. В условиях теоремы 1 для функций вида (8) в (9) и (10) имеет место *точное равенство*; тем самым, в правой части (10) указан правильный показатель скорости сходимости полюсов f_n к полюсам f в области D (ср. [7], а также § 2, п. 3 ниже). В то же время соотношения такого типа дают информацию о поведении каждого из μ полюсов аппроксимаций Паде по отдельности и не позволяют судить о том, какова “в целом” картина поведения μ полюсов f_n в окрестности μ -кратного полюса f . Для выяснения возможных закономерностей в асимптотическом поведении полюсов аппроксимаций Паде f_n в окрестности кратного полюса f мы провели соответствующие вычисления для конкретных примеров

⁴Как обычно, полюсы и нули функций считаются с учетом их кратностей.

функций вида (11). С помощью программы, написанной на языке FORTRAN и работающей под управлением операционной системы LINUX, были проведены вычисления (с точностью в 40 значащих цифр) нулей и полюсов диагональных аппроксимаций Паде для функций вида

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} + r(z), \quad (12)$$

где r – вещественная рациональная функция, которая в одном случае имеет единственный полюс 10-й кратности в точке $a > 1$, а в другом – два полюса в точках a и \bar{a} , $\text{Im } a > 0$, каждый 10-й кратности. В обоих случаях ветвь корня в (12) выбиралась так, что $\sqrt{z^2 - 1} > 0$ при $z > 1$.

Результаты численного анализа рассматриваемой задачи (для достаточно больших n) представлены на рис. 1–8. Сделаем необходимые пояснения. На рис. 1 изображены нули (белые кружки) и полюсы (черные кружки) диагональной аппроксимации Паде f_{28} функции вида (12) для первого случая с $a = 1.45$. Часть нулей и полюсов локализует отрезок $\Delta = [-1, 1]$, при этом они перемежаются между собой. Остальные нули рациональной функции f_{28} локализуют *простые* нули функции f в области D . То, что эти нули простые, отчетливо видно из сравнения рис. 1 и рис. 3: расположение таких нулей для аппроксимаций Паде f_n очень быстро стабилизируется и при последовательных $n = 21, 22, \dots, 33$ остается практически неизменным, так как в соответствии с (10) они стремятся к нулям f в D геометрически⁵ (отметим, что расстояние между такими нулями f_n , локализующими простой нуль f , при двух последовательных значениях $n = 42, 43$ уже оказывается порядка 10^{-10}). Такой же характер имеет сходимость полюсов f_n к простому полюсу f .

Иначе обстоит дело в случае *кратного* (здесь – 10-кратного) полюса f : как видно из рис. 2, все 10 полюсов f_n в окрестности этого полюса *простые*; они по-прежнему сходятся к полюсу f геометрически (см. рис. 3 и 4), но теперь в соответствии с формулой (10) общий показатель скорости сходимости $|\Phi(a)|^{-2} < 1$ распределяется между 10-ю простыми полюсами рациональной дроби f_n , локализующими точку $z = a$. Более того, это распределение

⁵Это вытекает из очевидной связи между диагональными аппроксимациями Паде для функций f и $1/f$.

носит равномерный характер, а совокупность из этих 10-ти простых полюсов f_n ведет себя регулярно в целом: *асимптотически они располагаются в вершинах правильного 10-угольника*. В этом убеждают результаты расчетов, представленные на рис. 2, 4, 6, 8.

Основная *цель настоящей работы* – вывод формул *сильной асимптотики* (см. (22₁)–(22₃)) для знаменателей диагональных аппроксимаций Паде мероморфных функций марковского типа $f = \hat{\sigma} + r$ при дополнительных ограничениях на σ (см. ниже § 2). На основе соответствующих формул в работе доказано, что в достаточно малой окрестности кратного полюса мероморфной функции $f = \hat{\sigma} + r$ все полюсы рациональных функций f_n простые и ведут себя именно так, как было указано выше в связи с проведенными численными расчетами.

Доказательство этих результатов основано на свойствах Ψ -функции, решающей специальную краевую задачу Римана на двулистной римановой поверхности. В работе рассмотрен также случай, когда носитель σ состоит из *нескольких отрезков*.

Настоящая работа выполнена в рамках Программы РАН “Современные проблемы теоретической математики” и Программы поддержки ведущих научных школ России (грант № НШ-1551.2003.1), а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00564) и фонда INTAS (грант № 03-51-6637).

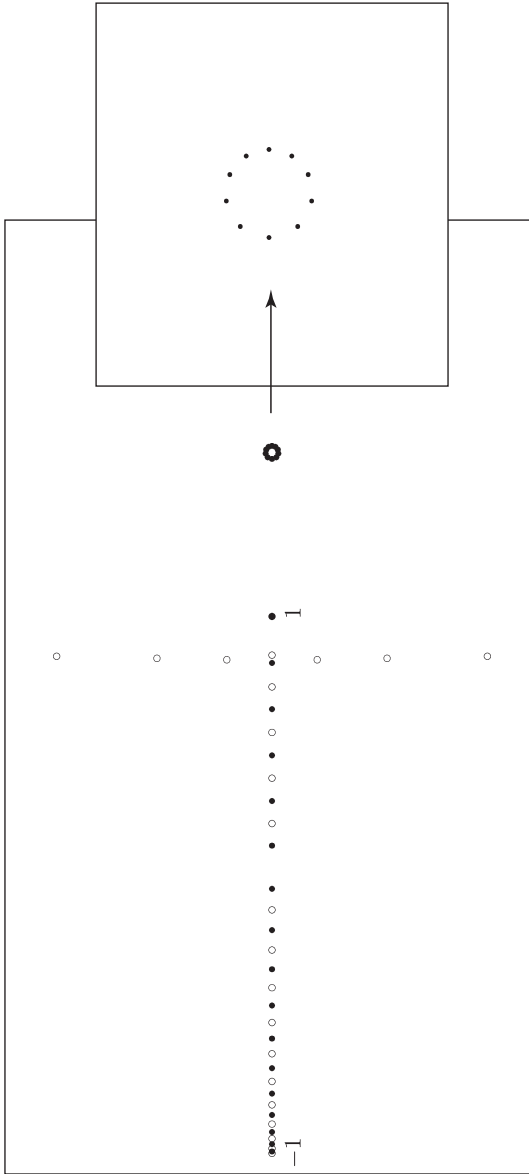


Рис. 1. Нули (белые кружки) и полюсы (черные кружки) диагональной аппроксимации Паде f_{28} для функции $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$, где r – вещественная рациональная функция с единственным полюсом в точке $z = a$, $a > 1$, кратности 10. Основная часть нулей и полюсов функции f_{28} локализуется отрезок $[-1, 1]$, при этом они перемежаются между собой. Оставшиеся нули и полюсы f_{28} локализируют соответственно простые нули и 10-кратный полюс функции f , расположенные в дополнении к отрезку $[-1, 1]$.

Рис. 2 (справа). Полюсы диагональной аппроксимации Паде f_{28} , расположенные в малой окрестности 10-кратного полюса функции $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$.

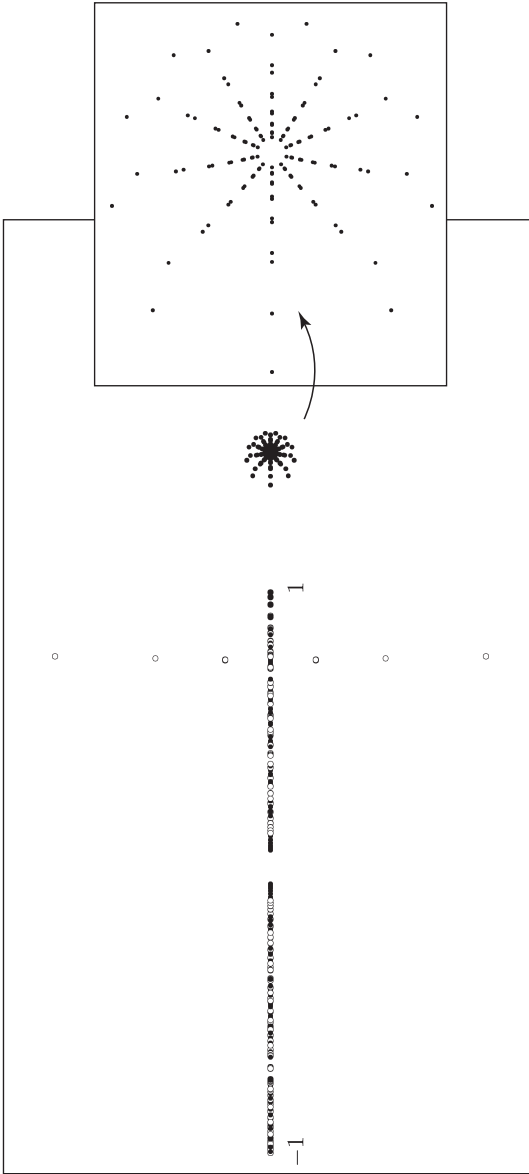


Рис. 3. Нули (белые кружки) и полюсы (черные кружки) диагональных аппроксимаций Паде f_{21}, \dots, f_{33} для функции $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$, где r – вещественная рациональная функция с единственным полюсом в точке $z = a$, $a > 1$, кратности 10. Основная часть нулей и полюсов функций f_{21}, \dots, f_{33} локализуется отрезок $[-1, 1]$. Оставшиеся нули и полюсы f_{21}, \dots, f_{33} локализуют соответственно простыми нули и 10-кратный полюс функции f , расположенные в дополнении к отрезку $[-1, 1]$.

Рис. 4 (справа). Полюсы диагональных аппроксимаций Паде f_{21}, \dots, f_{33} , расположенные в малой окрестности 10-кратного полюса функции $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$.

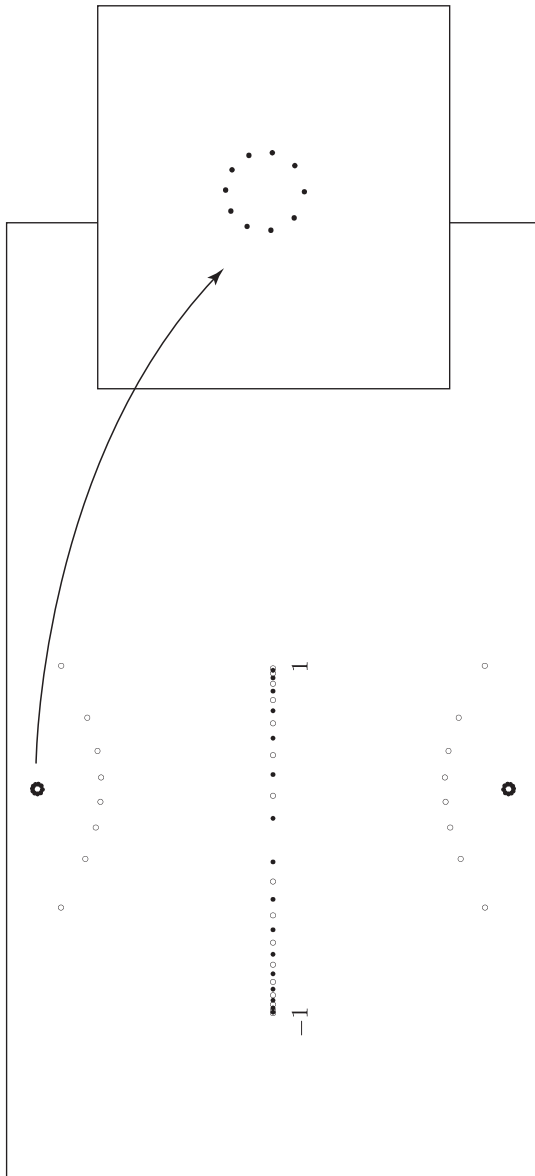


Рис. 5. Нули (белые кружки) и полюсы (черные кружки) диагональной аппроксимации Паде f_{38} для функции $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$, где $r -$ вещественная рациональная функция с двумя полюсами в точках $z = a$ и $z = \bar{a}$, $\text{Im } a > 0$, кратности 10 каждый. Основная часть нулей и полюсов функции f_{38} локализуется отрезок $[-1, 1]$, при этом они перемежаются между собой. Оставшиеся нули и полюсы f_{38} локализируют соответственно простые нули и два 10-кратных полюса функции f , расположенные в дополнении к отрезку $[-1, 1]$.

Рис. 6 (справа). Полюсы диагональной аппроксимации Паде f_{38} , расположенные в малой окрестности 10-кратного полюса функции $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$.

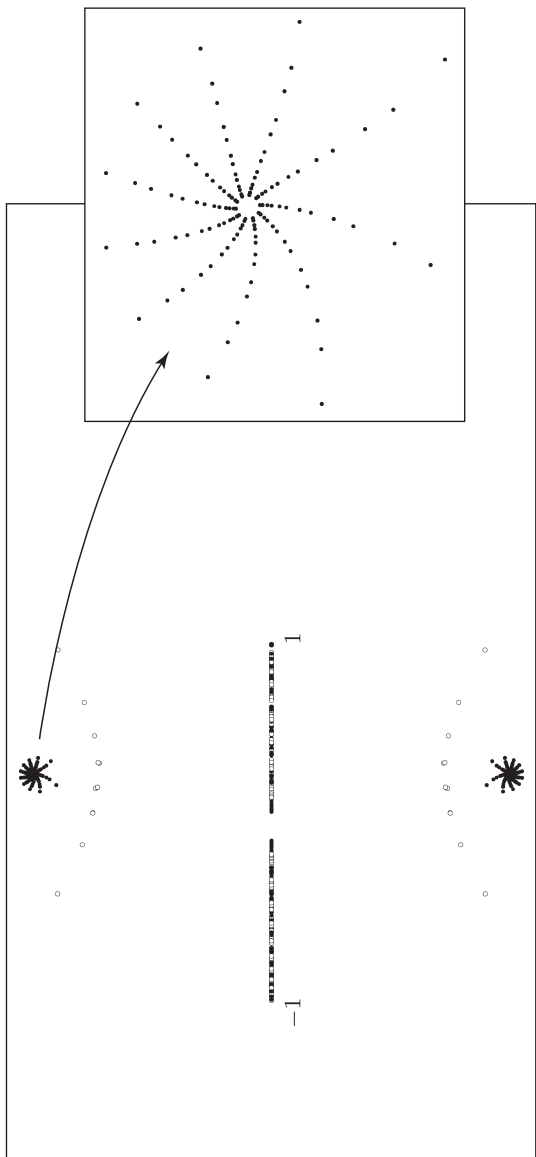


Рис. 7. Нули (белые кружки) и полюсы (черные кружки) диагональных аппроксимаций Паде f_{31}, \dots, f_{43} для функции $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$, где r – вещественная рациональная функция с двумя полюсами в точках $z = a$ и $z = \bar{a}$, $\text{Im } a > 0$, кратности 10 каждый. Основная часть нулей и полюсов функций f_{31}, \dots, f_{43} локализует отрезок $[-1, 1]$. Оставшиеся нули и полюсы f_{31}, \dots, f_{43} локализируют соответственно простые нули и два 10-кратных полюса функции f , расположенные в дополнении к отрезку $[-1, 1]$.

Рис. 8 (справа). Полюсы диагональных аппроксимаций Паде f_{31}, \dots, f_{43} , расположенные в малой окрестности 10-кратного полюса функции $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$.

§ 2. Формулировка основных результатов

1. Всюду в дальнейшем полагаем $\Delta = [-1, 1]$, $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$. Мы будем рассматривать здесь *класс функций* вида

$$f = \widehat{\rho} + r, \quad (13)$$

где⁶

$$\widehat{\rho}(z) := \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\rho(x)}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (14)$$

комплекснозначная функция ρ голоморфна на отрезке Δ и не обращается в нуль на этом отрезке, все полюсы комплексной рациональной функции r лежат в D и $r(\infty) = 0$. По традиции, восходящей к С. Н. Бернштейну [9], функцию ρ называют тригонометрическим весом; для краткости мы будем называть ρ просто *весом*. Очевидно, что класс функций (13) содержит функции вида (11) с $w = \sqrt{z^2 - 1}$ и $r_1 \neq 0, \infty$ на Δ . Тем самым, все результаты настоящей работы справедливы и для таких простейших алгебраических функций.

В основе доказательства теоремы 1 в работе [4] лежит формула сравнительной асимптотики полиномов $Q_n(z; \widehat{\sigma} + r)$ и $Q_n(z; \widehat{\sigma})$ вне отрезка Δ . Такая же формула (см. (20)) доказывается ниже для полиномов $Q_n(z; f)$ и $Q_n(z; \widehat{\rho})$ — знаменателей диагональных аппроксимаций Паде функций вида (13) и (14). Эта формула является ключевой при доказательстве теоремы 2 — аналога теоремы 1 — и уже сама может рассматриваться как формула сильной асимптотики для полиномов $Q_n(z; f)$, но только *внутри области* $D' = D \setminus \{\text{полюсы } f\}$. В настоящей работе для исследования сильной асимптотики полюсов диагональных аппроксимаций Паде функций вида $f = \widehat{\rho} + r$ в области D нам понадобится сильная асимптотика полиномов $Q_n(z; f)$ как *вне* отрезка Δ , так и *на* самом отрезке. Эти формулы сильной асимптотики будут получены в терминах, связанных с римановой поверхностью \mathfrak{X} : $w^2 = z^2 - 1$. Прежде чем формулировать основные результаты настоящей работы, приведем необходимые определения и обозначения, связанными с простейшими и хорошо известными конструкциями.

⁶Используемые нами обозначения $\widehat{\sigma}$ и $\widehat{\rho}$ для *меры* σ и *функции* ρ имеют разный смысл; ср. формулы (5) и (14). Однако из текста работы всегда ясно, какой из двух случаев имеется в виду.

