Алгебра и логика, 56, № 2 (2017), 202—225

DOI: 10.17377/alglog.2017.56.205 УДК 512.554.3+510.67

ОБ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫХ АЛГЕБР ЛИ*)

Е. Н. ПОРОШЕНКО

Введение

Пусть X — конечное множество, и $G = \langle X, E \rangle$ — неориентированный граф без петель, множеством вершин которого является множество X, а множеством рёбер — некоторое симметричное отношение на множестве X, т. е. подмножество множества $X \times X$. Таким образом, элементами множества E являются неупорядоченные пары, которые будут обозначаться как $\{x, y\}$, где $x, y \in X$.

Частично коммутативной алгеброй Ли над кольцом R с единицей называется R-алгебра с множеством порождающих X и множеством определяющих соотношений

$$[x_i, x_j] = 0, \text{ где } \{x_i, x_j\} \in E. \tag{1}$$

(Здесь и далее $[g, h]$ обозначает лиевское произведение элементов g и h.) Будем обозначать эту алгебру через $\mathcal{L}_R(X; G)$, а если не возникает неоднозначности — через $\mathcal{L}(X; G)$. Граф G называется *определяющим графом* соответствующей алгебры. Таким образом, $\mathcal{L}_R(X; G) = \mathcal{L}_R(X)/I$, где $\mathcal{L}_R(X)$ — свободная алгебра Ли с множеством порождающих X, а I — идеал, порождённый множеством соотношений (1).

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 15-01-01485, и Министерства образования и науки Российской Федерации, гос. задание № 214/138, проект 1052.

Определение частично коммутативных алгебр Ли аналогично определениям других частично коммутативных структур: групп, моноидов и т. д. [1].

Частично коммутативные группы являются объектом пристального внимания [2–8]. В частности, в [5–8] исследуются свойства универсальных теорий частично коммутативных метабелевых групп.

Частично коммутативные алгебры (как ассоциативные, так и алгебры Ли) изучены значительно меньше, однако и для них тоже получен ряд результатов [9–15]). В частности, в [14, 15] изучаются универсальные теории частично коммутативных метабелевых алгебр Ли в двух частных случаях: когда определяющие графы алгебр являются деревьями и когда они являются циклами. Здесь те же самые вопросы решаются для случая частично коммутативных алгебр Ли.

В § 1 даются необходимые определения и формулируются полученные ранее результаты, которыми мы будем пользоваться в этой работе. В § 2 доказывается, что две частично коммутативные метабелевы алгебры Ли, определяющие графы которых являются циклами, универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда циклы имеют одинаковую длину. В § 3 определяются необходимые и достаточные условия совпадения универсальных теорий алгебр, определяющими графами которых являются деревья.

§ 1. Предварительные сведения

Рассмотрим произвольный неориентированный граф $H = \langle Y; D\rangle$ без петель, для которого Y — это множество вершин, и D — множество рёбер. Если вершины x и y смежны, т. е. $\{x, y\} \in D$, то будем использовать запись $x \overset{H}{\leftrightarrow} y$. Аналогично, если $Y' \subseteq Y$ и y — вершина графа H, смежная со всеми вершинами множества Y' в нём, то будем использовать обозначение $y \overset{H}{\leftrightarrow} Y'$. Наконец, для $Y', Y'' \subseteq Y$ будем использовать запись $Y' \overset{H}{\leftrightarrow} Y''$, если $y_1 \leftrightarrow y_2$ для любых элементов $y_1 \in Y'$ и $y_2 \in Y''$. В случае, когда речь идёт об исходном графе, т. е. о графе $G = \langle X; E\rangle$, который является определяющим для рассматриваемой частично коммутативной алгебры Ли $\mathcal{L}(X;G)$, мы будем опускать явное указание графа в обозначениях, т. е. вместо $\overset{H}{\leftrightarrow}$ будем использовать $\leftrightarrow$.

Отметим, поскольку рассматриваются только графы без петель, из $x \overset{H}{\leftrightarrow} X'$ для произвольного графа H следует, что $x \notin X'$, а из $X' \overset{H}{\leftrightarrow} X''$ — что $X' \cap X'' = \varnothing$.

Напомним, что *степенью* вершины x графа G называется количество вершин, смежных с x в G.

Пусть $X^\star$ — множество всех ассоциативных слов алфавита X (включая пустое слово, которое мы будем обозначать 1). Произвольным образом упорядочим множество X и распространим линейный порядок до лексикографического порядка на множестве $X^\star$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Моном $u \in X^\star$ называется *ассоциативным словом Линдона–Ширшова*, если для любых непустых $v, w \in X^\star$, таких что $u = vw$, выполнено $wv < u$.

Рассмотрим множество всех неассоциативных слов алфавита X (пустое слово из рассмотрения исключаем), т. е. множество всех слов со всеми возможными способами расставления на них скобок (обозначим его как X^+). В следующем определении, а также в лемме 3.8 для произвольного неассоциативного слова $[u]$ будем обозначать через u ассоциативное слово, полученное из $[u]$ стиранием скобок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Неассоциативные слова Линдона–Ширшова* определяется по индукции:

(1) все элементы множества X являются неассоциативными словами Линдона–Ширшова;

(2) пусть уже определены неассоциативные слова Линдона–Ширшова длины, меньшей n, тогда лиевский моном $[u] \in X^+$ длины n называется *неассоциативным словом Линдона–Ширшова*, если

(i) ассоциативное слово u является ассоциативным словом Линдона–Ширшова;

(ii) из $[u] = [[u_1], [u_2]]$ вытекает, что $[u_1]$ и $[u_2]$ — неассоциативные слова Линдона–Ширшова и $u_1 > u_2$;

(iii) из $[u_1] = [[u_{11}], [u_{12}]]$ вытекает, что $u_2 \geqslant u_{12}$.

