Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Э. Б. Кикодзе, О свободных группах некоторых многообразий,
Алгебра и логика. Семинар, 1966, том 5, номер 4, 15–23

https://www.mathnet.ru/al1061

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
6 декабря 2025 г., 19:24:18

А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
Семинар

Том 5
Выпуск 4 Руководитель А.И.Мальцев 1966 г.

О СВОБОДНЫХ ГРУППАХ НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Э.Б.Кикодзе

Пусть $\mathcal{L}$ - свободное кольцо Ли с образующими $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Рассмотрим в нем идеалы $\mathcal{L}_{(k,l)} = \mathcal{L}_k \cdot \mathcal{L}_l$, где $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{i-1} \cdot \mathcal{L}$ при $i \geqslant 2$. Фактор-кольцо $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{(k,l)}$ будем называть свободным (k,l) -кольцом Ли.

Как известно, аддитивную базу кольца $\mathcal{L}$ образуют базисные одночлены, определяемые следующим образом. Базисными одночленами первой степени являются свободные образующие x_i, $i=1,2,\ldots,n$, упорядоченные по индексам: $x_i > x_j$, если $i > j$. Пусть базисные одночлены степеней, меньших n, уже определены и для них установлено отношение порядка. Тогда одночлен u степени n будет базисным, если:

1) $u = u_1 \cdot u_2$, где u_1, u_2 - базисные одночлены и $u_1 > u_2$;

2) если $u_1 = u_1' \cdot u_2'$, то $u_2' \leq u_2$.

Одночлены степени n будем считать следующими за одночленами младших степеней, а отношение порядка для одночленов степени n установим так: если u и v - одночлены степени n и $u = u_1 \cdot u_2$, $v = v_1 \cdot v_2$, то $u > v$, если $u_1 > v_1$, или $u_1 = v_1$, но $u_2 > v_2$.

ЛЕММА I. Аддитивную базу идеала $\mathcal{L}_{(k+1,k)}$ образуют те базисные одночлены u кольца $\mathcal{L}$, которые имеют степень, не меньшую $2k+1$, и для которых в разложении $u = u_1 \cdot u_2$ степень u_2 не меньше k.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим совокупность всех таких одночленов через A. Очевидно включение $A \subset \mathcal{L}_{(k+1,k)}$. Ясно, что для доказательства леммы I достаточно показать, что если u и v - базисные одночлены $u \in \mathcal{L}_{k+1}$, $v \in \mathcal{L}_k$, то разложение произведения $u \cdot v$ в сумму базисных одночленов будет содержать лишь одночлены из A.

Пусть $u=((\dots(u_s u_{s-1})u_{s-2})\dots u_2)u_1$ - правонормированная схема получения одночлена u. Тогда, как показано в работе[I], старший член $\overline{uv}$ разложения $u \cdot v$ имеет вид:

$$u=((\dots(u_s u_{s-1})u_{s-2})\dots u_i)v)\dots u_2)u_1,$$

где u_i - первый справа множитель такой, что $u_i \leq v$. Так как $\overline{uv}$ - базисный, то выполняются следующие неравенства:

$$u_s > u_{s-1} \leq u_{s-2} \leq u_{s-3} \leq \dots \leq u_i \leq v \leq \dots \leq u_2 \leq u_1,$$

а так как степень v не меньше k, то степень u_1 также не меньше k, а это и означает, что $\overline{uv} \in A$.

Пусть z - какой-либо другой член разложения uv, тогда $z \leq \overline{uv}$, и если $z=z_1 \cdot z_2$, то, так как степени z и $\overline{uv}$ одинаковы, имеем: $z_2 \geqslant u_1$ и тем самым $z \in A$.

Лемма I доказана.

Из доказанной леммы следует, что аддитивной базой свободного $(k+1,k)$ - кольца Ли будет служить множество тех базисных одночленов, правые множители которых имеют степень, меньшую k, и те базисные одночлены, которые имеют вид $u=u_1 \cdot u_2$, где степени u_1 и u_2 равны k. Иными словами, аддитивная база свободного $(k+1,k)$ -кольца Ли состоит из всех базисных одночленов степени, не большей $2k$, и из тех базисных одночленов степени, большей $2k$, правые множители которых имеют степень меньшую k. Указанные одночлены служат свободными образующими свободной абелевой группы, которую образуют элементы свободного $(k+1,k)$ -кольца Ли по сложению.