Пусть \mathfrak{R} – риманова поверхность, заданная уравнением $w^2 = z^2 - 1$. Будем считать, что \mathfrak{R} реализована как двулистное разветвленное в точках $z = \pm 1$ накрытие расширенной комплексной плоскости $\hat{\mathbb{C}}$. Два листа \mathfrak{R} – это два экземпляра $\hat{\mathbb{C}}$, разрезанных по отрезку Δ и склеенных затем накрест так, что верхнему берегу одного отрезка соответствует нижний берег другого. Тем самым, над каждой точкой $\hat{\mathbb{C}}$ за исключением точек ветвления $z = \pm 1$ лежат ровно две точки римановой поверхности, а отрезку Δ соответствует на \mathfrak{R} замкнутый цикл Γ . Будем считать, что в $D = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ выбрана ветвь корня $\sqrt{z^2 - 1}$, удовлетворяющая условию $\sqrt{z^2 - 1}/z \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$. Функция $w: w^2 = z^2 - 1$ однозначна на \mathfrak{R} . Первым (открытым) листом $D^{(1)}$ поверхности \mathfrak{R} будем считать тот, на котором $w = \sqrt{z^2 - 1}$. На втором листе $D^{(2)}$ имеем: $w = -\sqrt{z^2 - 1}$. Для точек римановой поверхности \mathfrak{R} будем использовать обозначение $\mathbf{z} = (z, w)$, где $w = \pm\sqrt{z^2 - 1}$; при этом для точек первого листа $z^{(1)} = (z, \sqrt{z^2 - 1})$, а для точек второго $z^{(2)} = (z, -\sqrt{z^2 - 1})$. Область $D^{(1)}$ будем, как правило, отождествлять с “физической” областью D . Пусть $\Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ – функция, обратная к функции Жуковского. Тогда Φ однозначна в D и продолжается на всю риманову поверхность \mathfrak{R} как однозначная мероморфная функция, $\Phi(\mathbf{z}) = z + w \in \mathbb{C}(z, w)$, с дивизором $(\Phi) = \infty^{(2)} - \infty^{(1)}$.

Риманова поверхность \mathfrak{R} – нулевого рода, поэтому на \mathfrak{R} разрешим любой дивизор нулевой степени. Для дивизора вида $a^{(1)} - b^{(2)}$, где $a, b \in \mathbb{C} \setminus \Delta$, легко указать явно функцию $\Phi_{a,b} \in \mathbb{C}(z, w)$ такую, что $(\Phi_{a,b}) = a^{(1)} - b^{(2)}$:

$$\Phi_{a,b}(\mathbf{z}) = \frac{\Phi(\mathbf{z}) - \Phi(b)}{z - b} \frac{z - a}{1 - \Phi(a)\Phi(\mathbf{z})}; \quad (15)$$

при $a = \infty$ или $b = \infty$ формула для соответствующей функции $\Phi_{a,b}$ получается предельным переходом в (15). Очевидно, что произвольному дивизору нулевой степени на \mathfrak{R} будет соответствовать произведение функций вида (15).

Функции Грина $g_D(z, \infty) = \log |\Phi(z)|$ области D соответствует комплексная функция Грина $G_D(z, \infty) = g_D(z, \infty) + ig_D^*(z, \infty)$, где $g_D^*(z, \infty)$ – гармонически сопряженная к $g_D(z, \infty)$ функция. Функция $G(z) = G_D(z, \infty)$ имеет в бесконечно удаленной точке ветвление логарифмического характера, однозначна по модулю $2\pi i$ и представляется в виде

$$G(z) = \log \Phi(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}}, \quad \zeta \in D,$$

где интегрирование – по любому пути, лежащему в D .

Используемый здесь подход к изучению асимптотических свойств знаменателей диагональных аппроксимаций Паде $Q_n(z; f)$ основан на свойствах Ψ -функции, решающей специальную краевую задачу Римана на двулистной римановой поверхности \mathfrak{R} . Такой подход берет начало с работ Н. И. Ахиезера [10]–[12] и был затем развит в работах Дж. Наттолла [13], [14] и С. П. Суетина [15]–[17] прежде всего – с целью изучения вопросов сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций и их естественных обобщений. Отметим также работу А. И. Аптекарева [18], посвященную вопросам изучения сильной асимптотики рациональных аппроксимаций аналитических функций, где применяется метод, основанный, в частности, на свойствах решения краевой задачи Римана подобного типа.

Как правило, наиболее общее условие на вес ρ для применимости такого подхода – это условие Гёльдера. В настоящей работе для простоты мы изучаем случай, когда вес ρ – голоморфная функция на отрезке Δ ($\rho \in \mathcal{H}(\Delta)$).

2. Рассмотрим сначала ряд (1) для функции $f = \hat{\rho}$, где $\rho \in \mathcal{H}(\Delta)$ и $\rho(x) \neq 0$ на Δ . Зафиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим на римановой поверхности \mathfrak{R} следующую краевую задачу Римана.

ЗАДАЧА (\mathcal{R}_1). При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ найти функцию $\Psi = \Psi_n$ такую, что:

- 1°. Ψ (кусочно) мероморфна на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma = D^{(1)} \sqcup D^{(2)}$;
- 2°. дивизор $(\Psi) = n\infty^{(2)} - n\infty^{(1)}$;
- 3°. на Γ выполнено краевое условие: $\rho(x)\Psi(\mathbf{x}+) = \Psi(\mathbf{x}-)$.

Здесь под $\Psi(\mathbf{x}+)$ понимаются предельные значения функции $\Psi(\zeta)$ при $D^{(1)} \ni \zeta \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$. Аналогичный смысл придается и $\Psi(\mathbf{x}-)$.

Так как род \mathfrak{R} равен нулю и $\deg(\Psi) = 0$, то задача (\mathcal{R}_1) распадается на две независимые задачи, соответствующие п. 2° и п. 3°. Стандартными методами (см., например, [16]) доказывается, что такая функция Ψ всегда существует и определяется однозначно с точностью до мультипликативной постоянной. Нетрудно найти и явный вид этой функции:

$$\Psi(z) = \Phi(z)^n e^{S(z)} = e^{nG(z)+S(z)} \quad \text{при } \mathbf{z} = z^{(1)}, \quad (16)$$

где

$$S(z) = \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x)}{z - x} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (17)$$

– функция Сегё. Из свойств Ψ -функции вытекает, что

$$\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \text{const} \neq 0$$

при $z \in D$. Тем самым, это произведение продолжается как постоянная функция на всю комплексную плоскость $\widehat{\mathbb{C}}$. В дальнейшем нам удобно ввести следующую нормировку⁷: $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv 1$ при $z \in D$. Последнее соотношение в совокупности с (16), (17) приводит к явной формуле для Ψ -функции и при $\mathbf{z} = z^{(2)} \in D^{(2)}$.

При подходящей нормировке (подробнее см. ниже § 3, п. 3) полиномов $Q_n(z; \widehat{\rho})$ – знаменателей диагональных аппроксимаций Паде функции $f = \widehat{\rho}$ – их сильная асимптотика как вне отрезка Δ , так и на этом отрезке описывается в терминах Ψ -функции следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть комплекснозначная функция ρ голоморфна и не обращается в нуль на отрезке Δ , Ψ – решение задачи (\mathcal{R}_1) при $n \in \mathbb{N}$. Тогда при подходящей нормировке полиномов $Q_n(z; \widehat{\rho})$ имеем:

- 1°. $Q_n(z; \widehat{\rho}) = \Psi(z)(1 + o(1))$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно внутри D ;
- 2°. $Q_n(x; \widehat{\rho}) = \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно на Δ .

Здесь $\Psi(z) = \Psi(z^{(1)})$, под $\Psi^+(x)$ ($\Psi^-(x)$) понимаются верхние (соответственно нижние) предельные значения Ψ на Δ ; величина $o(1) = o(\delta^n)$, где $\delta < 1$. Из п. 2° задачи (\mathcal{R}_1) вытекает, что функция Ψ , решающая эту задачу, имеет в бесконечно удаленной точке $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ полюс n -го порядка. Поэтому в силу п. 1° предложения 1 для всех достаточно больших n степень полинома $Q_n(z; \widehat{\rho})$ равна n , т.е. все такие индексы нормальны. Непосредственно из представления (16) для Ψ -функции вытекает, что существует

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Psi(z)}{z^n} = \varkappa_n, \quad \text{где } \varkappa_n = 2^n e^{S(\infty)} \neq 0. \quad (18)$$

⁷Таким условием Ψ -функция определяется однозначно с точностью до знака \pm . В дальнейшем мы уточним правило выбора знака.

Тем самым, формула сильной асимптотики из п. 1° задает следующую естественную нормировку полиномов Q_n :

$$Q_n(z; \hat{\rho}) = \varkappa_n z^n + \dots,$$

где $\varkappa_n \neq 0$ задано (18). Наконец, из п. 2° вытекает, что

$$\int_{\Delta} Q_n^2(x; \hat{\rho}) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2 + o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (19)$$

а если вес ρ положителен на Δ , то равномерно на Δ

$$Q_n(x; \hat{\rho}) = \frac{2}{\sqrt{\rho(x)}} \cos(n \arccos x + \theta(x)) + o(1),$$

где

$$\theta(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(t) - \log \rho(x)}{x-t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad o(1) = o(\delta^n).$$

Предложение 1 и его следствия хорошо известны (см., например, [13] и [14]). В §3 настоящей работы для полноты изложения приводится его независимое доказательство (ср. с доказательством теоремы 2.1 в [14]).

3. Прежде чем переходить непосредственно к вопросу о сильной асимптотике полиномов $Q_n(z; f)$, $f = \hat{\rho} + r$, сформулируем аналог теоремы 1 для изучаемого нами случая.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f = \hat{\rho} + r$, где комплекснозначная функция ρ голоморфна и не обращается в нуль на отрезке Δ , все полюсы комплексной рациональной функции r лежат в области D и $r(\infty) = 0$. Тогда последовательность диагональных аппроксимаций Паде $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к f равномерно в сферической метрике внутри области D .

Тем самым, к каждому полюсу функции f в D стремится ровно столько полюсов f_n , какова его кратность. При этом если a – полюс f кратности $\mu \geq 1$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a - \zeta_{j,n}(a)|^{1/n} \leq \frac{1}{|\Phi(a)|^{2/\mu}} < 1, \quad j = 1, \dots, \mu;$$

здесь $\Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ – функция, обратная к функции Жукковского, $\zeta_{j,n}(a)$, $j = 1, \dots, \mu$, – полюсы f_n , перенумерованные в порядке неубывания их расстояния до точки a .

Доказательство теоремы 2 проводится (см. ниже § 4) по той же схеме, что и доказательство теоремы 1 в работе [4]; в частности, утверждение об асимптотике полюсов f_n в D немедленно следует из полученной в § 4 формулы *сравнительной асимптотики* для подходящим образом нормированных полиномов $Q_n(z; \widehat{\rho})$ и $Q_n(z; \widehat{\rho} + r)$, которая выполняется равномерно внутри D :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} \frac{Q_n(z; \widehat{\rho} + r)}{Q_n(z; \widehat{\rho})} = \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{\Phi(z) - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(z)\Phi(a_j)} \right)^{m_j}, \quad (20)$$

где $\Lambda = \Lambda(f)$ – последовательность нормальных индексов для $f = \widehat{\rho} + r$, a_1, \dots, a_ℓ – полюсы f в D , m_1, \dots, m_ℓ – их кратности, $m = \sum_{j=1}^{\ell} m_j$ – полное число полюсов f в D . Соотношение (20) является ключевым и при доказательстве теоремы 2; с учетом предложения 1 оно само уже может рассматриваться как формула сильной асимптотики для полиномов $Q_n(z; f)$, но – по *подпоследовательности* нормальных индексов Λ и только *внутри* области $D' = D \setminus \{a_1, \dots, a_\ell\}$. Для доказательства основного результата работы (см. ниже теорему 3) нам, во-первых, надо показать, что все достаточно далекие индексы n нормальны, а во-вторых, установить формулу сильной асимптотики для полиномов $Q_n(z; f)$ не только внутри D' , но и *на отрезке* Δ , и, в конечном счете, *в окрестности полюсов* функции f в D . Для этого мы применим подход, основанный, как и в случае полиномов $Q_n(z; \widehat{\rho})$, на свойствах Ψ -функции, решающей специальную краевую задачу Римана на римановой поверхности \mathfrak{R} . Подчеркнем, что сильную асимптотику $Q_n(z; f)$ можно выразить непосредственно в терминах этой Ψ -функции только *внутри области* $D' = D \setminus \{a_1, \dots, a_\ell\}$ и *на отрезке* Δ . Зато, пользуясь этими результатами, мы затем найдем сильную асимптотику тех нулей $Q_n(z; f)$ (т.е. полюсов f_n), которые стремятся к полюсам f в D . Полученные в итоге формулы (см. ниже формулы (22₁)–(22₃)) и следует *в совокупности* рассматривать как формулы сильной асимптотики для $Q_n(z; f)$.

Рассмотрим на римановой поверхности \mathfrak{R} следующую краевую задачу Римана.

ЗАДАЧА (\mathcal{R}_2). При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ найти функцию $\Psi = \Psi_n$ такую, что:

- 1°. Ψ (кусочно) мероморфна на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma = D^{(1)} \sqcup D^{(2)}$;
- 2°. дивизор $(\Psi) = n\infty^{(2)} + m_1 a_1^{(1)} + \dots + m_\ell a_\ell^{(1)} - m_1 a_1^{(2)} - \dots - m_\ell a_\ell^{(2)} - n\infty^{(1)}$;
- 3°. на Γ выполнено краевое условие: $\rho(x)\Psi(\mathbf{x}+) = \Psi(\mathbf{x}-)$.

(Здесь предполагается, что все точки $a_j \in \mathbb{C} \setminus \Delta$, $j = 1, \dots, \ell$.)

Подчеркнем еще раз, что непосредственно в терминах Ψ -функции, решающей задачу (\mathcal{R}_2), оказывается возможным описать сильную асимптотику $Q_n(z, f)$ как на отрезке Δ , так и внутри области $D' = D \setminus \{a_1, \dots, a_\ell\}$.

Так как в рассматриваемом здесь случае род римановой поверхности \mathfrak{R} равен нулю и $\deg(\Psi) = 0$, то задача (\mathcal{R}_2), как и задача (\mathcal{R}_1), распадается на независимые задачи, соответствующие п. 2° и п. 3°. Каждая из них решается явно в терминах, связанных с \mathfrak{R} . Таким образом, решение задачи (\mathcal{R}_2) всегда существует, единственно (с точностью до мультипликативной постоянной) и может быть найдено в явном виде. Зависимость Ψ -функции от n связана только с условием 2°. Нетрудно увидеть, что при $z \in D$ функция $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \text{const}$, где $\text{const} \neq 0$. В дальнейшем нам удобно как обычно положить $\text{const} = 1$, т.е. нормировать Ψ -функцию (как и ранее, с точностью до знака \pm) стандартным условием

$$\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv 1.$$

Приведем явный вид решения задачи (\mathcal{R}_2) при $\mathbf{z} = z^{(1)} \in D^{(1)}$:

$$\Psi(z) = \Phi(z)^n e^{S(z)} \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{\Phi(z) - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j)\Phi(z)} \right)^{m_j} = e^{nG(z)+S(z)} \Pi_m(z), \quad (21)$$

где $S(z)$ – функция Серё (17).

В терминах Ψ -функции, решающей задачу (\mathcal{R}_2), асимптотическое поведение полиномов $Q_n(z; f)$ описывается следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть в условиях теоремы 2 точки a_1, \dots, a_ℓ – полюсы f в D , m_1, \dots, m_ℓ – их кратности, Ψ – решение задачи (\mathcal{R}_2) при $n \in \mathbb{N}$. Тогда при подходящей нормировке полиномов $Q_n(z; f)$ имеем:

$$1^\circ. Q_n(z; f) = \Psi(z)(1+o(1)) \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно внутри } D', \quad (22_1)$$

$$2^\circ. Q_n(x; f) = \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1) \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно на } \Delta, \quad (22_2)$$

где $D' = D \setminus \{a_1, \dots, a_\ell\}$, величина $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta < 1$.

Непосредственно из п. 1° этого предложения и свойств Ψ -функции, решающей задачу (\mathcal{R}_2) , вытекает, что $\deg Q_n(z; f) = n$ для достаточно больших n , т.е. для функции f все достаточно большие индексы n нормальны.

Полученная в п. 2° предложения 2 формула сильной асимптотики полиномов $Q_n(x; f)$ на отрезке Δ лежит в основе доказательства следующего утверждения об асимптотическом поведении полюсов f_n вне отрезка Δ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть в условиях теоремы 2 точка $a_j \in D$ – полюс функции f кратности $m_j \geq 1$, $a_{j,\nu}(n)$, $\nu = 1, \dots, m_j$, – соответствующие точке a_j при $n \rightarrow \infty$ полюсы f_n . Тогда

$$a_{j,\nu}(n) = a_j + \frac{C_j \varepsilon_j^\nu}{B_j^{2n}} (1+o(\delta^n)) \text{ при } n \rightarrow \infty, \nu = 1, \dots, m_j, \quad (22_3)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_j &= e^{2\pi i/m_j}, \\ B_j &= \Phi(a_j)^{1/m_j} = |\Phi(a_j)|^{1/m_j} e^{ig^*(a_j)/m_j}, \\ C_j &= e^{-2S(a_j)/m_j} \left(-\frac{2G'(a_j)}{A_j \alpha_j} \right)^{1/m_j} \\ &\quad \times \frac{(-2)^{m/m_j} \Phi(a_j)^{m/m_j} \prod_{s=1}^{\ell} \Phi(a_s)^{m_s/m_j}}{\prod_{s=1}^{\ell} (1 - \Phi(a_s)\Phi(a_j))^{2m_s/m_j}}; \end{aligned}$$

комплексные постоянные A_j и α_j , $j = 1, \dots, \ell$, конечны, отличны от нуля и зависят только от f .

Здесь $g^*(z) = g_D^*(z, \infty)$ – функция, сопряженная к функции Грина $g_D(z, \infty)$ области D , $G(z) = G_D(z, \infty)$ – комплексная функция Грина; $S(z)$ – функция Сегё.

Постоянная C_j связана с геометрическим расположением j -го полюса a_j функции f относительно отрезка Δ и других полюсов f ; величина $1/B_j$ характеризует (геометрическую) скорость

сходимости полюсов f_n к точке a_j и не зависит от других полюсов f ; наличие множителя ε_j , $\varepsilon_j^{m_j} = 1$, обеспечивает то асимптотически правильное расположение m_j полюсов f_n по отношению к притягивающей точке a_j , о котором говорилось во введении. Непосредственно из (22₃) вытекает, что при каждом $j = 1, \dots, \ell$ существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_j - a_{j,\nu}(n)|^{1/n} = \frac{1}{|\Phi(a_j)|^{2/m_j}}, \quad \nu = 1, \dots, m_j;$$

тем самым, в правой части (10) указан правильный показатель скорости сходимости полюсов f_n к полюсам f в D .

Из теоремы 3 вытекают следующие результаты.

СЛЕДСТВИЕ 1. *В классе функций вида $f = \hat{\rho} + r$, где функция ρ голоморфна и не обращается в нуль на отрезке Δ , а все полюсы комплексной рациональной функции r лежат в области D и $r(\infty) = 0$, справедлива импликация*

$$\begin{aligned} (f - f_n)(z) &= \frac{A}{z^{2n+1}} + \dots \\ &\quad \downarrow \\ (f - f_n)(z) &= \frac{2G'(z)}{\Psi(z)^2} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (23)$$

равномерно внутри D' ,

где f_n , $n \in \mathbb{N}$, – рациональная функция порядка не выше n , $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta < 1$.