Слова данного вида рассматривались в [16, 17]. Множество всех неассоциативных слов Линдона–Ширшова в алфавите X будем обозначать как $\mathrm{LS}(X)$. Согласно [18] множество $\mathrm{LS}(X)$ является линейным базисом свободной R-алгебры Ли с множеством порождающих X.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть $\mathcal{L}(X; G)$ — частично коммутативная алгебра Ли с множеством порождающих X и определяющим графом G. *Частично коммутативные слова Линдона–Ширшова* (PCLS-*слова*) определяются по индукции:

(1) элементы множества X являются PCLS-словами;

(2) LS-слово $[u]$ длины, большей 1, является PCLS-словом, если $[u] = [[v], [w]]$, где $[v]$ и $[w]$ — PCLS-слова, причём в графе G первая буква слова $[w]$ не соединена ребром хотя бы с одной буквой слова $[v]$.

В [12] доказано, что при любом линейном упорядочении множества X множество всех PCLS-слов является линейным базисом частично коммутативной алгебры $\mathcal{L}(X; G)$. Мономы, являющиеся PCLS-словами, будем называть *базисными.* Упорядочение множества X, при котором рассматриваются базисные элементы, либо ясно из контекста, либо явно задано.

Базисные лиевские мономы будем обозначать строчными буквами латинского алфавита, взятыми в квадратные скобки, напр., $[u]$. Если в лиевском мономе использована левонормированная расстановка скобок, то будем опускать все скобки, кроме внешних, т. е. вместо $[\ldots[x_{i_1}, x_{i_2}], \ldots, x_{i_r}]$ будем использовать $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Пусть $[u]$ — базисный лиевский моном на множестве порождающих X. *Мультистепенью* монома $[u]$ назовём вектор $\overline{\delta} = (\delta_0, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1})$, где δ_i — это число вхождений порождающего x_i в моном $[u]$.

Мультистепень базисного монома $[u]$ будем обозначать как $\mathrm{mdeg}\,([u])$, а число вхождений порождающего x_i в лиевский моном $[u]$ — через $\mathrm{mdeg}_i([u])$.

Пусть $[u]$ — лиевский моном и $\operatorname{mdeg}[u] = (\delta_0, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1})$. Введём обозначение $\operatorname{supp}([u]) = \{x_i \mid \delta_i \neq 0\}$ и распространим это обозначение на множество лиевских многочленов: пусть $g = \sum_j \alpha_j [u_j]$, тогда $\operatorname{supp}(g) = \bigcup_j \operatorname{supp}([u_j])$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Ненулевой элемент g алгебры $\mathcal{L}(X;G)$ называется *мультиоднородным*, если g представим в виде линейной комбинации базисных лиевских мономов одной и той же мультистепени $\overline{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$.

Распространим понятие мультистепени на множество мультиоднородных элементов алгебры $\mathcal{L}(X;G)$, полагая $\operatorname{mdeg}(g) = \operatorname{mdeg}([u])$, где $[u]$ — произвольный базисный лиевский моном, входящий с ненулевым коэффициентом в разложение g в виде линейной комбинации базисных (при некотором упорядочении порождающих) лиевских мономов.

Отметим, что в силу мультиоднородности тождеств алгебры Ли и определяющих соотношений частично коммутативной алгебры справедливо следующее утверждение. Если $0 = \sum_i g_i$ в алгебре $\mathcal{L}(X;G)$, где каждое слагаемое g_i является мультиоднородным лиевским многочленом, причём все g_i имеют различные мультистепени, то в этой алгебре $g_i = 0$ для всех i. Также из мультиоднородности тождеств алгебры Ли и определяющих соотношений частично коммутативной алгебры следует, что мультиоднородный (при некотором упорядочении) элемент g остаётся таковым и при любом другом упорядочении множества X. Более того, мультистепень мультиоднородного многочлена не зависит от упорядочения множества X.

Пусть $f, g \in \mathcal{L}(X;G)$. Запись $f \backsim g$ означает, что $\alpha f = \beta g$ для некоторых $\alpha, \beta \in R \setminus \{0\}$. Если $f \backsim g$, то $[f, g] = 0$ в $\mathcal{L}(X;G)$ (даже в $\mathcal{L}(X)$). Понятно, что отношение $\backsim$ является эквивалентностью.

Пусть H — произвольный неориентированный граф. Через $V(H)$ и $E(H)$ будем обозначать соответственно множество вершин и множество рёбер этого графа. Далее, пусть $V' \subseteq V(H)$. Через $H(V')$ обозначим подграф графа H, построенный на множестве вершин V'. Напомним, что через $\overline{H}$ обозначается граф $\langle V(H), (V(H))^2 \setminus (E(H) \cup \operatorname{id}_{V(H)}) \rangle$, где для произвольного множества S через id_S обозначается тождественное бинарное отношение $\mathrm{id}_S = \{(x, x) \mid x \in S\}$; этот граф называется *дополнением* графа H.

Через $C(g)$ обозначим централизатор элемента g из частично коммутативной алгебры $\mathcal{L}(X; G)$.