Пусть $\langle n_1, n_2, \dots, n_s \rangle$ - некоторая последовательность натуральных чисел, $\mathcal{L}_{n_1,n_2,\dots,n_s}$ - идеал свободного кольца Ли, определяемый индуктивно следующим образом: $\mathcal{L}_{n_1}$ - n_1 -ый член нижнего центрального ряда кольца $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{L}_{n_1,n_2,\dots,n_{i-1},n_i}=(\mathcal{L}_{n_1,n_2,\dots,n_{i-1}})_{n_i} -$$

n_i -ый член нижнего центрального ряда кольца $\mathcal{L}_{n_1,n_2,\dots,n_{i-1}}$

Как известно, фактор-кольцо $R=\mathcal{L}/\mathcal{L}_{n_1,n_2,\dots,n_s}$ называется свободным полинильпотентным кольцом Ли, отвечающим после-

довательности $\langle n_1, n_2, \ldots, n_s \rangle$. Как показано в работе [I], факторы R_i/R_{i+1} нижнего центрального ряда кольца R -свободные абелевы группы, и базу фактора R_i/R_{i+1} образуют одночлены степени i, вернее их образы, лежащие во множестве $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_s$, где B_i строятся следующим образом:

B_1 - совокупность всех базисных одночленов, построенных на свободных образующих x_i, $i \in M = \{1, 2, \ldots, n\}$, имеющих степень меньшую, чем n_1.

$x^{(1)}_{\alpha_1}, \alpha_1 \in M_1$ - те базисные одночлены, построенные на x_i, которые имеют степень $\geqslant n_1$, правые множители которых имеют степень $< n_1$.

B_2 - совокупность всех базисных одночленов, построенных на $x^{(1)}_{\alpha_1}$, имеющих степень относительно $x^{(1)}_{\alpha_1}$ меньшую, чем n_2. Аналогично строятся и остальные множества B_i, $i = 3, \ldots, s$.

Полагая $s=2$, $n_1 = k$, $n_2 = 2$, получим, что B_2 состоит из базисных одночленов $x^{(1)}_{\alpha_1}$, то есть из базисных одночленов, построенных на x_i степени $\geqslant k$, правые множители которых имеют степень $< k$. Остальные базисные одночлены, очевидно, содержатся в $\mathcal{L}_{(k+1,k)}$.

Таким образом, одночлены степени $\geqslant 2k+1$, входящие в аддитивную базу свободного $(k+1,k)$ -кольца Ли, те же, что и в полинильпотентном кольце ли, отвечающем последовательности $\langle k, 2 \rangle$.

Из приведенных соображений вытекает

ЛЕММА 2. Пусть L - свободное $(k+1,k)$ - кольцо Ли и

$$L = L_1 \supset L_2 \supset \ldots \supset L_{2k} \supset L_{2k+1} \supset \ldots$$

его нижний центральный ряд. Тогда факторы этого ряда по сложению являются свободными абелевыми группами.

Ранги свободных абелевых групп L_{i-1}/L_i при $i \leq 2k+1$ те же, что и в случае свободного кольца Ли, а при $i > 2k+1$ те же, что в случае свободного полинильпотентного кольца Ли, отвечающего последовательности $\langle k, 2 \rangle$.

Ранги факторов нижнего центрального ряда свободного кольца Ли могут быть подсчитаны по формуле Витта [2], а для свободного двуступенно разрешимого кольца Ли ранги факторов указаны в [3]. Поэтому по лемме 2 можно подсчитать ранги факторов нижнего центрального ряда свободного (3,2) - кольца.

Группу G будем называть (k,l)-группой, если в ней выпол-

няется тождество:

$$[[x_1,\dots,x_k],[x_{k+1},\dots,x_{k+l}]]=1,$$

где $[x_1,\dots,x_i]$ означает, как обычно, правонормированный коммутатор элементов $x_1,\dots,x_i$. Свободная группа многообразия, определяемого этим тождеством, будет называться свободной (k,l)-группой.