Соотношение (23) приводит к формуле сильной асимптотики для последовательности $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$:

$$f_n(z) = f(z) - \frac{2G'(z)}{\Psi(z)^2} (1 + o(1))$$

равномерно внутри D' при $n \rightarrow \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть в условиях теоремы 2 вес ρ положителен на Δ , а рациональная функция r вещественна. Тогда для всех достаточно больших n все полюсы диагональных аппроксимаций Паде функции $f = \hat{\rho} + r$ простые.*

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть в условиях теоремы 2 вес $\rho > 0$ на Δ , $f = \hat{\rho} + r$, $r \in \mathbb{R}(z)$. Тогда равномерно на Δ

$$Q_n(x; f) = \frac{2}{\sqrt{\rho(x)}} \cos(n \arccos x + \theta(x) + \alpha(x)) + o(\delta^n), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(t) - \log \rho(x)}{x-t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \\ \cos \alpha(x) &= \frac{1}{2} \left\{ \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{e^{i \arccos x} - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j) e^{i \arccos x}} \right)^{m_j} \right. \\ &\quad \left. + \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{e^{-i \arccos x} - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j) e^{-i \arccos x}} \right)^{m_j} \right\}. \end{aligned}$$

В заключение сделаем общее замечание относительно используемого здесь метода, основанного на свойствах Ψ -функции – решении специальной краевой задачи Римана. Такая задача рассматривается при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ (см. задачи (\mathcal{R}_1) и (\mathcal{R}_2)), а ее решение находится в явном виде в терминах римановой поверхности \mathfrak{R} и веса ρ (см. (16) и (21)). Отсюда следует, что этот метод пригоден и для нахождения формул сильной асимптотики в случае переменного (т.е. зависящего от n) веса $\rho = \rho_n$: в явную формулу для Ψ -функции вместо веса ρ_n надо подставить выражение, описывающее его зависимость от n (см. [18]). Кроме того, метод оказывается применим и в случае, когда в (5) носитель S меры σ состоит из нескольких отрезков (подробнее см. ниже § 7).

§ 3. Доказательство предложения 1

1. Пусть Ψ – решение задачи (\mathcal{R}_1) при некотором $n \in \mathbb{N}$, полином $Q_n(z) = Q_n(z; \hat{\rho})$, $\deg Q_n \leq n$, $Q_n \not\equiv 0$, удовлетворяет соотношению

$$R_n(z; \hat{\rho}) := (Q_n \hat{\rho} - P_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

где $\deg P_n \leq n - 1$, $R_n(z) = R_n(z; \hat{\rho})$ – функция остатка.

Определим на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ функцию F следующим образом:

$$F(\mathbf{z}) = \Psi(\mathbf{z}) \cdot \begin{cases} R_n(z)w(z), & \mathbf{z} = z^{(1)} \in D^{(1)}, \\ -2Q_n(z), & \mathbf{z} = z^{(2)} \in D^{(2)}; \end{cases} \quad (24)$$

нетрудно видеть, что F (кусочно) голоморфна в $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$.

Используя свойства Ψ -функции как решения задачи (\mathcal{R}_1) и свойства функции остатка R_n на границе отрезка Δ : $R_n^+(x) - R_n^-(x) = -2Q_n(x)\rho(x)/w^+(x)$, получаем следующее краевое условие для F на кривой Γ :

$$F(\zeta+) - F(\zeta-) = \chi(\zeta-) \frac{1}{\rho(\zeta)}, \quad \zeta \in \Gamma, \quad (25)$$

где функция $\chi(\mathbf{z}) = \Psi(\mathbf{z})R_n(z)w(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(2)}$, голоморфна на втором листе⁸. При этих условиях F стандартным образом [20, § 8, формула (8.16)] восстанавливается в $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ по граничным условиям (25) интегралом типа Коши:

$$F(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \chi(\zeta-) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta; \mathbf{z}) + C_n, \quad \mathbf{z} \notin \Gamma, \quad (26)$$

где C_n – некоторая постоянная,

$$d\Omega(\zeta; \mathbf{z}) = \frac{1}{2} \frac{w(\zeta) + w(\mathbf{z})}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{w(\zeta)} \quad (27)$$

– мероморфный на \mathfrak{R} абелев дифференциал, который имеет полюсы только в точках \mathbf{z} , $\infty^{(1)}$, $\infty^{(2)}$ с вычетами 1 , $-1/2$, $-1/2$ соответственно, а контур Γ^+ ориентирован положительно относительно области $D^{(1)}$: область остается слева при обходе по контуру. Интегральное представление (26) лежит в основе дальнейших рассуждений.

2. Пусть сначала $\mathbf{z} = z^{(1)} \in D^{(1)}$. Выберем числа $R > 1$ и $\varepsilon > 0$ так, чтобы функции χ и $1/\rho$ были бы голоморфны в области $\{z^{(2)} : 1 < |\Phi(z)| < R + \varepsilon\}$. Тогда (при $\mathbf{z} = z^{(1)}$) в интегральном представлении (26) контур Γ можно заменить на контур

⁸Как и ранее, под $F(\zeta+)$ здесь понимаются предельные значения функции $F(\mathbf{z})$ при $D^{(1)} \ni \mathbf{z} \rightarrow \zeta \in \Gamma$. Аналогичный смысл придается $F(\zeta-)$ и $\chi(\zeta-)$.

$\Gamma_R^{(2)} = \{z^{(2)} : |\Phi(z)| = R\}$, целиком лежащий на втором листе $D^{(2)}$. Воспользуемся теперь тем, что

$$\chi(z^{(2)}) = \Psi(z^{(2)})R_n(z)w(z^{(2)}) = -F(z^{(1)})\frac{\Psi(z^{(2)})}{\Psi(z^{(1)})} = -\frac{F(z^{(1)})}{\Psi(z^{(1)})^2}$$

и $d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(1)}) = d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)})$ (см. (27)). Тогда из (26) получаем следующее представление для функции F :

$$\begin{aligned} F(z^{(1)}) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(2)}} \chi(\zeta^{(2)}) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(1)}) + C_n \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(1)}} \frac{F(\zeta^{(1)})}{\Psi(\zeta^{(1)})^2 \rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)}) + C_n, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\Gamma_R^{(1)} = \{\zeta^{(1)} : |\Phi(\zeta)| = R\}$. При $\zeta^{(1)} \in \Gamma_R^{(1)}$ дифференциал (27) имеет вид:

$$d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)}) = \frac{1}{2} \frac{w(\zeta) - w(z)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{w(\zeta)};$$

следовательно, это – голоморфный по переменной $z^{(2)}$ в области $D^{(2)}$ дифференциал. Более того, дифференциал $d\Omega(\zeta^{(1)}; \mathbf{z})$ – голоморфный по \mathbf{z} на компакте $D^{(2)} \sqcup \Gamma$ при $\zeta^{(1)} \in \Gamma_R^{(1)}$. Поэтому представление (28) справедливо⁹ при $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$. Из (28) получаем, что равномерно на компакте $D^{(1)} \sqcup \Gamma$

$$|F(\mathbf{z}) - C_n| = M_n \max_{\Gamma_R^{(1)}} \frac{1}{|\Psi(\zeta^{(1)})|^2} O(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (29)$$

где $M_n = \max_{\Gamma_R^{(1)}} |F(\zeta^{(1)})|$. Следовательно, равномерно по $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$

$$|F(\mathbf{z}) - C_n| = M_n \cdot O(\delta^n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (30)$$

где $\delta = 1/R^2 < 1$. Так как $F(z^{(1)}) \not\equiv 0$ (см. (24)), то $M_n \neq 0$, поэтому, применяя (30) сначала к компакту $\Gamma_R^{(1)} \subset D^{(1)}$, а затем

⁹Интегральная формула (28) задает аналитическое продолжение функции $F(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(1)}$, через контур Γ на второй лист римановой поверхности \mathfrak{R} вплоть до контура $\Gamma_R^{(2)}$, причем для $\mathbf{z} \in D^{(2)}$ это продолжение, вообще говоря, не совпадает с функцией $F(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(2)}$, определенной в (24); ср. с доказательством теоремы 2.1 в [14].

к компакту $D^{(1)} \sqcup \Gamma$, последовательно получаем:

$$\begin{aligned} M_n &= |C_n|(1 + O(\delta^n)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \\ F(\mathbf{z}) &= C_n(1 + O(\delta^n)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \\ &\quad \text{равномерно по } \mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma. \end{aligned} \quad (31)$$

3. Пусть теперь $\mathbf{z} = z^{(2)} \in D^{(2)}$. Тогда из (26) вытекает, что при $z^{(2)} \in D_R^{(2)} = \{z^{(2)} : |\Phi(z)| > R\}$

$$\begin{aligned} F(z^{(2)}) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(2)}} \chi(\zeta^{(2)}) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(2)}) + C_n \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(1)}} \frac{F(\zeta^{(1)})}{\Psi(\zeta^{(1)})^2 \rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(1)}) + C_n; \end{aligned} \quad (32)$$

здесь мы воспользовались тем, что $d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(2)}) = d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(1)})$. Дифференциал $d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(1)})$ – голоморфный по $z^{(1)} \in D_R^{(1)}$ при $\zeta^{(1)} \in \Gamma_R^{(1)}$. Используя свойства Ψ -функции и полученное выше асимптотическое представление (31) для функции $F(z^{(1)})$, получаем из (32) аналог соотношения (31) для $F(z^{(2)})$ при $n \rightarrow \infty$:

$$F(z^{(2)}) = C_n(1 + O(\delta_1^n)) \quad (33)$$

равномерно внутри $D_R^{(2)}$, где $\delta_1 < 1$. Отсюда и из определения (24) функции F вытекает, что равномерно внутри D_R справедливо представление

$$2Q_n(z) = -\frac{C_n}{\Psi(z^{(2)})} (1 + o(1)) = -C_n \Psi(z)(1 + o(1)), \quad (34)$$

$$\text{где } o(1) = O(\delta_1^n), \quad \delta_1 < 1.$$

Напомним, что

$$\frac{\Psi(z)}{z^n} \rightarrow \varkappa_n \quad \text{при } z \rightarrow \infty,$$

где $\varkappa_n = 2^n \exp\{S(\infty)\} \neq 0$, т.е. Ψ имеет в точке $z = \infty$ полюс n -го порядка. Так как постоянная $C_n \neq 0$ при достаточно больших n (см. (31)), то $\deg Q_n = n$, т.е. все достаточно далекие индексы n нормальны. Выбор постоянной $C_n \neq 0$ связан только с нормировкой Q_n . Положим $C_n = -2$. В таком случае асимптотическая формула (34) для полиномов Q_n вне отрезка Δ примет вид:

$$Q_n(z) = \Psi(z)(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (35)$$

где $o(1) = O(\delta^n)$, $\delta < 1$.

4. Вернемся теперь к соотношению $F(\mathbf{z}) = C_n(1 + o(1)) = -2 + o(1)$, которое справедливо равномерно на компакте $D^{(1)} \sqcup \Gamma$ и, следовательно, равномерно на Γ . Из этого соотношения в силу определения функции F вытекает, что равномерно по $x \in \Delta$

$$\begin{aligned} \Psi^+(x)R_n^+(x)w^+(x) &= -2 + o(1), \\ \Psi^-(x)R_n^-(x)w^-(x) &= -2 + o(1) \end{aligned} \quad n \rightarrow \infty.$$

Так как $\Psi^+(x) \neq 0$ и $\Psi^-(x) \neq 0$ на Δ , то

$$\begin{aligned} R_n^+(x)w^+(x) &= -\frac{2}{\Psi^+(x)}(1 + o(1)), \\ R_n^-(x)w^-(x) &= -\frac{2}{\Psi^-(x)}(1 + o(1)), \end{aligned} \quad n \rightarrow \infty.$$

Суммируя два последних соотношения, получаем

$$R_n^+(x)w^+(x) + R_n^-(x)w^-(x) = -\frac{2}{\Psi^+(x)} - \frac{2}{\Psi^-(x)} + o(1). \quad (36)$$

Поскольку $R_n^+(x) - R_n^-(x) = -2Q_n(x)\rho(x)/w^+(x)$ при $x \in \Delta$, то

$$R_n^+(x)w^+(x) + R_n^-(x)w^-(x) = -2Q_n(x)\rho(x). \quad (37)$$

Объединяя соотношения (36) и (37), получаем, что

$$Q_n(x)\rho(x) = \frac{1}{\Psi^+(x)} + \frac{1}{\Psi^-(x)} + o(1).$$

Так как $\rho(x)\Psi^+(x)\Psi^-(x) \equiv 1$ при $x \in \Delta$, то

$$Q_n(x) = \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1)$$

равномерно по $x \in \Delta$, где $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta < 1$.

Предложение 1 доказано.

§ 4. Доказательство теоремы 2

1. Схема доказательства теоремы 1, предложенная в [4] для *положительной меры* σ , является достаточно общей и при условии существования сильной асимптотики (35) позволяет получить аналог теоремы 1 для *комплексного веса* ρ . Ниже мы приводим доказательство теоремы 2, следуя в целом схеме рассуждений работы [4].

В этом параграфе мы будем придерживаться следующего соглашения при обозначении полюсов функции f в D : $a_j, j = 1, \dots, \ell$, – попарно различные полюсы f кратностей $m_j \geq 1$ соответственно, $m = \sum_{j=1}^{\ell} m_j$ – полное число полюсов f в D с учетом их кратностей.

Пусть функция $f = \widehat{\rho} + r$, где

$$\widehat{\rho}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\rho(x)}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (38)$$

$$r(z) = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{j,k}}{(k-1)!} \frac{1}{(z-a_j)^k}, \quad (39)$$

здесь $A_{j,m_j} \neq 0$.

Так как для функции $\widehat{\rho}$ все достаточно далекие индексы n нормальны, то $\deg Q_n(z; \widehat{\rho}) = n$ при $n \geq n_0$. Временно в пределах этого параграфа нам удобно, *сохранив обозначения, перейти к другой нормировке полиномов $Q_n(z; \widehat{\rho})$ и считать, что $Q_n(z; \widehat{\rho}) = z^n + \dots$ при $n \geq n_0$* . С учетом представления (16) функции Ψ нетрудно видеть, что формула сильной асимптотики (35) для полиномов Q_n сохранится, если мы соответствующим образом изменим и нормировку самой Ψ -функции, точнее, в правой части представления (16) $\Phi(z)$ заменим на $\Phi(z)/2$ и умножим эту правую часть на $\exp\{-S(\infty)\}$ (и, тем самым, нормируем Ψ -функцию условием $\Psi(z)/z^n \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$).

Аналогичное соглашение в пределах этого параграфа будет действовать и относительно полиномов $Q_n(z; f)$: *если $\Lambda = \{n_k\}$ – последовательность нормальных индексов для функции f , то $Q_n(z; f) = z^n + \dots$ при $n \in \Lambda$* . Напомним, что последовательность $\Lambda = \{n_k\}$ разбивает натуральный ряд чисел на множества $\Lambda_k = \{n : n_k \leq n < n_{k+1}\}$ такие, что $f_n = f_{n_k}$ для $n \in \Lambda_k$. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ существует единственная пара полиномов P_n, Q_n (степени $\leq n$) такая, что: а) справедливо соотношение (4), б) полиномы P_n и Q_n не имеют общих нулей и с) старший коэффициент полинома Q_n равен 1. Всюду в этом параграфе через $P_n = P_n(f)$ и $Q_n = Q_n(f)$ обозначаются полиномы, удовлетворяющие условиям а)–с); будем называть их числителем и знаменателем рациональной функции $f_n, n \in \mathbb{N}$.

Всюду в дальнейшем мы придерживаемся этих соглашений и, кроме того, для краткости полагаем: $L_n(z) := Q_n(z; \widehat{\rho}) = z^n + \dots$

при $n \geq n_0$, $Q_n(z) := Q_n(z; f)$; тем самым, $Q_n(z) = z^n + \dots$ при $n \in \Lambda$.

С учетом сказанного из предложения 1 вытекают следующие формулы сильной асимптотики для полиномов L_n при $n \rightarrow \infty$:

$$L_n(z) = \left(\frac{\Phi(z)}{2} \right)^n e^{S(z) - S(\infty)} (1 + o(1)) \quad (40)$$

равномерно внутри D ,

$$L_n(x) = \left(\frac{\Phi^+(x)}{2} \right)^n e^{S^+(x) - S(\infty)} + \left(\frac{\Phi^-(x)}{2} \right)^n e^{S^-(x) - S(\infty)} + o(1)$$

равномерно на Δ . (41)

Отметим несколько фактов относительно полиномов L_n , ортогональных на отрезке Δ с весом ρ , которые вытекают из (40), (41) и будут использоваться нами в дальнейшем. Пусть U – произвольная окрестность отрезка Δ вида $U = U_\varepsilon = \{z : g_D(z, \infty) < \varepsilon\}$. Из формулы сильной асимптотики (40) для L_n вытекает, что для достаточно больших n все нули L_n и их производных лежат внутри U . В дальнейшем будем считать, что $\varepsilon > 0$ выбрано так, что все полюсы функции f лежат в $D \setminus \bar{U}$.

Из формулы (41) легко вытекает, что $L_n(x) = 2^{-n} \cdot O(1)$ равномерно на Δ и

$$\int_{\Delta} L_n^2(x) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2^{1-2n} e^{-2S(\infty)} (1 + o(1)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

(ср. с (19)).

Исходя из этих свойств полиномов L_n легко доказать следующие утверждения (аналоги лемм 2–5 из [4]).

(i) *Равномерно внутри D справедливо соотношение*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+\mu}}{L_n}(z) = \left(\frac{\Phi(z)}{2} \right)^\mu, \quad (42)$$

где μ – произвольное натуральное число.

(ii) *Для любых натуральных μ и ν , $\mu < \nu < n$, и любого $K \Subset \mathbb{C} \setminus \bar{U}$ имеют место оценки*

$$c_1 n^{\nu-\mu} < \left| \frac{L_n^{(\nu)}}{L_n^{(\mu)}}(z) \right| < c_2 n^{\nu-\mu}, \quad z \in K, \quad (43)$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 < +\infty$ не зависят от n .