ТЕОРЕМА 1.6 [13]. *Пусть $g \in \mathcal{L}(X; G)$, $H = \overline{G}(\mathrm{supp}\,(g))$ и $H_1, \dots, H_p$ — компоненты связности графа H. Тогда*

(1) *имеет место представление $g = \sum\limits_{i=1}^{p} g_i$, где $\mathrm{supp}\,(g_i)$ состоит из вершин графа H_i для всех $i = 1, 2, \dots, p$;*

(2) *$C(g)$ состоит из элементов вида $h = \sum\limits_{i=1}^{p} h_i + h'$, где $g_i \backsim h_i$ для всех $h_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, p$, и $\mathrm{supp}\,(g) \leftrightarrow \mathrm{supp}\,(h')$ для $h' \neq 0$.*

Напомним некоторые понятия, связанные с универсальными теориями алгебраических систем. Пусть Φ — формула без свободных переменных, в записи которой содержатся элементы некоторой алгебры A. Если эта формула истинна, будем использовать $A \models \Phi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. $\exists$-*предложением* называется формула без свободных переменных, имеющая вид

$$\exists w_1, \dots, w_m \Phi(w_1, \dots, w_m),$$

где $\Phi(w_1, \dots, w_m)$ — это формула исчисления предикатов соответствующей алгебраической системы, не содержащая кванторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Множество всех $\exists$-предложений, истинных в алгебре Ли L, называется её *экзистенциальной теорией* или $\exists$-*теорией* алгебры Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Две алгебры Ли называются *экзистенциально эквивалентными*, если их экзистенциальные теории совпадают.

Аналогично определяется $\forall$-*предложение*, *универсальная теория* (или $\forall$-*теория*) алгебры Ли и *универсально эквивалентные* алгебры Ли.

Легко заметить, что алгебры Ли L_1 и L_2 экзистенциально эквивалентны тогда и только тогда, когда эти алгебры универсально эквивалентны.

В теории моделей хорошо известна процедура замены функциональных символов на предикатные. Любое множество вместе со всеми предикатами, индуцированными на нём, является подмоделью.

Хорошо известна следующая

ТЕОРЕМА 1.10. *Произвольные алгебраические системы (в том числе и алгебры Ли) L_1 и L_2 универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда для каждой конечной подмодели одной алгебраической системы существует изоморфная ей подмодель в другой алгебраической системе.*

§ 2. Алгебры, определяющие графы которых являются циклами

В этом параграфе будем рассматривать только алгебры, определяющими графами которых являются циклы на n вершинах, $n \geqslant 3$. Обозначим такие графы через C_n.

Будем считать, что $X = \mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, а операции сложения и вычитания определены естественным (для кольца вычетов $\mathbb{Z}_n$) образом. Тогда для произвольных $r, s \in \mathbb{Z}_n$ через $|r - s|$ обозначим минимальный (в смысле обычного порядка $0 < 1 < \dots < n-1$) из элементов $r - s, s - r$.

Рассмотрим предложение

$$\Phi(m) = \exists z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \Theta(z_0, z_1, \dots, z_{m-1}),$$

где

$$\Theta(z_0, z_1, \dots z_{m-1}) = \left(\bigwedge_{i \in \mathbb{Z}_m} [z_i, z_{i+1}] = 0 \wedge \bigwedge_{i,j \in \mathbb{Z}_m : |j-i| > 1} [z_i, z_j] \neq 0 \right), \qquad (2)$$

Установим несколько условий, которым должны удовлетворять элементы $g_0, g_1, \dots, g_{m-1} \in \mathcal{L}(X; C_n)$, чтобы $\mathcal{L}(X; C_n) \models \Theta(g_0, g_1, \dots, g_{m-1})$.

ЛЕММА 2.1. *Пусть для $m \geqslant 4$, $n \geqslant 5$ элементы $g_0, g_1, \dots, g_{m-1} \in \mathcal{L}(X; C_n)$ удовлетворяют формуле $\Theta(z_0, z_1, \dots, z_{m-1})$. Тогда $|\mathrm{supp}\,(g_i)| \leqslant 3$ для $i = 0, 1, \dots, m-1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть формула $\Theta(g_0, g_1, \ldots, g_{m-1})$ истинна для некоторых $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$, таких что $|\mathrm{supp}\,(g_i)| \geqslant 4$ для некоторого $i \in \mathbb{Z}_m$.

Докажем, что граф $\overline{C}_n(\mathrm{supp}\,(g_i))$ связен. Пусть $X_1 = \{x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, x_{k_4}\}$ — произвольное подмножество множества $\mathrm{supp}\,(g_i)$. Так как $n \geqslant 5$, среди этих вершин найдётся та, чья степень в графе $C_n(X_1)$ не больше 1. Можно считать, что таковой является вершина x_{k_1}. Следовательно, в графе $\overline{C}_n(X_1)$ она соединена как минимум с двумя из трёх остальных вершин, скажем, с x_{k_2}, x_{k_3}. Степень вершины x_{k_4} в графе $C_n(X_1)$ не больше 2, значит степень этой вершины в графе $\overline{C}_n(X_1)$ не меньше 1. Таким образом, либо x_{k_1} и x_{k_4} смежны в графе $\overline{C}_n(X_1)$, либо x_{k_4} смежна с хотя бы одной из x_{k_2} и x_{k_3} в этом графе. Следовательно, существует путь из x_{k_1} в любую из трёх оставшихся вершин графа $\overline{C}_n(X_1)$. Поэтому для любой пары вершин из X_1 существует путь, их соединяющий.

В силу произвольности выбора четвёрки вершин графа $\overline{C}_n(\mathrm{supp}\,(g_i))$ в этом графе для любых его двух вершин существует путь между ними, т. е. граф $\overline{C}_n(\mathrm{supp}\,(g_i))$ связен.