ЛЕММА 3. *k-ый член нижнего центрального ряда свободной $(k+1,k)$-группы конечного ранга есть прямое произведение свободной нильпотентной группы класса 2 конечного ранга и свободной абелевой группы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F - свободная группа конечного ранга, F_i - её i-ый член нижнего центрального ряда,

$$G=F/[F_{k+1},F_k]$$ -

свободная $(k+1,k)$-группа.

Очевидно, что F_k/F_{k+1} -свободная абелева группа конечного ранга. Пусть $x_1,x_2,\dots,x_s,\dots$ - база F_k такая, что образы $x_1,\dots,x_s$ дают базу F_k/F_{k+1}, а $x_i\in F_{k+1}$ при $i>s$.

Пусть $N\subset[F_{k+1},F_k]$ - нормальный делитель в F_k, порожденный коммутаторами вида $[x_i,x_j]$ при всех i и $j>s$. Тогда F_k/N есть прямое произведение свободной группы H_1, порожденной элементами $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_s$, и свободной абелевой группы H_2, порожденной элементами $\bar{x}_s,\bar{x}_{s+1},\dots$. Здесь $\bar{x}_i$ есть образ x_i в F_k/N.

Очевидно, что образом F_{k+1} в F_k/N служит $H_1'\times H_2$, где H_1' - коммутант группы H_1, а тогда образом $[F_{k+1},F_k]$ служит

$$[H_1'\times H_2,H_1\times H_2]=[H_1',H_1]=(H_1)_3$$ —

третий член нижнего центрального ряда группы H_1. Но тогда

$$F_k/[F_{k+1},F_k]=\Gamma_1\times\Gamma_2,$$

где Γ_1 - свободная нильпотентная группа класса 2, Γ_2 - свободная абелева группа. Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. *Центром свободной $(k+1,k)$-группы конечного ранга является коммутант $[G_k,G_k]$ её k-го члена ниж-*

него центрального ряда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как легко проверить непосредственным вычислением, во всякой группе выполняется тождество:

$$[x,y,z^x]\cdot[z,x,y^z]\cdot[y,z,x^y]=1,$$

где a^b означает $b^{-1}ab$.

Полагая

$$x=[x_1,\dots,x_k],\ y=x_{k+1},\ z=[x_{k+2},\dots,x_{2k+1}],$$

получим в $(k+1,k)$ -группе:

$$[x,y,z^x]=[[x_1,\dots,x_k,x_{k+1}],[x_{k+2},\dots,x_{2k+1}]^x]=$$
$$=[[x_1,\dots,x_{k+1}],[x_{k+2}^x,\dots,x_{2k+1}^x]]=1.$$

Аналогично:

$$[y,z,x^y]=[[x_{k+1},[x_{k+2},\dots,x_{2k+1}]],[x_1^y,\dots,x_k^y]]=$$
$$=[[x_{k+2},\dots,x_{2k+1},x_{k+1}],[x_1^y,\dots,x_k^y]]=1.$$

Таким образом, в $(k+1,k)$ -группе выполняется тождество:

$$[[[x_{k+2},\dots,x_{2k+1}],[x_1,\dots,x_k]],x_{k+1}^z]=1.$$

Ввиду того, что x_{k+1} произвольно, получаем:

$$[G_k,G_k]\subset Z(G),$$

где $Z(G)$ - центр группы G. Обратное включение показывается следующим рассуждением. Фактор-группа $G/[G_k,G_k]$ будет свободной полинильпотентной группой, отвечающей последовательности $\langle k,2\rangle$ и, следовательно, группой без центра, а тогда

$$Z(G)\subset[G_k,G_k].$$

ЛЕММА 5. Центр свободной $(k+1,k)$ -группы конечного ранга является свободной абелевой группой, свободными образующими которой служат базисные коммутаторы вида $[u,v]$, где u,v - базисные коммутаторы веса k.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по лемме 3 $G_k=\Gamma_1\times\Gamma_2$, то по лемме 4 $Z(G)=[G_k,G_k]=\Gamma_1'$, а коммутант свобод -

ной нильпотентной группы класса 2 есть свободная абелева группа.