(iii) Для любых натуральных μ и ν равномерно внутри D имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+\mu}^{(\nu)}}{L_n^{(\nu)}}(z) = \left(\frac{\Phi(z)}{2} \right)^\mu. \quad (44)$$

(iv) Для любых целых неотрицательных μ и ν и любого $a \in D$ имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|L_{n+\mu}\|_\Delta}{|L_n^{(\nu)}(a)|} \right)^{1/n} = \frac{1}{|\Phi(a)|}, \quad (45)$$

где $\|\cdot\|_\Delta$ – sup-норма на Δ .

Из определяющего рациональную дробь f_n соотношения (4) для $f = \hat{\rho} + r$ легко вытекает, что для любого полинома q , $\deg q \leq n - 1$, имеем

$$\int_\Delta Q_n(x)q(x) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{m_j} A_{j,k} (Q_n(z)q(z))^{(k-1)} \Big|_{z=a_j} = 0 \quad (46)$$

(напомним, что $Q_n(z) := Q_n(z; f)$). Всюду в дальнейшем считаем, что $n > m$. Полагая $\omega_m(z) = \prod_{j=1}^{\ell} (z - a_j)^{m_j}$, $q(z) = \omega_m(z)z^\nu$, получим из (46) следующие соотношения “квазиортогональности” для полинома $(Q_n\omega_m)(z)$, $\deg(Q_n\omega_m) \leq n + m$:

$$\int_\Delta Q_n(x)\omega_m(z)z^\nu \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n - m - 1. \quad (47)$$

Так как все достаточно далекие индексы n для функции $\hat{\rho}$ нормальны, то $\deg L_n = n$ при $n \geq n_0$. Отсюда, из ортогональности L_n с весом ρ на Δ и соотношений квазиортогональности (47) для Q_n вытекает, что $\deg Q_n \geq n - 2m$ при всех $n \geq n_0 + m$. Это означает, что для последовательности $\Lambda = \{n_k\}$ нормальных индексов для функции f имеем:

$$n_{k+1} - n_k \leq 2m + 1 \quad \text{при} \quad n_k \geq n_0 + m. \quad (48)$$

Дальнейшие рассуждения (в пп. 2–4) проводятся для нормальных индексов.

2. Наша ближайшая цель – доказательство следующего утверждения (формулы сравнительной асимптотики), аналогично лемме 1 из [4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Равномерно внутри области D справедливо соотношение*

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} \frac{Q_n}{L_n}(z) = \frac{\prod_{j=1}^{\ell} (\Phi(z) - \Phi(a_j))^{2m_j}}{2^m \Phi^m(z) \prod_{j=1}^{\ell} (z - a_j)^{m_j}}. \quad (49)$$

Пусть $n \in \Lambda$, $S_{n+m}(z) = (Q_n \omega_m)(z) = z^{n+m} + \dots$. Тогда

$$\int_{\Delta} S_{n+m}(x) x^{\nu} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-m-1.$$

Так как для всех достаточно далеких индексов $\deg L_n = n$, то из этих соотношений вытекает, что полином S_{n+m} представляется в следующем виде:

$$S_{n+m} = L_{n+m} + \lambda_{n,1} L_{n+m-1} + \dots + \lambda_{n,2m} L_{n-m}, \quad (50)$$

где параметры $\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{n,2m}$ неизвестны. Ниже мы получим $2m$ соотношений, которые позволят исключить эти параметры из представления (50).

Первые m соотношений немедленно следуют из определения полинома S_{n+m} :

$$S_{n+m}(a_j) = S'_{n+m}(a_j) = \dots = S_{n+m}^{(m_j-1)}(a_j) = 0, \quad j = 1, \dots, \ell. \quad (51)$$

Получим еще одну группу из m соотношений.

Зафиксируем $j \in \{1, \dots, \ell\}$ и положим

$$S_{n+m}(z) \cdot (z - a_j)^{-m_j} = S_{n+m,j}(z) = b_{n,j}^{(0)} + b_{n,j}^{(1)}(z - a_j) + \dots \quad (52)$$

(степень этого полинома равна $n + m - m_j$). Подставив теперь полином $\omega_m(z)/(z - a_j)^{\nu}$, $\nu = 1, \dots, m_j$, в соотношение (46), получим

$$\int_{\Delta} \frac{S_{n+m}(x)}{(x - a_j)^{\nu}} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{k=1}^{m_j} A_{j,k} (S_{n+m,j}(z)(z - a_j)^{m_j - \nu})^{(k-1)} \Big|_{z=a_j} = 0.$$

Отсюда вытекает система уравнений

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta} \frac{S_{n+m}(x)}{x-a_j} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} + (m_j-1)! A_{j,m_j} b_{n,j}^{(0)} = 0, \\ & \int_{\Delta} \frac{S_{n+m}(x)}{(x-a_j)^2} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} + (m_j-2)! A_{j,m_j-1} b_{n,j}^{(0)} \\ & \quad + (m_j-1)! A_{j,m_j} b_{n,j}^{(1)} = 0, \\ & \dots\dots\dots \\ & \int_{\Delta} \frac{S_{n+m}(x)}{(x-a_j)^{m_j}} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} + A_{j,1} b_{n,j}^{(0)} + \dots \\ & \quad + (m_j-1)! A_{j,m_j} b_{n,j}^{(m_j-1)} = 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно $b_{n,j}^{(0)}, b_{n,j}^{(1)}, \dots, b_{n,j}^{(m_j-1)}$ (напомним, что величины $A_{j,m_j} \neq 0$, см. (39)), получим набор из m_j полиномов $p_{j,1}, \dots, p_{j,m_j}$ (второй индекс равен степени полинома) таких, что

$$\begin{aligned} & m_j! b_{n,j}^{(0)} + \int_{\Delta} S_{n+m}(x) p_{j,1} \left(\frac{1}{x-a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \\ & (m_j+1)! b_{n,j}^{(1)} + \int_{\Delta} S_{n+m}(x) p_{j,2} \left(\frac{1}{x-a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \\ & \dots\dots\dots \\ & (2m_j-1)! b_{n,j}^{(m_j-1)} + \int_{\Delta} S_{n+m}(x) p_{j,m_j} \left(\frac{1}{x-a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что полиномы $p_{j,\nu}$, $1 \leq \nu \leq m_j$, не зависят от n ; они полностью определяются главной частью разложения функции f в точке $z = a_j$. Учитывая (52), последнюю систему равенств можно переписать так:

$$\begin{aligned} & S_{n+m}^{(m_j)}(a_j) + \int_{\Delta} S_{n+m}(x) p_{j,1} \left(\frac{1}{x-a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \\ & S_{n+m}^{(m_j+1)}(a_j) + \int_{\Delta} S_{n+m}(x) p_{j,2} \left(\frac{1}{x-a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \tag{53} \\ & \dots\dots\dots \\ & S_{n+m}^{(2m_j-1)}(a_j) + \int_{\Delta} S_{n+m}(x) p_{j,m_j} \left(\frac{1}{x-a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Совокупность таких систем (53) для всех $j = 1, 2, \dots, \ell$ содержит m соотношений.

3. Положим

$$\delta_n(j, \mu, \nu) = \frac{1}{L_{n-m}^{(m_j-1+\nu)}(a_j)} \int_{\Delta} L_{n-m+\mu}(x) p_{j,\nu} \left(\frac{1}{x-a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (54)$$

где $j = 1, \dots, \ell$, $\nu = 1, \dots, m_j$, $\mu = 0, 1, \dots, 2m$. Функции

$$p_{j,\nu} \left(\frac{1}{z-a_j} \right)$$

голоморфны в окрестности отрезка Δ , а полиномы $p_{j,\nu}$ не зависят от n . С учетом свойств (i)–(iv) полиномов L_n , получаем из (54):

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\delta_n(j, \mu, \nu)|^{1/n} \leq \frac{1}{|\Phi(a_j)|} < 1.$$

Пусть $\delta < 1$ таково, что $1/|\Phi(a_j)| < \delta < 1$ при каждом $j = 1, \dots, \ell$. Тогда для любой тройки индексов j, μ, ν , меняющихся в указанных выше пределах, имеем

$$\delta_n(j, \mu, \nu) = o(\delta^n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (55)$$

Подставим в соотношения (53) разложение (50); после очевидных преобразований, учитывая (55), получим

$$\begin{aligned} & \frac{L_{n+m}}{L_{n-m}}(a_j) + \lambda_{n,1} \frac{L_{n+m-1}}{L_{n-m}}(a_j) + \dots + \lambda_{n,2m} = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & \frac{L_{n+m}^{(m_j-1)}}{L_{n-m}^{(m_j-1)}}(a_j) + \lambda_{n,1} \frac{L_{n+m-1}^{(m_j-1)}}{L_{n-m}^{(m_j-1)}}(a_j) + \dots + \lambda_{n,2m} = 0, \quad (56) \\ & \frac{L_{n+m}^{(m_j)}}{L_{n-m}^{(m_j)}}(a_j) + o(\delta^n) + \lambda_{n,1} \left(\frac{L_{n+m-1}^{(m_j)}}{L_{n-m}^{(m_j)}}(a_j) + o(\delta^n) \right) + \dots \\ & \quad + \lambda_{n,2m}(1 + o(\delta^n)) = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & \frac{L_{n+m}^{(2m_j-1)}}{L_{n-m}^{(2m_j-1)}}(a_j) + o(\delta^n) + \lambda_{n,1} \left(\frac{L_{n+m-1}^{(2m_j-1)}}{L_{n-m}^{(2m_j-1)}}(a_j) + o(\delta^n) \right) + \dots \\ & \quad + \lambda_{n,2m}(1 + o(\delta^n)) = 0, \end{aligned}$$

где $j = 1, 2, \dots, \ell$. Во второй группе из m_j соотношений мы заменили на $o(\delta^n)$ выражения вида (54).

При $n \rightarrow \infty$ в каждом из уравнений (56) строка коэффициентов имеет один и тот же предел, а именно строку

$$\left(\frac{1}{2}\Phi(a_j)\right)^{2m}, \left(\frac{1}{2}\Phi(a_j)\right)^{2m-1}, \dots, 1$$

(см. свойства (i)–(iv)). Преобразуем теперь систему (56) так, чтобы в пределе получались линейно независимые строки.

С помощью формулы Лейбница получаем

$$\frac{L_{n+m-\mu}^{(\nu)}}{L_{n-m}^{(\nu)}} = \left(\frac{L_{n+m-\mu}}{L_{n-m}}\right)^{(\nu)} \frac{L_{n-m}}{L_{n-m}^{(\nu)}} - \sum_{k=1}^{\nu} F_{n-m}(\nu, k) \frac{L_{n+m-\mu}^{(\nu-k)}}{L_{n-m}^{(\nu-k)}}, \quad (57)$$

где

$$F_{n-m}(\nu, k) = \binom{\nu}{k} \frac{L_{n-m} L_{n-m}^{(\nu-k)}}{L_{n-m}^{(\nu)}} \left(\frac{1}{L_{n-m}}\right)^{(k)},$$

$\mu = 0, 1, \dots, 2m - 1$; подчеркнем, что $F_{n-m}(\nu, k)$ не зависит от μ . Пользуясь соотношениями (43) и (44), нетрудно показать, что для любого $a \in D$ справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_{n-m}(\nu, k)(a)|^{1/n} \leq 1. \quad (58)$$

Пусть $C > 1$ таково, что $\delta_1 = C\delta < 1$. В силу (58) для любой тройки индексов j, ν, k , меняющихся в пределах $j = 1, \dots, \ell$, $\nu = 1, \dots, 2m_j - 1$, $k = 1, \dots, \nu$, имеем

$$F_{n-m}(\nu, k)(a_j) = O(C^n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (59)$$

Введем следующие обозначения:

$$\varphi_{n,\mu} = \frac{L_{n+m-\mu}}{L_{n-m}}, \quad \mu = 0, 1, \dots, 2m; \quad \varphi = \frac{\Phi}{2}. \quad (60)$$

В силу (42) равномерно внутри D выполняются соотношения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n,\mu}(z) = \varphi^{2m-\mu}(z), \quad \mu = 0, 1, \dots, 2m; \quad (61)$$

тем самым, и последовательные производные функций $\varphi_{n,\mu}$ равномерно внутри D сходятся к соответствующим производным функций $\varphi^{2m-\mu}$.

Прибавим теперь к ν -й строке системы (56) линейную комбинацию предшествующих строк с коэффициентами, определяемыми равенством (57) в точке a_j . Тогда, учитывая (для $\nu \geq m_j$) соотношение (59), получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} \varphi_{n,0}^{(\nu)}(a_j) + \lambda_{n,1}\varphi_{n,1}^{(\nu)}(a_j) + \dots + \lambda_{n,2m}\varphi_{n,2m}^{(\nu)}(a_j) &= 0, \\ \nu &= 0, 1, \dots, m_j - 1; \\ \varphi_{n,0}^{(\nu)}(a_j) \frac{L_{n-m}}{L_{n-m}^{(\nu)}}(a_j) + o(\delta_1^n) & \\ + \lambda_{n,1} \left(\varphi_{n,1}^{(\nu)}(a_j) \frac{L_{n-m}}{L_{n-m}^{(\nu)}}(a_j) + o(\delta_1^n) \right) + \dots & \\ + \lambda_{n,2m} \left(\varphi_{n,2m}^{(\nu)}(a_j) \frac{L_{n-m}}{L_{n-m}^{(\nu)}}(a_j) + o(\delta_1^n) \right) &= 0, \\ \nu &= m_j, m_j + 1, \dots, 2m_j - 1. \end{aligned}$$

Умножая ν -е уравнение (для $\nu \geq m_j$) на $L_{n-m}^{(\nu)}(a_j)/L_{n-m}(a_j)$ и учитывая соотношения (43) (т.е. степенной рост этого множителя при $\nu = m_j, \dots, 2m_j - 1$), окончательно получаем систему

$$\begin{aligned} \varphi_{n,0}(a_j) + \lambda_{n,1}\varphi_{n,1}(a_j) + \dots + \lambda_{n,2m} \cdot 1 &= 0, \\ \dots & \\ \varphi_{n,0}^{(m_j-1)}(a_j) + \lambda_{n,1}\varphi_{n,1}^{(m_j-1)}(a_j) + \dots + \lambda_{n,2m} \cdot 0 &= 0, \quad (62) \\ \varphi_{n,0}^{(m_j)}(a_j) + o(1) + \lambda_{n,1}(\varphi_{n,1}^{(m_j)}(a_j) + o(1)) + \dots & \\ + \lambda_{n,2m} \cdot o(1) &= 0, \\ \dots & \\ \varphi_{n,0}^{(2m_j-1)}(a_j) + o(1) + \lambda_{n,1}(\varphi_{n,1}^{(2m_j-1)}(a_j) + o(1)) + \dots & \\ + \lambda_{n,2m} \cdot o(1) &= 0, \end{aligned}$$

где $j = 1, 2, \dots, \ell$.

4. Обозначим через Δ_n^0 определитель при неизвестных $\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,2m}$ этой системы. Учитывая соотношение (61), получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^0 = \Delta^0 = \begin{vmatrix} \varphi^{2m-1}(a_j) & \varphi^{2m-2}(a_j) & \dots & 1 \\ (\varphi^{2m-1})'(a_j) & (\varphi^{2m-2})'(a_j) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi^{2m-1})^{(2m_j-1)}(a_j) & (\varphi^{2m-2})^{(2m_j-1)}(a_j) & \dots & 0 \end{vmatrix}_{j=1, \dots, \ell}.$$

Символ, стоящий в правой части этого равенства, обозначает определитель порядка $2m$, в котором последовательно выписываются указанные группы строк для $j = 1, 2, \dots, \ell$. Поскольку φ – однолистная функция в области D , определитель Δ^0 отличен от нуля (величина этого определителя нам не понадобится). Следовательно, $\Delta_n^0 \neq 0$ при достаточно больших $n \geq n_0$.

Добавим теперь к системе (62) соотношение

$$\varphi_{n,0}(z) + \lambda_{n,1}\varphi_{n,1}(z) + \dots + \lambda_{n,2m} = \frac{S_{n+m}}{L_{n-m}}(z), \quad z \in D,$$

и исключим из этого соотношения (с помощью системы (62)) неизвестные $\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,2m}$. Получим

$$\frac{S_{n+m}}{L_{n-m}}(z) = \frac{\Delta_n(z)}{\Delta_n^0}, \quad z \in D, \quad n \geq n_0,$$

где

$$\Delta_n(z) = \begin{vmatrix} \varphi_{n,0}(z) & \varphi_{n,1}(z) & \dots & 1 \\ \varphi_{n,0}(a_j) & \varphi_{n,1}(a_j) & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n,0}^{(m_j-1)}(a_j) & \varphi_{n,1}^{(m_j-1)}(a_j) & \dots & 0 \\ \varphi_{n,0}^{(m_j)}(a_j) + o(1) & \varphi_{n,1}^{(m_j)}(a_j) + o(1) & \dots & o(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n,0}^{(2m_j-1)}(a_j) + o(1) & \varphi_{n,1}^{(2m_j-1)}(a_j) + o(1) & \dots & o(1) \end{vmatrix}_{j=1, \dots, \ell}.$$

Следовательно (напомним, что $n \in \Lambda$),

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} \frac{S_{n+m}}{L_{n-m}}(z) = \mathcal{P}(z) = \frac{\Delta(z)}{\Delta^0}, \quad z \in D, \quad (63)$$

где

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} \varphi^{2m}(z) & \varphi^{2m-1}(z) & \dots & 1 \\ \varphi^{2m}(a_1) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ \varphi^{2m}(a_\ell) & \dots & \Delta^0 & \dots \end{vmatrix}; \quad (64)$$

переход к пределу в (63) – равномерный внутри D . Функция $\mathcal{P}(z)$ – полином от $\varphi(z)$ степени $2m$ со старшим коэффициентом

при $\varphi^{2m}(z)$, равным 1 (см. (50)). Учитывая характер нулей этой функции, получаем

$$\mathcal{P}(z) = \prod_{j=1}^{\ell} (\varphi(z) - \varphi(a_j))^{2m_j}. \quad (65)$$

Следовательно, принимая во внимание (60), (65) и введенное ранее обозначение $S_{n+m} = Q_n \omega_m$, имеем:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} \frac{Q_n}{L_{n-m}}(z) = \frac{\prod_{j=1}^{\ell} (\Phi(z) - \Phi(a_j))^{2m_j}}{2^{2m} \omega_m(z)}, \quad z \in D; \quad (66)$$

сходимость – равномерная внутри D . Последнее соотношение эквивалентно (49). Предложение 3 доказано.