Исходный граф циклический, поэтому не существует вершины $x \in \in X$, такой что $x \leftrightarrow \mathrm{supp}\,(g_i)$. Из (2) и теоремы 1.6 вытекает, что $g_i \backsim g_{i+1}$ и $g_i \backsim g_{i-1}$. Следовательно, $g_{i-1} \backsim g_{i+1}$, а значит $[g_{i-1}, g_{i+1}] = 0$. Так как $m \geqslant 4$ это противоречит истинности формулы $\Theta(g_0, g_1, \ldots, g_{m-1})$. $\square$

ЛЕММА 2.2. *Пусть для* $m \geqslant 4$, $n \geqslant 5$ *элементы* $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1} \in \in \mathcal{L}(X; C_n)$ *удовлетворяют формуле* $\Theta(z_0, z_1, \ldots, z_{m-1})$. *Тогда* $|\mathrm{supp}\,(g_i)| \neq \neq 3$ *ни для какого* $i \in \mathbb{Z}_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть формула $\Theta(g_0, g_1, \ldots, g_{m-1})$ истинна для некоторых $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$, таких что $|\mathrm{supp}\,(g_i)| = 3$ для некоторого $i \in \mathbb{Z}_m$.

Отметим, что в графе $\overline{C}_n(\mathrm{supp}\,(g_i))$ не более двух компонент связности. В противном случае каждая компонента связности этого графа состояла бы из одной вершины, а значит граф $C_n(\mathrm{supp}\,(g_i))$ являлся бы полным графом с тремя вершинами, последнее невозможно в силу неравенства $n \geqslant 5$.

Если граф $\overline{C}_n(\mathrm{supp}\,(g_i))$ односвязен, то доказательство аналогично доказательству леммы 2.1.

Осталось рассмотреть случай, когда в графе $\overline{C}_n(\mathrm{supp}\,(g_i))$ две компоненты связности. В графе $C_n(\mathrm{supp}\,(g_i))$ одна вершина смежна с двумя другими, и без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{supp}\,(g_i) = \{x_{k-1}, x_k, x_{k+1}\}$. В этом случае $g_i = g_{i,1} + g_{i,2}$, где $\mathrm{supp}\,(g_{i,1}) = \{x_{k-1}, x_{k+1}\}$ и $\mathrm{supp}\,(g_{i,2}) = \{x_k\}$. Исходный граф циклический, поэтому нет вершины $x \in X$, такой что $x \leftrightarrow \mathrm{supp}\,(g_i)$. Из теоремы 1.6 следует, что $g_{i-1} = g_{i-1,1} + g_{i-1,2}$ и $g_{i+1} = g_{i+1,1} + g_{i+1,2}$, где $g_{i-1,s} \backsim g_{i,s}$ и $g_{i+1,s} \backsim g_{i,s}$ для $s = 1, 2$. Отсюда $g_{i-1,s} \backsim g_{i+1,s}$ для $s = 1, 2$, а значит $[g_{i-1}, g_{i+1}] = 0$. Последнее противоречит истинности формулы $\Theta(g_0, g_1, \dots g_{m-1})$. □

ЛЕММА 2.3. *Пусть для $m \geqslant 4$, $n \geqslant 5$ элементы $g_0, g_1, \dots, g_{m-1} \in \mathcal{L}(X; C_n)$ удовлетворяют формуле $\Theta(z_0, z_1, \dots, z_{m-1})$. Тогда $|\mathrm{supp}\,(g_i)| \neq 2$ ни для какого $i \in \mathbb{Z}_m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что формула $\Theta(g_0, g_1, \dots, g_{m-1})$ истинна для некоторых $g_0, g_1, \dots, g_{m-1}$, таких что $|\mathrm{supp}\,(g_i)| = 2$ для некоторого $i \in \mathbb{Z}_m$. Пусть $\mathrm{supp}\,(g_i) = \{x_{k_1}, x_{k_2}\}$.

Если граф $\overline{C}_n(\mathrm{supp}\,(g_i))$ имеет две компоненты связности, то вершины из $\mathrm{supp}\,(g_i)$ смежны, и можно считать, что $\mathrm{supp}\,(g_i) = \{x_k, x_{k+1}\}$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}_n$. Так как $n \geqslant 5$, не существует вершины $x \in X$, такой что $x \leftrightarrow \mathrm{supp}\,(g_i)$, и дальше рассуждаем аналогично доказательству леммы 2.2.

В случае если граф $\overline{C}_n(\mathrm{supp}\,(g_i))$ односвязен, вершины из $\mathrm{supp}\,(g_i)$ не являются смежными в C_n. Если $|k_1 - k_2| \geqslant 3$, то нет вершины $x \in X$, такой что $x \leftrightarrow \mathrm{supp}\,(g_i)$, и дальше рассуждаем аналогично доказательству леммы 2.1.

Осталось рассмотреть случай, когда $|k_1 - k_2| = 2$. Можно считать, что $\mathrm{supp}\,(g_i) = \{x_{k-1}, x_{k+1}\}$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}_n$. Так как $n \geqslant 5$, x_k — единственная вершина, удовлетворяющая условию $x_k \leftrightarrow \mathrm{supp}\,(g_i)$. Из теоремы 1.6 следует, что $g_{i-1} = g_{i-1,1} + \alpha x_k$, $g_{i+1} = g_{i+1,1} + \beta x_k$, где $g_{i-1,1} \backsim g_i$,

$g_{i+1,1} \backsim g_i$. Следовательно, $g_{i-1,1} \backsim g_{i+1,1}$ и

$$\begin{aligned}[g_{i-1}, g_{i+1}] &= [g_{i-1,1} + \alpha x_k, g_{i+1,1} + \beta x_k] \\ &= [g_{i-1,1}, g_{i+1,1}] + \beta[g_{i-1,1}, x_k] + \alpha[x_k, g_{i+1,1}] = 0.\end{aligned}$$

Последнее противоречит истинности формулы $\Theta(g_0, g_1, \ldots, g_{m-1})$. □

Пусть $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$, $Y = \{y_j \mid j \in \mathbb{Z}_m\}$. Из доказанных лемм вытекает следующая