Далее, если g_α, $\alpha \in N$, - свободные образующие Γ_1, то, предполагая N упорядоченным, получим, что свободными образующими $Z(G)=\Gamma_1'$ будут коммутаторы вида $[g_\alpha, g_\beta]$ при $\alpha > \beta$. Если F - свободная группа, то в качестве свободных образующих фактора F_k/F_{k+1} можно взять, как известно, базисные коммутаторы веса k. При гомоморфизме

$$F_k \to F_k / [F_{k+1}, F_k]$$

F_{k+1} отобразится в центр, то есть в свободной $(k+1,k)$ -группе база G_k может быть найдена в виде $g_\alpha = u_\alpha \cdot f_\alpha$, где u_α - базисные коммутаторы веса k, а f_α лежат в центре G_k. Но тогда $[g_\alpha, g_\beta] = [u_\alpha, u_\beta]$, и так как u_α, u_β - базисные коммутаторы одного веса k, то и коммутатор $[u_\alpha, u_\beta]$ также базисный.

Лемма 5 доказана.

Пусть L - свободное $(k+1,k)$ -кольцо Ли с образующими $x_1, \ldots, x_n$. Пополняя L рациональными коэффициентами, получим очевидным образом алгебру $R(L)$ над полем рациональных чисел. Совокупность однородных элементов степени i алгебры $R(L)$ обозначим через $R_i(L)$.

Далее, пополним алгебру $R(L)$ до алгебры рядов $\bar{L}$: элементами из $\bar{L}$ служат ряды вида $\sum_1^\infty z_i$, где $z_i \in R_i(L)$; сложение производится покомпонентно, а умножение по формуле

$$(\sum y_i)(\sum z_i) = \sum c_{k+1},$$

где

$$c_{k-1} = y_1 z_k + \ldots + y_k z_1 .$$

При помощи формулы Кэмпбела - Хаусдорфа [4]

$$x \circ y = x + y + \frac{1}{2} xy + \ldots \qquad (I)$$

на $\bar{L}$ вводим новую операцию, относительно которой $\bar{L}$ становится группой $\bar{L}^\circ$.

Если $\bar{L}_i$ - совокупность элементов из $\bar{L}$ вида $\sum_{n=i}^\infty z_n$, то $\bar{L}_i$ - идеал и $\bigcap_{i=1}^\infty \bar{L}_i = 0$, поэтому $\bar{L}$ аппроксимируется алгебрами $\tilde{L}_i = \bar{L}/\bar{L}_i$, каждая из которых нильпотентна.

Если $\tilde{L}_i^\circ$ - группа, построенная на элементах из $\tilde{L}_i$ с операцией, задающейся по формуле (I), то каждая $\tilde{L}_i^\circ$ нильпотентна и $\bar{L}^\circ$ аппроксимируется группами $\tilde{L}_i^\circ$.

Далее, так как $\tilde{L}_i$ - нильпотентная алгебра с тождеством:

$$(\ldots((\ell_1\ell_2)\ell_3)\ldots\ell_{k+1})\cdot(\ldots(((\ell_{k+2}\ell_{k+3})\ell_{k+4})\ldots\ell_{2k+1})=0,$$

то, как показано в работе [I], в группах $\tilde{L}_i^o$ выполняется тождество:

$$[[g_1,\ldots,g_{k+1}]\cdot[g_{k+2},\ldots,g_{2k+1}]]=1,$$

то есть группы $\tilde{L}_i^o$ являются $(k+1,k)$-группами, а тогда и аппроксимируемая ими группа $\bar{L}^o$ также будет $(k+1,k)$-группой.

Пусть G^o - подгруппа группы $\bar{L}^o$, порожденная свободными образующими $x_1,\ldots,x_r$ кольца L.

ТЕОРЕМА I. Группа G^o является свободной $(k+1,k)$-группой, а $x_1,\ldots,x_r$ - её свободными образующими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G - свободная $(k+1,k)$-группа. Так как G^o является $(k+1,k)$-группой, то существует гомоморфизм $\varphi: G\to G^o$, переводящий свободные образующие группы G в $x_1,\ldots,x_r$. Ядро φ лежит в центре G.

Действительно, пусть $a\in G$, $a\bar{\in}Z(G)$ и $a\varphi=1$. Тогда, рассматривая $G_1=G/Z(G)$-свободную полинильпотентную группу, отвечающую последовательности $\langle k,2\rangle$, и соответствующее кольцо Ли L_1, аналогично предыдущему последовательно получим алгебру Ли $\bar{L}_1$ и по формуле (I) группу G_1^o. Гомоморфизм φ индуцирует гомоморфизм $\psi: G_1\to G_1^o$, переводящий $\bar{a}$-образ a в $G/Z(G)$ - в единицу, что невозможно, так как $\bar{a}\neq 1$ и известно, что ψ - изоморфизм.