Отметим, что в силу легко проверяемого тождества

$$\frac{\Phi(z) - \Phi(a)}{z - a} = -\frac{2\Phi(z)\Phi(a)}{1 - \Phi(z)\Phi(a)}$$

соотношение (49) эквивалентным образом переписывается в виде:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} \frac{Q_n(z)}{L_n(z)} = \text{const} \cdot \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{\Phi(z) - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(z)\Phi(a_j)} \right)^{m_j}, \quad (67)$$

где $\text{const} = (-1)^m / \prod_{j=1}^{\ell} \Phi^{m_j}(a_j)$.

5. Функция, стоящая в правой части соотношения (49), голоморфна в области D ; множество ее нулей совпадает (с учетом их кратностей) с множеством полюсов функции f в D . Отсюда и из теоремы Руше получаем утверждение теоремы 2 для последовательности нормальных индексов $\Lambda = \{n_k\}$; структура последовательности $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такова (см. § 1, п. 2), что тем самым это утверждение оказывается справедливым и для всех индексов.

Ниже мы используем следующее соотношение, вытекающее из (63):

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} |S_{n+m}(z)|^{1/n} = \frac{1}{2} |\Phi(z)|, \quad z \in D' \quad (68)$$

(переход к пределу – равномерный внутри D').

Докажем утверждение о скорости сходимости функций f_n к f и полюсов f_n к полюсам f . Пусть $n \in \Lambda$, $n > m$; из (4) получаем

$$(\widehat{\rho} + r - f_n)(z) = (\widehat{\rho} - \tau_n)(z) = \frac{A}{z^{2n+1}} + \dots; \quad (69)$$

здесь $\tau_n = f_n - r$ – рациональная функция порядка $n + m$, знаменатель которой есть $Q_n \omega_m = S_{n+m}$. Соотношение (69) означает, что эта рациональная функция интерполирует голоморфную в области D функцию $\widehat{\rho}$ в точке $z = \infty$ до порядка $2n + 1 > n + m$.

Фиксируем произвольный компакт $K \subset D'$; из утверждения теоремы 2 следует, что для достаточно больших n все нули полинома S_{n+m} лежат вне компакта K . Для любого $R > 1$ положим $\Gamma_R = \{z : |\Phi(z)| = R\}$; пусть R столь близко к 1, что K лежит во внешности Γ_R . С помощью формулы Эрмита из (69) получаем

$$(f - f_n)(z) = (\widehat{\rho} - \tau_n)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{S_{n+m}(t)q(t)\widehat{\rho}(t) dt}{S_{n+m}(z)q(z)(t-z)}, \quad z \in K,$$

где q – произвольный полином степени $\leq n - m$. Выберем $q = L_{n-m}$. Тогда, используя (68) и свойства полиномов $\{L_n\}$, получаем оценку

$$\|f - f_n\|_K < C \left(\frac{R + \varepsilon}{R(K) - \varepsilon} \right)^{2n},$$

где $\|\cdot\|$ – суп-норма, $R(K) = \inf\{|\Phi(z)| : z \in K\}$, $\varepsilon > 0$ – произвольно, $n > n(\varepsilon)$, $n \in \Lambda$, C не зависит от n . Следовательно,

$$\overline{\lim}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} \|f - f_n\|_K^{1/2n} \leq \frac{R + \varepsilon}{R(K) - \varepsilon};$$

устремляя ε к нулю и R к единице, получаем отсюда

$$\overline{\lim}_{n \in \Lambda} \|f - f_n\|_K^{1/2n} \leq \frac{1}{R(K)} < 1. \quad (70)$$

Вновь учитывая структуру последовательности $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и неравенство (48) для нормальных индексов, получаем из (70) следующее утверждение о скорости сходимости функций f_n к f :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_K^{1/2n} \leq \frac{1}{R(K)} < 1.$$

Отсюда уже легко вытекает, что если $a \in D$ – полюс f кратности $\mu \geq 1$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a - \zeta_{j,n}(a)|^{1/n} \leq \frac{1}{|\Phi(a)|^{2/\mu}} < 1, \quad j = 1, \dots, \mu$$

(как обычно, $\zeta_{j,n}(a)$, $j = 1, \dots, \mu$, – полюсы f_n , перенумерованные в порядке неубывания их расстояния до точки a).

§ 5. Доказательство предложения 2

1. Существование и единственность решения задачи (\mathcal{R}_2) доказываются стандартным способом (см. [16]): в предположении, что решение существует, находится его явный вид. Непосредственно проверяется, что полученная в итоге функция является решением краевой задачи. Для *доказательства* предложения 2 нам понадобится рассмотреть и решить несколько более общую, чем (\mathcal{R}_2) , краевую задачу.

Пусть $a_j, b_j \in \mathbb{C} \setminus \Delta$, $j = 1, \dots, m$, – произвольные необязательно различные точки.

ЗАДАЧА (\mathcal{R}_3) . При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ найти функцию $\psi = \psi_n$ такую, что:

- 1°. ψ (кусочно) мероморфна на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma = D^{(1)} \sqcup D^{(2)}$;
- 2°. дивизор $(\psi) = n\infty^{(2)} + a_1^{(1)} + \dots + a_m^{(1)} - b_1^{(2)} - \dots - b_m^{(2)} - n\infty^{(1)}$;
- 3°. на Γ выполнено краевое условие: $\rho(x)\psi(\mathbf{x}+) = \psi(\mathbf{x}-)$.

Непосредственно из условий этой задачи вытекает, что

$$\psi(z^{(1)})\psi(z^{(2)}) \equiv \text{const} \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (z - a_j)}{\prod_{j=1}^m (z - b_j)}$$

при $z \in D$, где $\text{const} \neq 0$. Как и ранее, будем придерживаться той нормировки ψ -функции, которая даст $\text{const} = 1$. Решение задачи (\mathcal{R}_3) понадобится нам в ситуации, когда $b_j = a_{j,n} \rightarrow a_j$ при $n \rightarrow \infty$, $j = 1, \dots, m$. Отметим, что среди точек a_1, \dots, a_m в п. 2° задачи (\mathcal{R}_3) могут встречаться совпадающие; аналогичное замечание относится и к точкам b_1, \dots, b_m . В дальнейшем в пределах этого параграфа подобного соглашения нам будет удобно придерживаться и относительно полюсов функции f : *каждый полюс f в D выписывается столько раз, какова его кратность*.

Найти явный вид решения задачи (\mathcal{R}_3) не составляет труда: риманова поверхность \mathfrak{X} – нулевого рода, поэтому любой дивизор вида $a^{(1)} - b^{(2)}$ разрешим: существует функция $\Phi_{a,b}$, мероморфная на \mathfrak{X} и такая, что $(\Phi_{a,b}) = a^{(1)} - b^{(2)}$ (см. (15)). Для ψ -функции $\deg(\psi) = 0$, поэтому задача (\mathcal{R}_3) разбивается на несколько независимых задач, соответствующих пп. 2° и 3°.

Функция $\Phi(\mathbf{z}) = z + w$ мероморфна на \mathfrak{X} , дивизор $(\Phi) = \infty^{(2)} - \infty^{(1)}$ и $\Phi(z^{(1)})\Phi(z^{(2)}) \equiv 1$ при $z \in D$. Пусть $a, b \in \mathbb{C} \setminus \Delta$ – произвольные точки, $\lambda \neq 0$ – комплексная постоянная. Функция

$$\Phi_{a,b}(\mathbf{z}) = \lambda \frac{\Phi(\mathbf{z}) - \Phi(b)}{z - b} \frac{z - a}{1 - \Phi(a)\Phi(\mathbf{z})} \quad (71)$$

– однозначная мероморфная функция на \mathfrak{X} с дивизором $(\Phi_{a,b}) = a^{(1)} - b^{(2)}$. Положим $\lambda = \lambda(a, b) = \sqrt{\Phi(a)/\Phi(b)}$. Тогда $\Phi_{a,b}(z^{(1)}) \times \Phi_{a,b}(z^{(2)}) \equiv (z - a)/(z - b)$ при $z \in D$. Функции вида (71) потребуются нам только в ситуации, когда a фиксировано, а $b \rightarrow a$. Исходя из этого условия выберем в представлении для λ ветвь корня так, что $\lambda(a, b) = 1 + o(1)$ при $b \rightarrow a$; очевидно, что $o(1)$ определяется скоростью стремления $b \rightarrow a$: $o(1) = O(|a - b|)$.

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{z}) &= \Phi(\mathbf{z})^n \prod_{j=1}^m \Phi_{a_j, b_j}(\mathbf{z}) \\ &= \Phi(\mathbf{z})^n \prod_{j=1}^m \lambda(a_j, b_j) \frac{\Phi(\mathbf{z}) - \Phi(b_j)}{z - b_j} \frac{z - a_j}{1 - \Phi(a_j)\Phi(\mathbf{z})}. \end{aligned}$$

Функция \mathcal{F} мероморфна на \mathfrak{X} , дивизор $(\mathcal{F}) = n\infty^{(2)} - n\infty^{(1)} + \sum_{j=1}^m a_j^{(1)} - \sum_{j=1}^m b_j^{(2)}$ и $\mathcal{F}(\mathbf{x}+) = \mathcal{F}(\mathbf{x}-)$ на Γ . Тем самым, $(\mathcal{F}) = (\psi)$ и для функции $H(\mathbf{z}) = \psi(\mathbf{z})/\mathcal{F}(\mathbf{z})$ имеем: $(H) = 0$, т.е. H голоморфна и отлична от нуля в $\mathfrak{X} \setminus \Gamma$, а на Γ выполняется краевое условие $\rho(x)H(\mathbf{x}+) = H(\mathbf{x}-)$. Отсюда с учетом выбранных нормировок функций ψ и \mathcal{F} :

$$\mathcal{F}(z^{(1)})\mathcal{F}(z^{(2)}) \equiv \frac{(z - a_1) \cdots (z - a_m)}{(z - b_1) \cdots (z - b_m)},$$

получаем, что $H(z^{(1)})H(z^{(2)}) \equiv 1$ при $z \in D$. С учетом этого соотношения из краевого условия для функции H на Γ вытекает, что $\rho(x)H^+(x)H^-(x) \equiv 1$ при $x \in \Delta$.

Таким образом, функция $H(z) = H(z^{(1)})$ голоморфна и отлична от нуля в D и удовлетворяет условию: $\rho(x)H^+(x)H^-(x) \equiv 1$ при $x \in \Delta$. Тогда функция $u(z) = \frac{\log H(z)}{w(z)}$ однозначно определена и голоморфна в D , $u(\infty) = 0$ и

$$u^+(x) - u^-(x) = -\frac{\log \rho(x)}{w^+(x)} = i \frac{\log \rho(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

при $x \in \Delta$. Следовательно, для u справедливо следующее представление интегралом типа Коши:

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x)}{x-z} \frac{dx}{w^+(x)} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x)}{x-z} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x)}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Тем самым, произведение $w(z)u(z) = S(z)$ – функция Сегё для веса ρ . Отсюда вытекает, что

$$H(z) = e^{w(z)u(z)} = e^{S(z)} = \exp \left\{ \frac{\sqrt{z^2-1}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x)}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right\}.$$

В итоге для ψ -функции, решающей задачу (\mathcal{R}_3) , получаем следующее представление при $\mathbf{z} \in \mathfrak{R} \setminus \Gamma$:

$$\psi(\mathbf{z}) = \mathcal{F}(\mathbf{z})H(\mathbf{z}), \quad (72)$$

где

$$\begin{aligned} H(z^{(1)}) &= \exp \left\{ \frac{\sqrt{z^2-1}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x)}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right\}, \\ H(z^{(2)}) &\equiv \frac{1}{H(z^{(1)})}, \\ \mathcal{F}(z^{(1)}) &= \Phi(z)^n \prod_{j=1}^m \lambda(a_j, b_j) \frac{\Phi(z) - \Phi(b_j)}{z - b_j} \frac{z - a_j}{1 - \Phi(a_j)\Phi(z)}, \\ \mathcal{F}(z^{(2)}) &\equiv \frac{\prod_{j=1}^m (z - a_j)}{\prod_{j=1}^m (z - b_j) \cdot \mathcal{F}(z^{(1)})}. \end{aligned} \quad (73)$$

Из полученного представления вытекает, что $\psi(z)/z^n \rightarrow \varkappa_n$ при $z \rightarrow \infty$, где

$$\begin{aligned} \varkappa_n &= 2^n e^{S(\infty)} \prod_{j=1}^m \frac{\lambda(a_j, b_j)}{(-\Phi(b_j))} \\ &= 2^n \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} \right\} \prod_{j=1}^m \frac{\lambda(a_j, b_j)}{(-\Phi(b_j))} \neq 0, \end{aligned}$$

т.е. ψ имеет в точке $z = \infty$ полюс n -го порядка. Непосредственно проверяется, что полученная функция ψ является решением задачи (\mathcal{R}_3) . Отметим также следующее свойство этой функции, которое понадобится нам в дальнейшем:

$$\rho(x)\psi^+(x)\psi^-(x) \equiv \prod_{j=1}^m \frac{x-a_j}{x-b_j} \quad \text{при } x \in \Delta. \quad (74)$$

Наконец, при $b_j = a_j$, $j = 1, \dots, m$, полученные результаты прямо приводят к Ψ -функции, решающей задачу (\mathcal{R}_2) :

$$\Psi(\mathbf{z}) = \mathcal{F}(\mathbf{z})H(\mathbf{z}), \quad (75)$$

где $H(\mathbf{z})$ определяется условиями (73), а

$$\mathcal{F}(z^{(1)}) = \Phi(z)^n \prod_{j=1}^m \frac{\Phi(z) - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j)\Phi(z)}, \quad \mathcal{F}(z^{(2)}) \equiv \frac{1}{\mathcal{F}(z^{(1)})}, \quad (76)$$

при этом $\rho(x)\Psi^+(x)\Psi^-(x) \equiv 1$ при $x \in \Delta$ и $\Psi(z)/z^n \rightarrow \varkappa_n$ при $z \rightarrow \infty$, где

$$\varkappa_n = \frac{2^n e^{S(\infty)}}{\prod_{j=1}^m (-\Phi(a_j))} \neq 0,$$

т.е. Ψ имеет в точке $z = \infty$ полюс n -го порядка.

2. Рассуждения этого пункта основаны на свойствах ψ -функции. Всюду здесь предполагается, что в условии 2° задачи (\mathcal{R}_3) точки a_j , $j = 1, \dots, m$, — полюсы¹⁰ функции f в D , $b_j = a_{j,n}$ — полюсы рациональной дроби f_n , соответствующие полюсам f в D

¹⁰Напомним, что в этом параграфе мы придерживаемся следующего соглашения: каждый полюс или нуль функции выписывается столько раз, какова его кратность.

при $n \rightarrow \infty$ и занумерованные так, что $a_{j,n} \rightarrow a_j$ при $n \rightarrow \infty$ для $j = 1, \dots, m$. Тем самым дивизор $(\psi) = n\infty^{(2)} + a_1^{(1)} + \dots + a_m^{(1)} - a_{1,n}^{(2)} - \dots - a_{m,n}^{(2)} - n\infty^{(1)}$, а соответствующие $\lambda = \lambda(a_j, b_j) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ с геометрической скоростью (см. § 2, п. 3). Положим $\omega_m(z) = \prod_{j=1}^m (z - a_j)$, $\omega_{n,m}(z) = \prod_{j=1}^m (z - a_{j,n})$.

Определим на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ функцию F следующим образом:

$$F(\mathbf{z}) = \psi(\mathbf{z}) \cdot \begin{cases} R_n(z)w(z), & \mathbf{z} = z^{(1)} \in D^{(1)}, \\ -2Q_n(z), & \mathbf{z} = z^{(2)} \in D^{(2)}. \end{cases} \quad (77)$$

Опираясь на свойства функции ψ в $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$, нетрудно увидеть, что функция F (кусочно) голоморфна в $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$. Как будет показано ниже, все достаточно большие индексы n нормальны для функции $f = \hat{\rho} + r$ и для таких n дивизор $(F) = 0$.

Используя свойства ψ -функции на кривой Γ и следующее свойство функции остатка R_n на границе отрезка Δ : $R_n^+(x) - R_n^-(x) = -2Q_n(x)\rho(x)/w^+(x)$, получаем краевое условие для F на Γ :

$$F(\zeta+) - F(\zeta-) = \chi(\zeta-) \frac{1}{\rho(\zeta)}, \quad \zeta \in \Gamma, \quad (78)$$

где функция $\chi(\mathbf{z}) = \psi(\mathbf{z})R_n(z)w(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(2)}$, мероморфна на втором листе. В таком случае F стандартным образом (см. [19], [16]) восстанавливается в $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ по граничным условиям (78) интегралом типа Коши:

$$F(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \chi(\zeta-) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta; \mathbf{z}) + C_n, \quad \mathbf{z} \notin \Gamma, \quad (79)$$

где C_n – некоторая постоянная,

$$d\Omega(\zeta; \mathbf{z}) = \frac{1}{2} \frac{w(\zeta) + w(\mathbf{z})}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{w(\zeta)} \quad (80)$$

– мероморфный на \mathfrak{R} абелев дифференциал, а контур Γ^+ ориентирован положительно относительно области $D^{(1)}$: область остается слева при обходе по контуру. Как обычно, дальнейшие рассуждения основаны на интегральном представлении (79).

Пусть сначала $\mathbf{z} = z^{(1)} \in D^{(1)}$. Выберем числа $R > 1$ и $\varepsilon > 0$ так, чтобы функции χ и $1/\rho$ были бы голоморфны в области

$\{z^{(2)} : 1 < |\Phi(z)| < R + \varepsilon\}$. Тогда в интегральном представлении (79) контур Γ можно заменить на контур $\Gamma_R^{(2)} \subset D^{(2)}$. Воспользовавшись тем, что

$$\begin{aligned}\chi(z^{(2)}) &= \psi(z^{(2)})R_n(z)w(z^{(2)}) = -F(z^{(1)})\frac{\psi(z^{(2)})}{\psi(z^{(1)})} \\ &= -F(z^{(1)})\frac{\omega_m(z)/\omega_{m,n}(z)}{\psi(z^{(1)})^2}\end{aligned}$$

и $d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(1)}) = d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)})$, получаем из (79) следующее представление для функции F :

$$\begin{aligned}F(z^{(1)}) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(2)}} \chi(\zeta^{(2)}) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(1)}) + C_n \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(1)}} F(\zeta^{(1)}) \frac{\omega_m(z)/\omega_{m,n}(z)}{\psi(\zeta^{(1)})^2} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)}) + C_n,\end{aligned}\tag{81}$$

где $\Gamma_R^{(1)} = \{z^{(1)} : |\Phi(z)| = R\}$. Так как дифференциал $d\Omega(\zeta^{(1)}; \mathbf{z})$ – голоморфный по \mathbf{z} на компакте $D^{(2)} \sqcup \Gamma$ при $\zeta^{(1)} \in \Gamma_R^{(1)}$, то последнее интегральное представление¹¹ справедливо равномерно на компакте $D^{(1)} \sqcup \Gamma$. Из (81) получаем, что равномерно по $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$

$$|F(\mathbf{z}) - C_n| = M_n \max_{\Gamma_R} \frac{1}{|\psi(\zeta^{(1)})|^2} O(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $M_n = \max_{\Gamma_R^{(1)}} |F(\zeta^{(1)})|$. Используя свойства ψ -функции, получаем отсюда, что равномерно по $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$

$$|F(\mathbf{z}) - C_n| = M_n \cdot O(\delta^n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,\tag{82}$$

где $\delta = 1/R^2 < 1$. Так как $F(z^{(1)}) \not\equiv 0$, то $M_n \neq 0$, поэтому из (82) последовательно получаем: $M_n = |C_n|(1 + O(\delta^n))$ и

$$F(z^{(1)}) = C_n(1 + O(\delta^n)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty\tag{83}$$

равномерно по $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$.