ТЕОРЕМА 2.4. *Частично коммутативные алгебры $\mathcal{L}(X; C_n)$ и $\mathcal{L}(Y; C_m)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $n = m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что алгебры $\mathcal{L}(X; C_n)$ и $\mathcal{L}(Y; C_3)$, где $X = \{x_j \mid j \in \mathbb{Z}_n\}$ и $Y = \{y_i \mid i \in \mathbb{Z}_3\}$, не являются универсально эквивалентными ни для какого $n \geqslant 4$. Действительно, алгебра $\mathcal{L}(X; C_3)$ абелева, а значит в ней не выполняется предложение

$$\Psi = \exists z_0, z_1\, [z_0, z_1] \neq 0,$$

которое выполняется в любой алгебре $\mathcal{L}(X; C_n)$ при $n \geqslant 4$. Соответственно, будем рассматривать алгебры $\mathcal{L}(X_n; C_n)$, где $n \geqslant 4$.

Нетрудно понять, что предложение $\Phi(m)$ выполняется в алгебре $\mathcal{L}(Y, C_m)$. Для этого достаточно в качестве $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$ взять порождающие, соответствующие последовательным вершинам цикла. Очевидно, что $[z_j, z_k] = 0$ тогда и только тогда, когда $|j - k| \leqslant 1$.

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что $n > m \geqslant 4$.

Предположим, что предложение $\Phi(m)$ выполняется также и в алгебре $\mathcal{L}(X, C_n)$, т. е. существуют $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1} \in \mathcal{L}(X; C_n)$, для которых $\mathcal{L}(X; C_n) \models \Theta(g_0, g_1, \ldots, g_{m-1})$. Из лемм 2.1–2.3 следует, что для всех $i \in \mathbb{Z}_n$ выполнено $g_i = \alpha_i x_{k_i}$, где $\alpha_i \in R\backslash\{0\}$. Можно считать, что $g_0 = \alpha_0 x_0$ (в противном случае перенумеруем порождающие).

Из $[g_0, g_1] = 0$ следует, что g_1 может принимать одно из значений $\alpha_1 x_0, \alpha_1 x_1$ или $\alpha_1 x_{n-1}$. Однако случай $g_1 = \alpha x_0$ не имеет места, иначе из $[g_2, g_1] = 0$ следовало бы $[g_2, g_0] = 0$, что невозможно, т. к. из $n \geqslant 5$ вытекает $|2 - 0| > 1$.

Снова без ограничения общности можно считать, что $g_1 = \alpha_1 x_1$ (если $g_1 = \alpha_1 x_{n-1}$, то перенумеруем порождающие).

Из $[g_2, g_1] = 0$ следует, что g_2 может принимать лишь значения $\alpha_2 x_1, \alpha_2 x_2$ или $\alpha_2 x_0$. Как и выше, случай $g_2 = \alpha_2 x_1$ не имеет места. Невозможен также и случай $g_2 = \alpha_2 x_0$. Действительно, в этом случае $[g_0, g_2] = 0$, что противоречит истинности формулы $\Theta(g_0, g_1, \ldots, g_{m-1})$. Следовательно, $g_2 = \alpha_2 x_2$.

Повторяя рассуждения, получаем, что $g_i = \alpha_i x_i$ для $i = 3, 4, \ldots, m - 1$.

В силу $n > m$ имеем $[g_{m-1}, g_0] \neq 0$; последнее противоречит формуле $\Theta(g_0, g_1, \ldots, g_{m-1})$, т. к. $|0 - (m-1)| = 1$ в $\mathbb{Z}_m$.

Таким образом, если $n > m$, то предложение $\Psi(m)$, истинное в $\mathcal{L}(Y; C_m)$, не является истинным в $\mathcal{L}(X; C_n)$. $\square$

§ 3. Алгебры, определяющие графы которых являются деревьями

В данном параграфе исследуются универсальные теории частично коммутативных алгебр Ли, определяющие графы которых являются деревьями.

Если определяющий граф G алгебры $\mathcal{L}(X; G)$ является деревом, то для любого лиевского многочлена f граф $G(\mathrm{supp}\,(f))$ является *лесом*, т. е. графом без циклов. Для полноты изложения докажем несколько несложных лемм о строении графов.

ЛЕММА 3.1. *Пусть граф $G = \langle X, E \rangle$ — лес, имеющий не меньше двух компонент связности. Тогда граф $\overline{G}$ связен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_i и x_j — две произвольные вершины графа. Если $x_i \not\leftrightarrow x_j$, то в графе $\overline{G}$ эти вершины соединены между собой.

Если вершины x_i и x_j смежны в G, то они лежат в одной компоненте связности. По условию леммы в G не менее двух компонент связности, значит можно выбрать компоненту связности, не содержащую вершин x_i, x_j. Пусть x_l — какая-нибудь вершина из этой компоненты связности. Так как

$x_i \not\leftrightarrow x_l$ и $x_j \not\leftrightarrow x_l$, в графе $\overline{G}$ вершина x_l смежна с x_i и x_j, а значит существует путь, соединяющий x_i и x_j.

В силу произвольности выбора x_i и x_j получаем, что для любых двух вершин графа $\overline{G}$ существует путь, их соединяющий. Следовательно, граф $\overline{G}$ связен. □

ЛЕММА 3.2. *Если граф $G = \langle X; E\rangle$ — дерево, то в графе $\overline{G}$ не более двух компонент связности, причём если $\overline{G}$ не является связным, то одна из его компонент связности состоит из одной вершины.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в графе $\overline{G}$ не менее трёх компонент связности. Предположим, что вершины $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}$ лежат в различных компонентах связности. Эти вершины не смежны в графе $\overline{G}$, поэтому они попарно смежны в графе G. Значит, $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}$ — цикл в этом графе. Это противоречит тому, что G по условию является деревом. Следовательно, в $\overline{G}$ не более двух компонент связности.