Итак, ядро φ лежит в центре G.

С другой стороны, $Z(G)$ - свободная абелева группа, образующими которой являются базисные коммутаторы вида $[u,v]$, где u,v - базисные коммутаторы веса k. Их образы при гомоморфизме φ в группе G^o также суть базисные коммутаторы от элементов $x_1,\ldots,x_r$.

Рассматривая $x_1,\ldots,x_r$ как элементы алгебры $\bar{L}$ и применяя формулу (I), увидим, что разложения этих базисных коммутаторов в ряды в качестве младших членов будут содержать базисные одночлены от образующих $x_1,\ldots,x_r$, которые линейно независимы в алгебре $\bar{L}$. Тогда эти образы независимы и в G^o, то есть φ - изоморфизм. Теорема I доказана.

Перечислим некоторые следствия этой теоремы.

I. Свободная $(k+1,k)$-группа аппроксимируется нильпотентными группами и поэтому пересечение членов нижнего центрального ряда такой группы равно E.

Ссылаясь на аппроксимационную теорему, доказанную в работе

[5], можно утверждать, что

2. Свободная $(k+1,k)$ -группа определяется структурой своих подгрупп и каждый структурный изоморфизм порождается в точности одним групповым изоморфизмом.

Из соображений, аналогичных приведенным при доказательстве теоремы 3.I работы [I], вытекает:

3. Кольцо Ли свободной $(k+1,k)$ -группы является свободным $(k+1,k)$ -кольцом Ли. Из последнего и леммы 2 следует:

4. В свободной $(k+1,k)$ -группе факторы нижнего центрального ряда являются свободными абелевыми группами.

В заключение рассмотрим вопрос о свободных $(k+1,k)$ – подгруппах свободной $(k+1,k)$ -группы.

ТЕОРЕМА 2. Элементы $x_1,\dots,x_s$ свободной $(k+1,k)$ -группы G тогда и только тогда свободно порождают свободную $(k+1,k)$ -группу, когда они линейно независимы по модулю коммутанта группы G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G_1=\{x_1,\dots,x_s\}$ - свободная $(k+1,k)$-группа. Очевидно, что пересечение $G_1\cap Z(G)$ содержится в центре G_1. С другой стороны, так как G_1 - свободная $(k+1,k)$-группа, то по лемме 4

$$Z(G_1)=[(G_1)_k,(G_1)_k]\subset[G_k,G_k]\cap G_1=G_1\cap Z(G).$$

Таким образом,

$$G_1\cap Z(G)=Z(G_1).$$

Рассмотрим фактор-группу $\bar{G}={}^{G}/_{Z(G)}$ - свободную полинильпотентную группу, отвечающую последовательности $\langle k,2\rangle$. В ней, по доказанному, образы элементов $x_1,\dots,x_s$ свободно порождают свободную полинильпотентную группу, отвечающую то же последовательности. Теорема для свободных полинильпотентных групп, аналогичная доказываемой, установлена в работе [I], поэтому образы $x_1,\dots,x_s$ линейно независимы по модулю коммутанта фактор-группы, но тогда $x_1,\dots,x_s$ линейно независимы по модулю коммутанта G. Справедливость теоремы в другую сторону непосредственно следует из теоремы 4.2 работы [I] и следствий I и 4 теоремы I.

Автор выражает благодарность А.Л.Шмелькину за полезные советы и замечания.

Поступила в редакцию
27.У.1966 г.

Литература

I. А.Л.Шмелькин. Свободные полинильпотентные группы. - Изв. АН СССР, 1964, 28, № I, стр. 9I-I22.

2. М.Холл. Теория групп. - М., И.Л., I962.

3. K.T.Chen. Integration in the free groups. Ann.of Math. 54 (1951) 147 -162.

4. Н.Джекобсон. Алгебры Ли. - М., "Мир", I964.

5. Л.Е.Садовский. Аппроксимационная теорема и структурные изоморфизмы. - ДАН, I965, I6I, № 2, стр. 300-303.