¹¹Как и ранее, интегральная формула (81) задает аналитическое продолжение функции $F(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(1)}$, через контур Γ на второй лист римановой поверхности \mathfrak{R} вплоть до контура $\Gamma_R^{(2)}$, причем для $\mathbf{z} \in D^{(2)}$ это продолжение, вообще говоря, не совпадает с функцией $F(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(2)}$, определенной (77).

Пусть теперь $\mathbf{z} = z^{(2)} \in D^{(2)}$. Тогда из (79) вытекает, что при $z^{(2)} \in D_R^{(2)} = \{z^{(2)} : |\Phi(z)| > R\}$

$$\begin{aligned} F(z^{(2)}) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(2)}} \chi(\zeta^{(2)}) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(2)}) + C_n \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(1)}} F(\zeta^{(1)}) \frac{\omega_m(z)/\omega_{m,n}(z)}{\psi(\zeta^{(1)})^2} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(1)}) + C_n. \end{aligned} \quad (84)$$

Дифференциал $d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(1)})$ – голоморфный по $z^{(1)} \in D_R^{(1)}$ при $\zeta^{(1)} \in \Gamma_R^{(1)}$. Используя свойства ψ -функции и полученное выше асимптотическое представление (83) для функции $F(\mathbf{z})$, получаем из (84) аналог соотношения (83) для $F(z^{(2)})$ при $n \rightarrow \infty$:

$$F(z^{(2)}) = C_n(1 + O(\delta^n)) \quad (85)$$

равномерно внутри $D_R^{(2)}$, $\delta < 1$. Непосредственно из определения (77) функции F вытекает, что равномерно внутри D_R , $R > 1$, справедливо представление

$$2Q_n(z) = -C_n \frac{1}{\psi(z^{(2)})} (1 + o(1)), \quad \text{где } o(1) = O(\delta^n), \quad \delta < 1.$$

Так как в силу (83) постоянная $C_n \neq 0$ при достаточно больших n , то $\deg Q_n = n$, т.е. все такие индексы нормальны. Выбор постоянной $C_n \neq 0$ связан только с нормировкой Q_n , поэтому в дальнейшем положим $C_n = -2$. В таком случае асимптотическая формула для полиномов Q_n вне отрезка Δ примет вид:

$$Q_n(z) = \frac{1}{\psi(z^{(2)})} (1 + o(1)) = \psi(z) \prod_{j=1}^m \frac{\omega_{m,n}(z)}{\omega_m(z)} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

или, окончательно,

$$Q_n(z) \frac{\omega_m(z)}{\omega_{m,n}(z)} = \psi(z) (1 + o(1)) \quad (86)$$

равномерно внутри D при $n \rightarrow \infty$.

Вернемся теперь к соотношению

$$F(\mathbf{z}) = C_n(1 + o(1)) = -2 + o(1),$$

которое справедливо равномерно на компакте $D^{(1)} \sqcup \Gamma$. Из этого соотношения в силу определения функции F вытекает, что равномерно по $x \in \Delta$

$$\begin{aligned} \psi^+(x)R^+(x)w^+(x) &= -2 + o(1), \\ \psi^-(x)R^-(x)w^-(x) &= -2 + o(1), \end{aligned} \quad n \rightarrow \infty.$$

Так как $\psi^+(x) \neq 0$ и $\psi^-(x) \neq 0$ на Δ , то

$$\begin{aligned} R^+(x)w^+(x) &= -\frac{2}{\psi^+(x)}(1 + o(1)), \\ R^-(x)w^-(x) &= -\frac{2}{\psi^-(x)}(1 + o(1)), \end{aligned} \quad n \rightarrow \infty.$$

Суммируя последние соотношения, получаем

$$R_n^+(x)w^+(x) + R_n^-(x)w^-(x) = -\frac{2}{\psi^+(x)} - \frac{2}{\psi^-(x)} + o(1).$$

Поскольку $R_n^+(x) - R_n^-(x) = -2Q_n(x)\rho(x)/w^+(x)$ при $x \in \Delta$, то $R_n^+(x)w^+(x) + R_n^-(x)w^-(x) = -2Q_n(x)\rho(x)$. Объединяя последние соотношения для функции остатка, получаем, что

$$Q_n(x)\rho(x) = \frac{1}{\psi^+(x)} + \frac{1}{\psi^-(x)} + o(1).$$

Но $\rho(x)\psi^+(x)\psi^-(x) \equiv \omega_m(x)/\omega_{m,n}(x) = 1 + o(1)$ на Δ , тем самым

$$Q_n(x)\frac{\omega_m(x)}{\omega_{m,n}(x)} = \psi^+(x) + \psi^-(x) + o(1) \quad (87)$$

равномерно по $x \in \Delta$, где $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta < 1$.

Итак, получены (см. выше (86) и (87)) следующие асимптотические представления для полиномов $Q_n(z) = Q_n(z; f)$:

$$\begin{aligned} Q_n(z; f)\frac{\omega_m(z)}{\omega_{m,n}(z)} &= \psi(z)(1 + o(\delta^n)) \\ &\text{равномерно внутри } D', \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} Q_n(x; f)\frac{\omega_m(x)}{\omega_{m,n}(x)} &= \psi^-(x) + \psi^+(x) + o(\delta^n) \\ &\text{равномерно на } \Delta, \end{aligned}$$

где $\omega_m(z) = \prod_{j=1}^m (z - a_j)$, $\omega_{m,n}(z) = \prod_{j=1}^m (z - a_{j,n})$, а $\delta < 1$. Так как равномерно внутри D' и равномерно на Δ при $n \rightarrow \infty$ имеем: $\omega_{m,n}(z) = \omega_m(z)(1 + o(\delta^n))$ и $\psi(z) = \Psi(z)(1 + o(\delta^n))$, где Ψ – решение задачи (\mathcal{R}_2) , то из (88) немедленно следуют утверждения предложения 2.

Предложение 2 доказано.

В дальнейшем нам понадобится также следующее соотношение, которое вытекает непосредственно из (88) и представления (75), (76):

$$\frac{Q_n(z; f)}{\omega_{m,n}(z)} = \frac{\Psi(z)}{\omega_m(z)}(1 + o(\delta^n)) \quad \text{равномерно внутри } D,$$

или, если ввести обозначения $\tilde{Q}_n(z; f) = Q_n(z; f)/\omega_{m,n}(z)$, $\tilde{\Psi}(z) = \Psi(z)/\omega_m(z)$, то

$$\tilde{Q}_n(z; f) = \tilde{\Psi}(z)(1 + o(\delta^n)) \quad \text{равномерно внутри } D. \quad (89)$$

§ 6. Доказательство теоремы 3

1. Доказательство теоремы 3 основано, главным образом, на формуле *сильной асимптотики* (22₂) *полиномов* $Q_n(z) = Q_n(z; f)$ на отрезке Δ . Наша ближайшая цель – придать этой формуле вид, пригодный для дальнейших рассуждений. Для отображающей функции $\Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ имеем:

$$\Phi^+(x) = e^{ig^{*+}(x)} = e^{i \arccos x}, \quad \Phi^-(x) = e^{-i \arccos x} \quad \text{при } x \in \Delta.$$

Следовательно, $|\Phi^+(x)| \equiv |\Phi^-(x)| \equiv 1$ на Δ . Учитывая теперь представление (75), (76) для Ψ -функции, получаем: $\Psi^+(x) = O(1)$ и $\Psi^-(x) = O(1)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно на Δ . Так как $Q_n(x) = \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1)$ равномерно на отрезке Δ , то, во-первых, $Q_n(x) = O(1)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \Delta$, а во-вторых,

$$Q_n^2(x) = \Psi^+(x)^2 + \Psi^-(x)^2 + \frac{2}{\rho(x)} + o(1), \quad \text{где } o(1) = o(\delta^n), \quad \delta < 1; \quad (90)$$

здесь мы воспользовались полученным ранее соотношением

$$\rho(x)\Psi^+(x)\Psi^-(x) \equiv 1$$

при $x \in \Delta$.

Пусть a_1, \dots, a_ℓ – (различные) полюсы функции f в области D , m_j , $j = 1, \dots, \ell$, – их кратности, $m = \sum_{j=1}^{\ell} m_j$ – полное число полюсов f в D . Положим $\omega_m(z) = \prod_{j=1}^{\ell} (z - a_j)^{m_j}$, $\omega_{n,m}(z) = \prod_{j=1}^m (z - a_{j,n})$, где $a_{j,n}$, $j = 1, \dots, m$, – соответствующие полюсам f при $n \rightarrow \infty$ полюсы рациональной дроби f_n ; пусть $\tilde{Q}_n(z) = Q_n(z)/\omega_{n,m}(z)$, тогда $\deg \tilde{Q}_n = n - m$ при достаточно больших n . Умножив соотношение (4) на полином $\tilde{Q}_n \omega_m$ степени n , получим

$$\tilde{R}_n(z) = (Q_n \tilde{Q}_n \omega_m f - \tilde{P}_n)(z) = O\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где функция $\tilde{R}_n = R_n \tilde{Q}_n \omega_m$ голоморфна в D , $\tilde{P}_n = P_n \tilde{Q}_n \omega_m$. Для голоморфной в D функции \tilde{R}_n справедливо представление

$$\begin{aligned} \tilde{R}_n(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{Q_n(x) \tilde{Q}_n(x) \omega_m(x) \rho(x) dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{Q_n^2(x)(1+\delta_n(x))\rho(x) dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{Q_n^2(x)\rho(x) dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{Q_n^2(x)\delta_n(x)\rho(x) dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}} \\ &= I_1(z) + I_2(z), \quad z \in D, \end{aligned} \tag{91}$$

где $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\|_{\Delta}^{1/n} < 1$. Так как $Q_n^2(x) = O(1)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \Delta$, то для

$$I_2(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{Q_n^2(x)\delta_n(x)\rho(x) dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}}$$

имеем

$$I_2(z) = \frac{o(1)}{\sqrt{z^2-1}} = G'(z)o(1)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно внутри D ,

где $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta < 1$. Займемся теперь асимптотикой величины

$$I_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{Q_n^2(x)}{(z-x)} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Дальнейшие рассуждения основаны на асимптотической формуле (90) для Q_n^2 на отрезке Δ .

Последовательно используя (90) и свойства Ψ -функции, преобразуем представление для $I_1(z)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
 I_1(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{2}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\Psi^+(x)^2 + \Psi^-(x)^2}{z-x} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{o(1)}{\sqrt{z^2-1}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{z^2-1}} + \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \left(\frac{1}{\Psi^-(x)^2} + \frac{1}{\Psi^+(x)^2} \right) \frac{dx}{(z-x)\rho(x)\sqrt{1-x^2}} \\
 &\quad + \frac{o(1)}{\sqrt{z^2-1}} \\
 &= \frac{2+o(1)}{\sqrt{z^2-1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{\zeta-z} \frac{d\zeta}{\Psi(\zeta)^2 \rho(\zeta) \sqrt{\zeta^2-1}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{z^2-1}} + \frac{o(1)}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{z^2-1}} (1+o(1)) \\
 &= 2G'(z)(1+o(1))
 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно внутри D_R , $R > 1$,

где $D_R = \{\zeta : |\Phi(\zeta)| > R\}$, $\Gamma_R = \partial D_R$, $R > 1$, $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta < 1$. Таким образом,

$$\tilde{R}_n(z) = 2G'(z)(1+o(1)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно внутри } D. \tag{92}$$

Непосредственно из хода доказательства этого соотношения видно, что оно “выдерживает” дифференцирование любое число раз: для любого целого $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}_n^{(k)}(z) &= 2G^{(k+1)}(z)(1+o(1)) \\
 &\text{при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно внутри } D;
 \end{aligned} \tag{93}$$

последнее соотношение важно для нас лишь постольку, поскольку его правая часть равномерно ограничена внутри $\mathbb{C} \setminus \Delta$, а следовательно, – и в окрестности полюсов функции f в D .

2. Напомним, что $\tilde{R}_n(z) = (Q_n \tilde{Q}_n \omega_m f - \tilde{P}_n)(z) = (Q_n \tilde{Q}_n F - \tilde{P}_n)(z)$, где функция $F = \omega_m f$ голоморфна в D , а полином $\tilde{P}_n = P_n Q_n \omega_m$. Величина $A_j = F(a_j) \neq 0$, $j = 1, \dots, \ell$. Зафиксируем теперь произвольное $j \in \{1, \dots, \ell\}$ и, тем самым, соответствующие ему a_j и m_j . В силу соотношений (92), (93) величина $\tilde{R}_n^{(k)}(a_j) = 2G^{(k+1)}(a_j)(1 + o(1))$ для $k = 0, \dots, m_j - 1$ при $n \rightarrow \infty$. С другой стороны, для таких k величина $\tilde{P}_n^{(k)}(a_j) = (P_n \tilde{Q}_n \omega_m)(a_j)^{(k)} = 0$, поэтому в силу формулы Лейбница

$$\begin{aligned} \tilde{R}_n^{(k)}(a_j) &= (Q_n \tilde{Q}_n F)^{(k)}(a_j) = (\omega_{m,n} \tilde{Q}_n^2 F)^{(k)}(a_j) \\ &= A_j \tilde{Q}_n^2(a_j) \omega_{m,n}^{(k)}(a_j) + \sum_{s=1}^k \binom{k}{s} (\tilde{Q}_n^2 F)^{(s)} \omega_{m,n}^{(k-s)}(a_j). \end{aligned}$$

Подставляя это соотношение при $k = 0$ в (92), получаем

$$A_j \tilde{Q}_n^2(a_j) \omega_{m,n}(a_j) = 2G'(a_j)(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{где } G'(a_j) \neq 0, \quad (94)$$

аналогично из (93) для $k = 1, \dots, m_j - 1$ имеем:

$$\begin{aligned} A_j \tilde{Q}_n^2(a_j) \omega_{m,n}^{(k)}(a_j) + \sum_{s=1}^k \binom{k}{s} (\tilde{Q}_n^2 F)^{(s)} \omega_{m,n}^{(k-s)}(a_j) \\ = 2G^{(k+1)}(a_j)(1 + o(1)); \end{aligned} \quad (95)$$

в частности,

$$A_j \tilde{Q}_n^2(a_j) \omega'_{m,n}(a_j) + (\tilde{Q}_n^2 F)' \omega_{m,n}(a_j) = 2G''(a_j)(1 + o(1)). \quad (96)$$

Пусть $a_{j,\nu}(n)$, $\nu = 1, \dots, m_j$, — полюсы рациональной дроби f_n , соответствующие при $n \rightarrow \infty$ точке a_j . Положим $q_n(z) = \prod_{\nu=1}^{m_j} (z - a_{j,\nu}(n))$, $\tilde{\omega}_n(z) = \omega_{m,n}(z)/q_n(z)$. Тогда $\tilde{\omega}_n(a_j) = \alpha_j(1 + o(1))$ при $n \rightarrow \infty$, где $\alpha_j = \omega_m^{(m_j)}(a_j)/m_j! \neq 0$. Тем самым, величина $A_j \alpha_j \tilde{\Psi}(a_j)^2 / 2G'(a_j) \neq 0, \infty$; здесь $\tilde{\Psi} = \Psi/\omega_m$, $G'(a_j) \neq 0$. Пусть

$$\lambda_j = \lambda_j(n) = - \left(- \frac{A_j \alpha_j \tilde{\Psi}(a_j)^2}{2G'(a_j)} \right)^{2/m_j}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_j &= -|\Phi(a_j)|^{2n/m_j} \exp \left\{ \frac{i2ng^*(a_j)}{m_j} \right\} \exp \left\{ \frac{2S(a_j)}{m_j} \right\} \\ &\times \left(- \frac{A_j \alpha_j}{2G'(a_j)} \frac{\prod_m}{\omega_m}(a_j) \right)^{2/m_j} \end{aligned}$$

и из (94) вытекает, что $q_n(a_j)\lambda_j^{m_j} = 1 + o(1)$ при $n \rightarrow \infty$, где $o(1) = o(\delta^n)$. Так как для достаточно больших n все нули полиномов \tilde{Q}_n и их производных лежат в произвольной наперед заданной окрестности U отрезка Δ , множество $\{a_1, \dots, a_\ell\} \subset \mathbb{C} \setminus \bar{U}$, то

$$\left| \frac{(F\tilde{Q}_n^2)'(z)}{\tilde{Q}_n^2(z)} \right| = O(n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно внутри } \mathbb{C} \setminus \bar{U}.$$

Рассуждая по индукции, получаем отсюда, что и для любого $k = 2, \dots, m_j$

$$\left| \frac{(F\tilde{Q}_n^2)^{(k)}(z)}{\tilde{Q}_n^2(z)} \right| = O(n^k) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно внутри } \mathbb{C} \setminus \bar{U}.$$

Модуль величины $\lambda_j(n)$ растет со скоростью геометрической прогрессии при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_j(n)|^{1/n} = |\Phi(a_j)|^{2/m_j} > 1.$$

Поэтому из (96) вытекает, что $q'_n(a_j)\lambda_j^{m_j-1} = (q'_n(a_j)\lambda_j^{m_j})/\lambda_j = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$, где, как обычно, $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta < 1$. Вновь рассуждая по индукции, получаем из (94) и (95), что $q_n^{(k)}(a_j)\lambda_j^{m_j-k} = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ для $k = 2, \dots, m_j - 1$.