Предположим теперь, что в графе $\overline{G}$ ровно две компоненты связности и в каждой из них хотя бы по две вершины. Пусть вершины x_{i_1} и x_{i_2} лежат в одной компоненте связности, а вершины x_{i_3} и x_{i_4} — в другой. Никакая из вершин x_{i_1}, x_{i_2} не смежна ни с одной из вершин x_{i_3}, x_{i_4}, поэтому в графе $\overline{G}$ имеем $\{x_{i_1}, x_{i_2}\} \leftrightarrow \{x_{i_3}, x_{i_4}\}$. Следовательно, граф G содержит цикл $x_{i_1}x_{i_3}x_{i_2}x_{i_4}$; противоречие. Таким образом, если в графе $\overline{G}$ две компоненты связности, то хотя бы одна из них содержит одну вершину. □

ЛЕММА 3.3. *Пусть $G = \langle X; E\rangle$ — дерево и $X_1 \leftrightarrow X_2$ для некоторых $X_1, X_2 \subset X$. Тогда хотя бы одно из множеств X_1, X_2 одноэлементно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим граф $G(X_1 \cup X_2)$. Этот граф является лесом. Так как $X_1 \leftrightarrow X_2$, в графе $\overline{G}(X_1 \cup X_2)$ не менее двух компонент связности. По леммам 3.1 и 3.2 компонент связности ровно две: $G(X_1)$ и $G(X_2)$, при этом хотя бы одна из компонент связности состоит из одной вершины. □

Для дерева G с множеством вершин X через X^* обозначим множество всех вершин G, не являющихся висячими. Назовём граф $G(X^*)$ *внутренностью* дерева G и обозначим через G^*. Очевидно, что G^* также является деревом. Действительно, если есть путь между вершинами x_i и x_j в дереве G, но подобный путь отсутствует в графе G^*, то из каждого такого пути должно быть удалено ребро. Это ребро не может исходить из вершин x_i или x_j, т. к. в этом случае с удалением рёбра мы должны были удалить и одну из этих двух вершин. Следовательно, удалено должно быть ребро из пути в графе G, не исходящее ни из одной из вершин x_i, x_j, но тогда оба конца удалённого ребра не являются висячими вершинами графа G, что невозможно в силу алгоритма построения графа G^*.

Если $|X^*| \geqslant 2$, то для каждой висячей вершины графа G^* выберем по одной смежной с ней вершине из $X \setminus X^*$ (если таких вершин несколько, можно взять любую из них). Множество, полученное добавлением всех этих вершин к X^*, обозначим через X'. Если же $|X^*| = 1$, то в графе G одна из вершин соединена со всеми остальными (которые, соответственно, являются висячими). В этом случае через X' обозначим множество, полученное из X^* добавлением к единственной вершине этого множества двух смежных с ней вершин. Граф $G(X')$ обозначим через G'.

Несмотря на неоднозначность определения множества X', графы G' для различных X' изоморфны.

Пусть $G = \langle X; E\rangle$ — дерево, и $X^* = \{x_{t_0}, x_{t_1}, \ldots, x_{t_{k-1}}\}$. По этому дереву построим предложение

$$\begin{aligned}\Phi(G) = \exists z_0, \ldots, z_{n-1}, &u_0, \ldots, u_{k-1}, v_0, \ldots, v_{k-1}\\ &\Psi(G; z_0, \ldots, z_{n-1}, u_0, \ldots, u_{k-1}, v_0, \ldots, v_{k-1}),\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\begin{gathered}\Psi(G; z_0, \ldots, z_{n-1}, u_0, \ldots, u_{k-1}, v_0, \ldots, v_{k-1}) =\\ = \bigwedge_{x_i \leftrightarrow x_j} [z_i, z_j] = 0 \ \wedge \bigwedge_{x_i \not\leftrightarrow x_j} [z_i, z_j] \neq 0 \ \wedge \bigwedge_{i=0}^{k-1} [[u_i, v_i], z_{t_i}] = 0 \wedge \bigwedge_{i=0}^{k-1} [u_i, v_i] \neq 0.\end{gathered}$$

ЛЕММА 3.4. *Пусть $G = \langle X; E\rangle$ — дерево. Тогда предложение $\Phi(G)$ истинно в алгебре $\mathcal{L}(X; G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо найти значения $z_0, \ldots, z_{n-1}$, $u_0, \ldots, u_{k-1}, v_0, \ldots, v_{k-1}$, для которых истинна формула

$$\Psi(G; z_0, \ldots, z_{n-1}, u_0, \ldots, u_{k-1}, v_0, \ldots, v_{k-1}).$$

Положим $z_i = x_i$ для $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Очевидно, что $[z_i, z_j] = 0$ тогда и только тогда, когда $x_i \leftrightarrow x_j$.

Поскольку $x_i \in X^*$ для $i = 0, 1, \ldots, k-1$, каждая такая вершина смежна как минимум с двумя другими. Для каждой вершины x_i произвольным образом выберем по две различные смежные с x_i вершины $x_{i,1}$ и $x_{i,2}$, а затем положим $u_i = x_{i,1}$ и $v_i = x_{i,2}$.

Отметим, что вершины $x_{i,1}$ и $x_{i,2}$ для $i = 0, 1, \ldots, n-1$ не являются смежными, в противном случае мы бы получили цикл $x_{i,1}x_{i,2}x_i$ в графе G. Таким образом, для выбранных значений u_i и v_i получаем $[u_i, v_i] \neq 0$. Осталось заметить, что из [13] вытекает $[[u_i, v_i], z_i] = 0$ для выбранных значений u_i, v_i и z_i. Следовательно, $\mathcal{L}(X; G) \models \Phi(G)$, что и требовалось доказать. $\square$

ЛЕММА 3.5. *Пусть $G = \langle X; E\rangle$, $H = \langle Y; F\rangle$ — деревья, причём $X^* = \{x_{t_0}, x_{t_1}, \ldots, x_{t_{k-1}}\}$. Предположим, что $\mathcal{L}(Y, H)$ — частично коммутативная алгебра Ли с определяющим графом H, в которой истинна формула $\Psi(G; g_0, \ldots, g_{n-1}, h_0, \ldots, h_{k-1}, f_0, \ldots, f_{k-1})$ для лиевских многочленов $g_0, \ldots, g_{n-1}, h_0, \ldots, h_{k-1}, f_0, \ldots, f_{k-1}$. Тогда $|\mathrm{supp}\,(g_{t_i})| = 1$ для любого $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть формула $\Psi(G; g_0, \ldots, g_{n-1}, h_0, \ldots, h_{k-1}, f_0, \ldots, f_{k-1})$ истинна и $|\mathrm{supp}\,(g_i)| \geqslant 2$ для некоторого $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, такого что $x_i \in X^*$. Так как $H(\mathrm{supp}\,(g_i))$ — лес, по леммам 3.1 и 3.2 граф $\overline{H}(\mathrm{supp}\,(g_i))$ имеет не более двух компонент связности. В силу включения $x_i \in X^*$ степень вершины x_i в графе G не меньше 2. Пусть x_{j_1}, x_{j_2} — две вершины, смежные с x_i в этом графе.

Пусть граф $\overline{H}(\mathrm{supp}\,(g_i))$ связен. Формула

$$\Psi(G; g_0, \ldots, g_{n-1}, h_0, \ldots, h_{k-1}, f_0, \ldots, f_{k-1})$$

истинна, поэтому $[g_i, g_{j_1}] = [g_i, g_{j_2}] = 0$. Из теоремы 1.6 следует, что $g_{j_1} = g_{j_1,1} + g_{j_1,2}$ и $g_{j_2} = g_{j_2,1} + g_{j_2,2}$, где для $t = 1, 2$ выполнено следующее: если $g_{j_t,1} \neq 0$, то $g_{j_t,1} \backsim g_i$, и если $g_{j_t,2} \neq 0$, то $\mathrm{supp}\,(g_{j_t,2}) \leftrightarrow \mathrm{supp}\,(g_i)$.

Имеем

$$\begin{aligned}[g_{j_1}, g_{j_2}] &= [g_{j_1,1} + g_{j_1,2}, g_{j_2,1} + g_{j_2,2}] \\ &= [g_{j_1,1}, g_{j_2,1}] + [g_{j_1,1}, g_{j_2,2}] + [g_{j_1,2}, g_{j_2,1}] + [g_{j_1,2}, g_{j_2,2}] \\ &= [g_{j_1,2}, g_{j_2,2}]\end{aligned} \tag{4}$$

Если хотя бы один из элементов $g_{j_1,2}$, $g_{j_2,2}$ равен 0, то $[g_{j_1}, g_{j_2}] = 0$, что противоречит истинности формулы $\Psi(G; g_0, \ldots, g_{n-1}, h_0, \ldots, h_{k-1}, f_0, \ldots, f_{k-1})$. В самом деле, вершины x_{j_1} и x_{j_2} не могут быть смежными, поскольку они смежны с x_i, а граф G — дерево.

Пусть $g_{j_1,2} \neq 0$ и $g_{j_2,2} \neq 0$. Из леммы 3.3 вытекает, что $\operatorname{supp}(g_{j_1,2}) = \operatorname{supp}(g_{j_2,2}) = y_l$ для некоторого $y_l \in Y$, т.е. $g_{j_1,2} = \alpha_1 y_l$, $g_{j_2,2} = \alpha_2 y_l$ для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in R$. Следовательно, $[g_{j_1,2}, g_{j_2,2}] = 0$, и из (4) получаем $[g_{j_1}, g_{j_2}] = 0$, что снова противоречит формуле $\Psi(G; g_0, \ldots, g_{n-1}, h_0, \ldots, h_{k-1}, f_0, \ldots, f_{k-1})$.

Осталось рассмотреть случай, когда у графа $\overline{H}(\operatorname{supp}(g_i))$ две компоненты связности. Здесь имеет место представление $g_i = g_{i,1} + g_{i,2}$, где $g_{i_1}, g_{i_2} \in \mathcal{L}(Y; H)\backslash\{0\}$, а $\overline{H}(\operatorname{supp}(g_{i,1}))$ и $\overline{H}(\operatorname{supp}(g_{i,2}))$ — компоненты связности графа $\overline{H}(\operatorname{supp}(g_i))$.

Из истинности формулы $\Psi(G; g_0, \ldots, g_{n-1}, h_0, \ldots, h_{k-1}, f_0, \ldots, f_{k-1})$ следует $[g_i, g_{j_1}] = [g_i, g_{j_2}] = 0$. Значит, в силу теоремы 1.6 верно $g_{j_t} = g_{j_t,1} + g_{j_t,2} + g_{j_t,3}$ для $t = 1, 2$, где $g_{i,1} \backsim g_{j_t,1}$, $g_{i,2} \backsim g_{j_t,2}$ и либо $\operatorname{supp}(g_{j_t,3}) \leftrightarrow \operatorname{supp}(g_i)$, либо $g_{j_t,3} = 0$. Однако первый случай невозможен. Действительно, $\operatorname{supp}(g_{j_t,r}) \leftrightarrow \operatorname{supp}(g_{j_t,s})$ для $t = 1, 2$, $s, r \in \{1, 2, 3\}$, $s \neq r$, если соответствующие элементы отличны от 0. Таким образом, если выбрать по одной вершине из каждого $\operatorname{supp}(g_{i,r})$, $r = 1, 2$, и из $\operatorname{supp}(g_{j_t,3})$ для $t = 1$ или $t = 2$, то эти вершины являются вершинами цикла в графе H; противоречие.