Пусть теперь $p_n(z) = \prod_{\nu=1}^{m_j}(z - z_{\nu,n})$, где $z_{\nu,n} = \lambda_j(n)(a_j - a_{j,\nu}(n))$, $\nu = 1, \dots, m_j$. Тогда из установленных выше асимптотических соотношений вытекает, что $p_n(z) = z^{m_j} - 1 + o(1)$. Следовательно, при надлежащей перенумерации точек $z_{\nu,n}$ — нулей p_n — имеем: $z_{\nu,n} = \varepsilon_j^\nu + o(1)$ при $n \rightarrow \infty$, где $\varepsilon_j = e^{2\pi i/m_j}$, $o(1) = o(\delta^n)$. Отсюда уже получаем, что

$$a_{j,\nu}(n) = a_j + \frac{C_j \varepsilon_j^\nu}{B_j^{2n}}(1 + o(1)) \tag{97}$$

при $n \rightarrow \infty$, $\nu = 1, \dots, m_j$, $j = 1, \dots, \ell$.

Здесь

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_j &= e^{2\pi i/m_j}, \\
 B_j &= \Phi(a_j)^{1/m_j} = |\Phi(a_j)|^{1/m_j} e^{ig^*(a_j)/m_j}, \\
 |B_j| &= |\Phi(a_j)|^{1/m_j} > 1, \\
 C_j &= e^{-2S(a_j)/m_j} \left(-\frac{2G'(a_j)}{A_j\alpha_j} \right)^{1/m_j} \\
 &\quad \times \frac{(-2)^{m/m_j} \Phi(a_j)^{m/m_j} \prod_{s=1}^{\ell} \Phi(a_s)^{m_s/m_j}}{\prod_{s=1}^{\ell} (1 - \Phi(a_s)\Phi(a_j))^{2m_s/m_j}}, \tag{98}
 \end{aligned}$$

а величины A_j и α_j , $j = 1, \dots, \ell$, конечны, отличны от нуля и зависят только от f :

$$A_j = (f\omega_m)(a_j) \neq 0, \quad \alpha_j = \frac{\omega_m^{(m_j)}(a_j)}{m_j!} \neq 0, \quad j = 1, \dots, \ell.$$

Постоянная C_j связана с геометрическим расположением j -го полюса функции f относительно отрезка Δ и других полюсов f ; величина $1/B_j$ характеризует (геометрическую) скорость сходимости полюсов f_n к точке a_j при $n \rightarrow \infty$ и не зависит от других полюсов f ; наличие ε_j , $\varepsilon_j^{m_j} = 1$, обеспечивает то асимптотически правильное расположение полюсов f_n по отношению к притягивающей точке a_j , о котором говорилось во введении.

Теорема 3 доказана.

Формулы (97), (98) полностью описывают асимптотическое поведение полюсов рациональных дробей f_n , находящихся вблизи полюсов f в D .

3. Перейдем к доказательству следствий.

Справедливость следствия 1 вытекает непосредственно из хода доказательства теоремы 3 (см. формулы (91)–(93)).

Утверждение следствия 2 вытекает из того, что в его условиях при всех достаточно больших n на отрезке Δ расположены $n - m$ простых нулей полинома $Q_n(x; f)$. Поскольку в силу теоремы 3 для оставшихся m нулей справедливы асимптотические формулы вида (97), (98), то при $j = 1, \dots, \ell$ и $\nu, \mu = 0, \dots, m_j - 1$, $\nu \neq \mu$, имеем

$$|a_{j,\nu}(n) - a_{j,\mu}(n)| = \frac{|C_j| \cdot |\varepsilon_j^{\nu-\mu} - 1|}{|B_j^n|} (1 + o(1)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Так как $\varepsilon_j^{\nu-\mu} \neq 1$ при $\nu \neq \mu$, то из последней асимптотической формулы вытекает, что при достаточно больших n и оставшиеся m нулей знаменателя f_n простые.

Докажем следствие 3. Из теоремы Сохоцкого получаем, что для $x \in \Delta$

$$\hat{\rho}^+(x) = I(x) + i \frac{\rho(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \hat{\rho}^-(x) = I(x) - i \frac{\rho(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

где

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\rho(t) - \rho(x)}{x-t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Аналогично, для функции

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(t)}{z-t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

имеем

$$u^+(x) = J(x) - \frac{\log \rho(x)}{w^+(x)} = J(x) + \frac{i \log \rho(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$u^-(x) = J(x) - \frac{i \log \rho(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

где

$$J(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(t) - \log \rho(x)}{x-t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Положим $\theta(x) = \sqrt{1-x^2} J(x)/2$. Тогда в условиях следствия 3 величина $\theta(x)$ вещественна при всех $x \in \Delta$, а для функции Сегё $S(z) = w(z)u(z)/2$ и функции $H(z) = \exp\{S(z)\}$ получаем

$$S^+(x) = i\theta(x) - \frac{1}{2} \log \rho(x), \quad S^-(x) = -i\theta(x) - \frac{1}{2} \log \rho(x),$$

$$H^+(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \exp\{i\theta(x)\}, \quad H^-(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \exp\{-i\theta(x)\}. \quad (99)$$

Для функции \mathcal{F} (см. (76)) при $x \in \Delta$ имеем с учетом принятого здесь соглашения относительно полюсов функции f :

$$\mathcal{F}^+(x) = e^{in\varphi} \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{e^{i\varphi} - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j)e^{i\varphi}} \right)^{m_j},$$

$$\mathcal{F}^-(x) = e^{-in\varphi} \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{e^{-i\varphi} - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j)e^{-i\varphi}} \right)^{m_j},$$

где $\varphi = \varphi(x) = \arccos x$. Нетрудно видеть, что так как рациональная функция r вещественна, то при $x \in \Delta$

$$\mathcal{F}^+(x) = e^{ni\varphi(x)+i\alpha(x)}, \quad \mathcal{F}^-(x) = e^{-ni\varphi(x)-i\alpha(x)}, \quad (100)$$

где $\alpha(x) \in \mathbb{R}$ при $x \in \Delta$,

$$\begin{aligned} \cos \alpha(x) = \frac{1}{2} \left\{ \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{e^{i \arccos x} - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j) e^{i \arccos x}} \right)^{m_j} \right. \\ \left. + \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{e^{-i \arccos x} - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j) e^{-i \arccos x}} \right)^{m_j} \right\}. \end{aligned}$$

Перепишем асимптотическую формулу для полиномов Q_n на отрезке Δ следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_n(x; f) &= \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1) \\ &= \mathcal{F}^+(x)H^+(x) + \mathcal{F}^-(x)H^-(x) + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись представлениями (99) и (100) для граничных значений функций H и \mathcal{F} на отрезке Δ , получаем

$$\begin{aligned} Q_n(x; f) &= \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \left\{ e^{ni\varphi(x)+i\alpha(x)+i\theta(x)} + e^{-ni\varphi(x)-i\alpha(x)-i\theta(x)} \right\} + o(1) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\rho(x)}} \cos(n \arccos x + \theta(x) + \alpha(x)) + o(1), \end{aligned}$$

где $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta < 1$,

$$\theta(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(t) - \log \rho(x)}{x-t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Следствие 3 доказано.

§ 7. Случай нескольких отрезков

1. В этом параграфе мы коротко изложим результаты, относящиеся к случаю, когда носитель меры σ марковской функции (5) состоит из нескольких (непересекающихся) отрезков: $S = \bigsqcup_{j=1}^p \Delta_j \in \mathbb{R}$, $p \geq 2$. В [20] Е. А. Рахманов получил для такого случая аналог теоремы 1 для мероморфных функций вида $f = \hat{\sigma} + r$,

где r – вещественная рациональная функция, все полюсы которой лежат вне отрезка Δ – выпуклой оболочки S . В той же работе [20] доказано, что уже для двух отрезков и комплексной рациональной функции r аналог теоремы 1 не имеет места.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть σ – положительная борелевская мера на \mathbb{R} , носитель $S = \text{Supp } \sigma$ которой состоит из нескольких отрезков, Δ – выпуклая оболочка S и $f = \hat{\sigma} + r$, где r – произвольная вещественная рациональная функция, все полюсы которой принадлежат области $\mathbb{C} \setminus \Delta$, и $r(\infty) = 0$. Тогда последовательность диагональных аппроксимаций Паде $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к f равномерно в сферической метрике внутри области $\tilde{D} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$.

При этом, как и в теореме 1, к каждому полюсу f в \tilde{D} стремится ровно столько полюсов f_n , какова его кратность. Остальные полюсы f_n ведут себя следующим образом. Все предельные точки этих полюсов лежат на отрезке Δ ; ассоциированная с полюсами f_n единичная¹² мера (слабо) сходится к равновесной мере компакта S , в каждой из $p - 1$ (открытой) лакуны между отрезками при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ может располагаться не больше чем по одному полюсу f_n , в “общем положении” такие полюсы f_n при $n \rightarrow \infty$ всюду плотны в лакунах. Тем самым, в рассматриваемом случае “как правило” весь отрезок Δ – выпуклая оболочка S – состоит из предельных точек полюсов f_n .

Используемый в настоящей работе метод исследования сильной асимптотики знаменателей $Q_n(z; f)$ рациональных дробей f_n оказывается применим и для рассмотренного Е. А. Рахмановым случая, когда $S = \bigsqcup_{j=1}^p \Delta_j$ в предположении, что мера σ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на S и

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{1}{\pi} \frac{\rho(x)}{\sqrt{-h(x+i0)}} > 0 \quad \text{на } S; \quad (101)$$

здесь $h(z) = \prod_{j=1}^{2p} (x - e_j)$, e_1, \dots, e_{2p} – концы отрезков $\{\Delta_j\}$, в области $D = \hat{\mathbb{C}} \setminus S$ выбрана ветвь квадратного корня, которая положительна при положительных значениях аргумента, а весовая

¹²В условиях теоремы 1' все индексы n нормальны, тем самым, при каждом n рациональная функция f_n имеет ровно n полюсов.

функция ρ голоморфна и не обращается в нуль на S . Формулы сильной асимптотики для Q_n и в этом случае выражаются явно в терминах Ψ -функции – решения соответствующей специальной краевой задачи Римана – и вполне аналогичны (22₁)–(22₃). Однако при этом в дивизоре Ψ -функции неизбежно присутствуют “свободные” нули, число которых равно числу лакунов между отрезками, а их поведение при $n \rightarrow \infty$ определяется проблемой обращения Якоби.

2. Пусть \mathfrak{R} – гиперэллиптическая риманова поверхность рода $g = p-1$, заданная уравнением $w^2 = h(z)$, где $h(z) = \prod_{j=1}^{2g+2} (z - e_j)$, $e_1 < \dots < e_{2g+2}$. Будем считать, что \mathfrak{R} реализована как двулистное разветвленное в точках $\{e_j\}$ накрытие римановой сферы $\widehat{\mathbb{C}}$ таким образом, что переход с одного листа на другой осуществляется по верхнему Δ_j^+ и нижнему Δ_j^- берегам отрезков Δ_j . Тем самым, над каждой точкой $\widehat{\mathbb{C}}$, за исключением точек ветвления $\{e_j\}$, лежат ровно две точки римановой поверхности, а каждому отрезку Δ_j соответствует на \mathfrak{R} замкнутая аналитическая (в комплексной структуре \mathfrak{R}) кривая Γ_j , $j = 1, \dots, g+1$, – цикл на \mathfrak{R} ; положим $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{g+1} \Gamma_j$. Будем считать, что в $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus S$ выбрана ветвь квадратного корня, удовлетворяющая условию $\sqrt{h(z)}/z^{g+1} \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$. Функция $w: w^2 = h(z)$ однозначна на \mathfrak{R} . Первым (открытым) листом $D^{(1)}$ поверхности \mathfrak{R} будем считать тот, на котором $w = \sqrt{h(z)}$. На втором листе $D^{(2)}$ имеем $w = -\sqrt{h(z)}$. Для точек римановой поверхности \mathfrak{R} будем использовать обозначение $\mathbf{z} = (z, w)$, где $w = \pm\sqrt{h(z)}$; при этом для точек первого листа $z^{(1)} = (z, \sqrt{h(z)})$, а для точек второго $z^{(2)} = (z, -\sqrt{h(z)})$. Область $D^{(1)}$ будем, как правило, отождествлять с “физической” областью D . Для $\mathbf{z} = z^{(1)}$ будем часто писать просто $w(z)$ вместо $w(\mathbf{z})$; тем самым, приобретает смысл и запись $w^+(x) = \sqrt{h(x+i0)}$, $x \in S$ (см. (101)). Каноническая проекция $\text{pr}: \mathfrak{R} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ определяется соотношением $\text{pr } \mathbf{z} = z$, в частности $\text{pr } D^{(1)} = \text{pr } D^{(2)} = D$, $\text{pr } \Gamma = S$.

Приведем некоторые стандартные сведения о гиперэллиптических римановых поверхностях, которые понадобятся нам в этом параграфе. В обозначениях и терминологии мы здесь придерживаемся в основном [19] (см. также [21], [22]).

Ориентируем кривые Γ_j так, что при обходе по Γ_j область $D^{(1)}$ остается слева, а область $D^{(2)}$ – справа. Примем ориентированные кривые Γ_j , $j = 1, \dots, g$, за a -циклы \mathbf{a}_j на \mathfrak{R} и стандартным образом [19] дополним их b -циклами \mathbf{b}_j до базиса гомологий $\{\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j\}_{j=1, \dots, g}$ на \mathfrak{R} . Пусть $\{d\Omega_k\}$ – соответствующий a -нормированный базис голоморфных абелевых дифференциалов:

$$\oint_{\mathbf{a}_j} d\Omega_k = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, g.$$

Матрица $\mathbf{B} = \|B_{kj}\|_{k,j=1, \dots, g}$, где $B_{kj} = \oint_{\mathbf{b}_j} d\Omega_k$ – b -периоды базисных дифференциалов, является матрицей Римана: она симметрична, $B_{kj} = B_{jk}$, а ее мнимая часть положительно определена, $\|\operatorname{Im} B_{jk}\| > 0$ (отметим, что в рассматриваемом здесь случае все $B_{jk} \in i\mathbb{R}$). Функции

$$\Omega_k(\mathbf{z}) = \int_{e_{2g+1}}^{\mathbf{z}} d\Omega_k$$

определены на \mathfrak{R} однозначно по модулю их a - и b -периодов. Так как $\Omega'_k(z) = p_k(z)/w(z)$, где p_k – полином степени $g - 1$, то имеет смысл обозначение $d\Omega_k^+(x) = p_k(x) dx/w^+(x)$ при $x \in S$.

Если в $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ задана функция $F(\mathbf{z})$, то под $F(\mathbf{x}+)$ понимаются ее предельные значения при $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$, $\mathbf{z} \in D^{(1)}$, если они существуют; аналогичный смысл придается и $F(\mathbf{x}-)$ при $\mathbf{z} \in D^{(2)}$, $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$.

Фиксируем стандартный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_g$ в \mathbb{R}^g : $(\mathbf{e}_k)_j = \delta_{kj}$. Тогда векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_g, \mathbf{B}\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{B}\mathbf{e}_g$ линейно независимы над \mathbb{R} и образуют базис в \mathbb{C}^g . Факторпространство $\mathbb{C}^g/\{N + \mathbf{B}\mathbf{M}\}$ по целочисленной решетке, $N, M \in \mathbb{Z}^g$, является $2g$ -мерным вещественным тором \mathbb{T}^{2g} и называется многообразием Якоби $\text{Jac}\mathfrak{R}$ римановой поверхности \mathfrak{R} . Любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^g$ однозначно представим в виде $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} + N + \mathbf{B}\mathbf{M} = \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} \pmod{\text{периодов}}$, $0 \leq (\mathbf{x})_j, (\mathbf{y})_j < 1$, $N, M \in \mathbb{Z}^g$; иногда для краткости знак сравнения по модулю периодов дифференциалов $\{d\Omega_k\}$ мы будем опускать и писать просто $\mathbf{v} \equiv \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y}$.

Неупорядоченные наборы точек $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g)$, $\mathbf{z}_j \in \mathfrak{R}$, образуют g -ю симметрическую степень $S^g\mathfrak{R}$ римановой поверхности \mathfrak{R} .

Пусть \mathbf{z}_0 – некоторая фиксированная точка¹³ \mathfrak{R} . Вектор-функция $A(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) = (A_1, \dots, A_g)$ с координатами

$$A_k = A_k(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) \equiv \sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) \equiv \sum_{j=1}^g \int_{\mathbf{z}_0}^{\mathbf{z}_j} d\Omega_k, \quad k = 1, \dots, g,$$

определяет отображение Абеля $A: S^g \mathfrak{R} \rightarrow \text{Jac } \mathfrak{R}$. Если задан вектор $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_g) \in \text{Jac } \mathfrak{R}$, то задача нахождения неупорядоченного набора точек $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) \in S^g \mathfrak{R}$, для которого

$$A_k(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) = v_k \pmod{\text{периодов}}, \quad k = 1, \dots, g,$$

называется проблемой обращения Якоби. Проблема обращения Якоби всегда разрешима, но, вообще говоря, не единственным образом. В дальнейшем неупорядоченный набор точек $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) \in S^g \mathfrak{R}$ будем называть дивизором и обозначать $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$.

Для любых двух различных точек \mathbf{z}_1 и \mathbf{z}_2 римановой поверхности \mathfrak{R} существует абелев дифференциал третьего рода, голоморфный всюду на \mathfrak{R} , за исключением этих двух точек, в которых он имеет простые полюсы с вычетами соответственно 1 и -1 ; такой дифференциал называется нормальным. Нормальный дифференциал будет определен однозначно, если потребовать, чтобы все его a -периоды были равны нулю; будем называть такой дифференциал a -нормированным абелевым дифференциалом третьего рода и обозначать $d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$. Другой способ однозначно задать (нормировать) дифференциал третьего рода – потребовать, чтобы все его периоды были чисто мнимыми. Для таких дифференциалов будем использовать обозначение $dG(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$, предполагая при этом, что вычеты в точках \mathbf{z}_1 и \mathbf{z}_2 равны соответственно -1 и 1. К подобным дифференциалам относится дифференциал комплексной функции Грина $G_D(z, \infty) = g_D(z, \infty) + ig_D^*(z, \infty)$ (здесь $g_D^*(z, \infty)$ – функция, гармонически сопряженная к функции Грина $g_D(z, \infty)$) многосвязной области $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus S$. Функция $G_D(z, \infty)$ многозначна в D и

$$G_D(z, \infty) = \int_{e_{2g+1}}^z \frac{P_g(\zeta)}{\sqrt{h(\zeta)}} d\zeta, \quad z \in D,$$

¹³В дальнейшем мы выбираем $\mathbf{z}_0 = e_{2g+1}$.

где $P_g(z) = P_g(z; h) = z^g + \dots$ – вещественный полином, все нули которого лежат в лакунах (e_{2j}, e_{2j+1}) , $j = 1, \dots, g$. Дифференциал $dG = dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = P_g(z) dz/w(\mathbf{z})$ определен на всей римановой поверхности \mathfrak{R} , имеет чисто мнимые периоды и простые полюсы в точках $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ и $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$ с вычетами соответственно -1 и 1 .

Через $\omega_k(z; D) = \omega(z; \Delta_k, D)$ будем обозначать гармоническую меру (в точке $z \in D$) отрезка Δ_k относительно области D .

3. Следуя предложенной в § 2 схеме изложения, обсудим сначала случай $f = \hat{\rho}$, где

$$\hat{\rho}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_S \frac{\rho(x)}{z-x} \frac{dx}{w^+(x)}, \quad (102)$$

компакт S состоит из нескольких отрезков, а весовая функция ρ голоморфна на S и удовлетворяет условию (101).

Зафиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим на римановой поверхности \mathfrak{R} следующую краевую задачу Римана.

ЗАДАЧА (\mathcal{R}'_1). При фиксированном $n \in \mathbb{N}$, $n \geq g$, найти функцию $\Psi = \Psi_n$ такую, что:

- 1°. Ψ (кусочно) мероморфна на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma = D^{(1)} \sqcup D^{(2)}$;
- 2°. дивизор $(\Psi) = (n-g)\infty^{(2)} + \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g - n\infty^{(1)}$;
- 3°. на Γ выполнено краевое условие: $\rho(x)\Psi(\mathbf{x}+) = \Psi(\mathbf{x}-)$.

В п. 2° точки \mathbf{z}_j – “свободные” нули Ψ -функции – зависят от n , под $\Psi(\mathbf{x}+)$ в п. 3° понимаются предельные значения функции $\Psi(\mathbf{z})$ при $D^{(1)} \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$, аналогичный смысл придается и $\Psi(\mathbf{x}-)$. Функция Ψ , решающая задачу (\mathcal{R}'_1), всегда существует, при этом так как род $g = p - 1$ поверхности \mathfrak{R} положителен, то нули и полюсы Ψ на \mathfrak{R} оказываются связанными определенными соотношениями, аналогичными соотношениям Абеля для произвольной мероморфной функции на \mathfrak{R} , а дивизор $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ является решением определенной проблемы обращения Якоби. Анализ данных этой проблемы показывает, что при оговоренном выше условии (101) на вес ρ ее решение всегда таково, что $z_j = \text{pr } \mathbf{z}_j \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$, т.е. в каждой замкнутой лакуне между отрезками $\{\Delta_j\}$ лежит ровно по одной точке $\text{pr } \mathbf{z}_j \in \mathbb{R}$. Значит, дивизор $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ неспециальный,

а следовательно, такая проблема обращения Якоби имеет единственное решение. Отсюда вытекает, что Ψ -функция, решающая задачу (\mathcal{R}'_1) , единственна с точностью до нормировки и имеет в бесконечно удаленной точке $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ полюс в точности n -го порядка. Нетрудно видеть, что для любого $z \in \mathbb{C} \setminus S$ выполняется соотношение $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \text{const} \cdot \prod_{j=1}^g (z - z_j)$, где $\text{const} \neq 0$. В дальнейшем мы будем придерживаться следующей нормировки¹⁴ Ψ -функции: $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \prod_{j=1}^g (z - z_j)$. Нетрудно найти и явный вид этой функции. При $\mathbf{z} = z^{(1)} \in D^{(1)}$ и в предположении, что $z_j \in (e_{2j}, e_{2j+1})$, имеем (ср. с (21)):

$$\Psi(z^{(1)}) = \Phi(z)^{n-g} e^{A(z;\rho)} \mathcal{F}_n(z), \quad (103)$$

где $\Phi(z) = e^{G_D(z, \infty)}$ – (многозначная) отображающая функция,

$$A(z; \rho) = w(z) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(x)}{x - z} \frac{dx}{w^+(x)} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^g \lambda_k \int_{\Delta_k} \frac{1}{x - z} \frac{dx}{w^+(x)} \right),$$

$\lambda_k = 2 \int_S \log \rho(x) d\Omega_k^+(x)$ (при $g = 0$ $A(z; \rho)$ – функция Серё),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(z) &= \exp \left(\sum_{j=1}^g \Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; z^{(1)}) + \frac{1}{2} c_g + \sum_{k=1}^g \theta_k \Omega_k(z^{(1)}) \right) \\ &= \exp(\varphi_n(z)), \end{aligned} \quad (104)$$

величины $\theta_k = \theta_k(n) = \{n\omega_k(\infty)\} - g$ (здесь и ниже в (105) $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть соответствующего числа), дивизор $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$, где $\mathbf{z}_j = \mathbf{z}_j(n)$, является (единственным) решением проблемы обращения Якоби

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) &= \sum_{s=1}^g \left\{ \left(n - \frac{1}{2} \right) \omega_s(\infty; D) \right\} B_{ks} + \frac{i}{\pi} \int_S \log \rho(x) d\Omega_k^+(x), \\ &k = 1, \dots, g, \end{aligned} \quad (105)$$

величина $c_g = c_g(n) = \prod_{j=1}^g (e_{2g+1} - z_j)$.

¹⁴Как уже отмечалось выше, таким условием Ψ -функция определяется однозначно с точностью до знака \pm .

Представление для $\Psi(z^{(2)})$ при $z^{(2)} \in D^{(2)}$ следует непосредственно из (103) и соотношения $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \prod_{j=1}^g (z - z_j)$ при $z \in D$. Так как функция ρ голоморфна и отлична от нуля на S , то правая часть представления (103) имеет смысл и при $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$ для дивизора $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$, удовлетворяющего системе уравнений (105). Тем самым, под функцией $\Psi(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$, естественно понимать правую часть представления (105). Аналогичного соглашения будем придерживаться и для функции $\Psi(\mathbf{z})$ при $\mathbf{z} \in D^{(2)} \sqcup \Gamma$.

При подходящей нормировке полиномов $Q_n(z; \hat{\rho})$ – знаменателей диагональных аппроксимаций Паде функции $f = \hat{\rho}$ – их сильная асимптотика внутри области $\tilde{D} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ и на компакте S описывается в терминах Ψ -функции, решающей задачу (\mathcal{R}'_1) , следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1'. Пусть голоморфная на S функция ρ удовлетворяет условию (101), Ψ – решение задачи (\mathcal{R}'_1) при $n \in \mathbb{N}$. Тогда при подходящей нормировке полиномов $Q_n(z; \hat{\rho})$ имеем:

- 1°. $Q_n(z; \hat{\rho}) = \Psi(z)(1 + o(1))$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно внутри $D = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$;
- 2°. $Q_n(x; \hat{\rho}) = \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно на S .

Здесь $\Psi(z) = \Psi(z^{(1)})$, под $\Psi^+(x)$ ($\Psi^-(x)$) понимаются верхние (соответственно нижние) предельные значения $\Psi(z)$ на S ; величина $o(1) = o(\delta^n)$, где $\delta < 1$. Функция Ψ , решающая задачу (\mathcal{R}'_1) , имеет в точке $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ полюс в точности n -го порядка. Так как $\deg Q_n = n$ при всех n и $\Psi(z^{(1)})/z^n \rightarrow \varkappa_n \neq 0$ при $z \rightarrow \infty$, где $\varkappa_n \in \mathbb{R}$, то естественно нормировать Q_n условием $Q_n(z) = \varkappa_n z^n + \dots$. С помощью представления (103) величину \varkappa_n нетрудно найти и в явном виде, при этом, так как $\varkappa_n \in \mathbb{R}$, можно считать, что $\varkappa_n > 0$; таким выбором знака у \varkappa_n однозначно определяется и сама Ψ -функция.

Отметим, что сильная асимптотика полиномов Q_n в лакунах между отрезками нам здесь не понадобится, хотя она также может быть описана в терминах, связанных с римановой поверхностью \mathfrak{R} (так как асимптотическое поведение нулей Q_n , расположенных в лакунах между отрезками, подчиняется определенной динамической системе; см. [17] и [20]).

4. Перейдем теперь к общему случаю $f = \widehat{\rho} + r$, где функция ρ удовлетворяет условию (101) и голоморфна на S , а функция $r \in \mathbb{R}(z)$ и не имеет полюсов на Δ – выпуклой оболочке S . Пусть a_1, \dots, a_ℓ – полюсы f в $\mathbb{C} \setminus \Delta$, m_1, \dots, m_ℓ – их кратности.

Рассмотрим на римановой поверхности \mathfrak{R} следующую краевую задачу Римана.

ЗАДАЧА (\mathcal{R}'_2) . При фиксированном $n \in \mathbb{N}$, $n \geq g$, найти функцию $\Psi = \Psi_n$ такую, что:

- 1°. Ψ (кусочно) мероморфна на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma = D^{(1)} \sqcup D^{(2)}$;
- 2°. дивизор $(\Psi) = (n - g)\infty^{(2)} + \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g + m_1 a_1^{(1)} + \dots + m_\ell a_\ell^{(1)} - m_1 a_1^{(2)} - \dots - m_\ell a_\ell^{(2)} - n\infty^{(1)}$;
- 3°. на Γ выполнено краевое условие: $\rho(x)\Psi(\mathbf{x}+) = \Psi(\mathbf{x}-)$.

Как и в задаче (\mathcal{R}'_1) , точки \mathbf{z}_j в п. 2° зависят от n . Смысл обозначений $\Psi(\mathbf{x}+)$ и $\Psi(\mathbf{x}-)$ – тот же, что и выше. При оговоренных выше условиях на ρ и r функция Ψ , решающая задачу (\mathcal{R}'_2) , всегда существует, при этом дивизор $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ оказывается единственным решением некоторой проблемы обращения Якоби, кроме того, $z_j \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$ при $j = 1, \dots, g$, т.е. в каждой замкнутой лакуне между $\{\Delta_j\}$ лежит ровно по одной точке $z_j = \text{rg } \mathbf{z}_j$. Функция, решающая задачу (\mathcal{R}'_2) , единственна с точностью до нормировки и имеет в бесконечно удаленной точке $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ полюс в точности n -го порядка. Для любого $z \in \mathbb{C} \setminus S$ выполняется соотношение $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \text{const} \cdot \prod_{j=1}^g (z - z_j)$, где $\text{const} \neq 0$. Как и ранее, мы придерживаемся следующей нормировки Ψ -функции: $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \prod_{j=1}^g (z - z_j)$. Если условиться, что $\Psi(z^{(1)})/z^n \rightarrow \varkappa_n > 0$ при $z \rightarrow \infty$, то последним тождеством Ψ -функция определяется однозначно. По сравнению с задачей (\mathcal{R}'_1) явный вид этой функции претерпевает следующие изменения: в правую часть (103) надо добавить множитель

$$\Pi_m(z) = \exp \left\{ \sum_{s=1}^{\ell} m_s \Omega(a_s^{(1)}, a_s^{(2)}; z^{(1)}) \right\}$$

(здесь $m = \sum_{s=1}^{\ell} m_s$ – полное число полюсов f в $\mathbb{C} \setminus \Delta$), а в правую часть (105) – удвоенное слагаемое $\sum_{s=1}^{\ell} m_s \Omega_k(a_s^{(1)})$. В итоге получаем, что при $z \in \mathbb{C} \setminus S$

$$\Psi(z^{(1)}) = \Phi(z)^{n-g} e^{A(z;\rho)} \mathcal{F}_n(z) \Pi_m(z),$$

где дивизор $\mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ является (единственным) решением следующей проблемы обращения Якоби:

$$\sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) = \sum_{s=1}^g \left\{ \left(n - \frac{1}{2} \right) \omega_s(\infty; D) \right\} B_{ks} + \frac{i}{\pi} \int_S \log \rho(x) d\Omega_k^+(x) + 2 \sum_{s=1}^{\ell} m_s \Omega_k(a_s^{(1)}), \quad k = 1, \dots, g.$$

В терминах Ψ -функции, решающей задачу (\mathcal{R}'_2) , асимптотическое поведение полиномов $Q_n(z; f)$, нормированных условием $Q_n(z; f) = \varkappa_n z^n + \dots$, описывается так.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2'. Пусть $f = \hat{\rho} + r$, где голоморфная на S функция ρ удовлетворяет условию (101), вещественная рациональная функция r не имеет полюсов на Δ и $r(\infty) = 0$. Если Ψ – решение задачи (\mathcal{R}_2) при $n \in \mathbb{N}$, то для полиномов $Q_n(z; f)$ имеем:

$$1^\circ. Q_n(z; f) = \Psi(z)(1 + o(1)) \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно внутри } \tilde{D}', \quad (22'_1)$$

$$2^\circ. Q_n(x; f) = \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1) \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно на } S, \quad (22'_2)$$

где $\tilde{D} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$, $\tilde{D}' = \tilde{D} \setminus \{\text{полюсы функции } f\}$, величина $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta < 1$.

Формула п. 2° сильной асимптотики для полиномов $Q_n(x; f)$ на S лежит в основе доказательства следующего утверждения об асимптотическом поведении полюсов f_n в окрестности кратного полюса f .

ТЕОРЕМА 3'. Пусть в условиях предложения 2' точка $a_j \in D$ – полюс функции f кратности $m_j \geq 1$, $a_{j,\nu}(n)$, $\nu = 1, \dots, m_j$, – соответствующие точке a_j при $n \rightarrow \infty$ полюсы f_n . Тогда

$$a_{j,\nu}(n) = a_j + \frac{C_j \varepsilon_j^\nu}{B_j^{2n}} (1 + o(\delta^n)) \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad \nu = 1, \dots, m_j, \quad (22'_3)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_j &= e^{2\pi i/m_j}, \\ B_j &= \Phi(a_j)^{1/m_j} = e^{G(a_j)/m_j}, \quad |B_j| > 1, \\ C_j &= C_j(n) = e^{-2A(a_j;\rho)/m_j} \left(-\frac{2G'(a_j)r_{n,g}(a_j)}{A_j\alpha_j} \right)^{2/m_j} \\ &\quad \times e^{2gG(a_j)/m_j - 2\varphi_n(a_j)/m_j} \left(\frac{m_j!}{\prod_m^{(m_j)}(a_j)} \right)^{2/m_j}. \end{aligned}$$

Здесь функция $r_{n,g}(z) = P_g(z)/\prod_{j=1}^g(z - z_j)$ и, тем самым, зависит от n , комплексные постоянные $A_j = (f\omega_m)(a_j) \neq 0$, $\alpha_j = \omega_m^{(m_j)}(a_j)/m_j! \neq 0$, $j = 1, \dots, \ell$, зависят только от f , функция φ_n определена соотношением (104).

Список литературы

- [1] Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П., *Аппроксимации Паде*. — М.: Мир, 1986.
- [2] Чебышёв П. Л., “О непрерывных дробях” // *Ученые записки Имп. Академии Наук*, 1855, **III**, 636–664. (Полное собрание сочинений. Т. II. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948, 103–126.)
- [3] Марков А. А., “Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues” // *Acta Math.*, 1895, **19**, 93–104. (Два доказательства сходимости некоторых непрерывных дробей // *Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля*. М.: Гостехиздат, 1948, 106–119.)
- [4] Гончар А. А., “О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций” // *Матем. сб.*, 1975, **97 (139)**, 607–629.
- [5] Рахманов Е. А., “Об асимптотике отношения ортогональных многочленов” // *Матем. сб.*, 1977, **103 (145)**, 237–252.
- [6] Рахманов Е. А., “Об асимптотике отношения ортогональных многочленов. II” // *Матем. сб.*, 1982, **118 (160)**, 104–117.
- [7] Гончар А. А., “О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде” // *Матем. сб.*, 1982, **118 (160)**, 535–556.

- [8] Гончар А. А., “О сходимости диагональных аппроксимаций Паде в сферической метрике” // *Математические структуры – вычислительная математика – математическое моделирование*. Т. 2. София, 1984, 29–35.
- [9] Бернштейн С. Н., *О многочленах, ортогональных в конечном интервале*. — Харьков: ОНТИ, 1937.
- [10] Ахиезер Н. И., “Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах” // *Докл. АН СССР*, 1960, **134**(1), 9–12.
- [11] Ахиезер Н. И., Томчук Ю. Я., “К теории ортогональных многочленов на нескольких интервалах” // *Докл. АН СССР*, 1961, **138**(4), 743–746.
- [12] Ахиезер Н. И., “Континуальные аналоги ортогональных многочленов на системе интервалов” // *Докл. АН СССР*, 1961, **141**(2), 263–266.
- [13] Nuttall J., “Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials” // *J. Approx. Theory*, 1984, **42**, 299–386.
- [14] Nuttall J., “Padé polynomial asymptotics from a singular integral equation” // *Constr. Approx.*, 1990, **6**(2), 157–166.
- [15] Суетин С. П., “О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций” // *Матем. сб.*, 2000, **191**(9), 81–114.
- [16] Суетин С. П., “Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда” // *УМН*, 2002, **57**(1), 45–142.
- [17] Суетин С. П., “Об асимптотических свойствах полюсов диагональных аппроксимаций Паде для некоторых обобщений марковских функций” // *Матем. сб.*, 2002, **193**(12), 81–114.
- [18] Аптекарев А. И., “Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций” // *Матем. сб.*, 2002, **193**(1), 3–72.
- [19] Зверович Э. И., “Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях” // *УМН*, 1971, **26**(1), 113–180.
- [20] Рахманов Е. А., “О сходимости диагональных аппроксимаций Паде” // *Матем. сб.*, 1977, **104** (146), 271–291.
- [21] Форстер О., *Римановы поверхности*. — М.: Мир, 1980.
- [22] Дубровин Б. А., “Гэта-функции и нелинейные уравнения” // *УМН*, 1981, **36**(2), 11–80.

Содержание

§ 1. Введение	3
§ 2. Формулировка основных результатов	15
§ 3. Доказательство предложения 1	24
§ 4. Доказательство теоремы 2	28
§ 5. Доказательство предложения 2	40
§ 6. Доказательство теоремы 3	48
§ 7. Случай нескольких отрезков	55
Список литературы	65

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 5

*Андрей Александрович Гончар
Сергей Павлович Суетин*

**Об аппроксимациях Паде мероморфных функций
марковского типа**

Компьютерная верстка *О. Г. Мисюриной*

Сдано в набор 30.11.2004. Подписано в печать 10.12.2004.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 4,25. Тираж 150 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.

<http://www.mi.ras.ru/spm/> e-mail: spm@mi.ras.ru