Итак, $g_{j_t} = g_{j_t,1} + g_{j_t,2}$ для $t = 1, 2$. Следовательно,

$$\begin{aligned}[g_{j_1}, g_{j_2}] &= [g_{j_1,1} + g_{j_1,2}, g_{j_2,1} + g_{j_2,2}] \\ &= [g_{j_1,1}, g_{j_2,1}] + [g_{j_1,1}, g_{j_2,2}] + [g_{j_1,2}, g_{j_2,1}] + [g_{j_1,2}, g_{j_2,2}] = 0,\end{aligned}$$

т. к. $g_{j_1,r} \backsim g_{j_2,r}$ для $r = 1, 2$ и $\operatorname{supp}(g_{j_t,1}) \leftrightarrow \operatorname{supp}(g_{j_p,2})$ для $t, p = 1, 2$, таких что $g_{j_t,1}, g_{j_p,2} \neq 0$. Это противоречит формуле

$$\Psi(G; g_0, \ldots, g_{n-1}, h_0, \ldots, h_{k-1}, f_0, \ldots, f_{k-1}).$$

Таким образом, мы рассмотрели все гипотетические случаи, когда $|\mathrm{supp}\,(g_i)| \geqslant 2$ для некоторого $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, такого что $x_i \in X^*$, и доказали их невозможность. □

ЛЕММА 3.6. *Пусть $G = \langle X; E\rangle$ и $H = \langle Y; F\rangle$ — деревья, причём $X^* = \{x_{t_0}, x_{t_1}, \ldots, x_{t_{k-1}}\}$. Если $\mathcal{L}(Y; H) \models \Phi(G)$, то G^* изоморфно подграфу графа H^*.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3.5 следует, что если в алгебре $\mathcal{L}(Y; G)$ выполняется формула $\Psi(G; g_0, \ldots, g_{n-1}, h_0, \ldots, h_{k-1}, f_0, \ldots, f_{k-1})$, для некоторых лиевских многочленов $g_0, \ldots, g_{n-1}, h_0, \ldots, h_{k-1}, f_0, \ldots$ $\ldots, f_{k-1}$, то $|\mathrm{supp}\,(g_{t_i})| = 1$. Иными словами, для каждого t_i выполнено $g_{t_i} = \alpha_i y_{s_i}$ при некоторых $s_i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и $\alpha_i \in R$. Очевидно, что $\alpha_i \neq 0$.

Легко видеть, что $y_{s_i} \neq y_{s_j}$ ни для каких $i \neq j$. Действительно, предположим противное. Тогда $[g_{t_i}, g_{t_j}] = [\alpha_i y_{s_i}, \alpha_j y_{s_j}] = 0$. Формула $\Psi(G; g_0, \ldots, g_{n-1}, h_0, \ldots, h_{k-1}, f_0, \ldots, f_{k-1})$ истинна, поэтому вершины x_{t_i} и x_{t_j} должны быть смежны в G. Так как $x_{t_i} \in X^*$, она смежна хотя бы с ещё одной из вершин (обозначим её как x_l). Следовательно, $[g_{t_i}, g_l] = 0$. В силу доказанного выше $[g_{t_j}, g_l] = 0$, а значит $x_{t_i} x_{t_j} x_l$ — цикл; противоречие. Таким образом, перенумеровав, если это потребуется, вершины в дереве H, мы можем считать, что $g_{t_i} = \alpha_i y_{t_i}$.

Из истинности формулы $\Psi(G; g_0, \ldots, g_{n-1}, h_0, \ldots, h_{k-1}, f_0, \ldots, f_{k-1})$ следует, что $x_{t_i} \leftrightarrow x_{t_j}$ тогда и только тогда, когда $[y_{t_i}, y_{t_j}] = 0$, т. е. y_{t_i} и y_{t_j} смежны. Таким образом, графы $H(\{y_{t_0}, y_{t_1}, \ldots, y_{t_{k-1}}\})$ и G^* изоморфны. Остаётся лишь показать, что $\{y_{t_0}, y_{t_1}, \ldots, y_{t_{k-1}}\} \subseteq Y^*$.

Пусть для некоторого $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ вершина y_{t_i} висячая в графе H, а y_j — смежная с ней вершина. Формула $\Psi(G; g_0, \ldots, g_{n-1}, h_0, \ldots, h_{k-1}, f_0, \ldots, f_{k-1})$ истинна, поэтому $0 = [[f_i, h_i], g_{t_i}] = \alpha_i[[f_i, h_i], y_{t_i}]$, т. е. $[f_i, h_i]$ лежит в централизаторе элемента y_{t_i}. В силу [13] справедливо

$$[f_i, h_i] = \beta_1 y_{t_i} + \beta_2 y_j. \tag{5}$$

Пусть $[f_i, h_i] \neq 0$. В силу однородности тождеств алгебры Ли и соотношений частичной коммутативности представление левой части равенства в виде линейной комбинации базисных мономов содержит мономы, в каждом из которых суммарная степень по всем порождающим не меньше 2, а правая часть является линейной комбинацией порождающих. Следовательно, равенство (5) не выполнится. Отсюда $[f_i, h_i] = 0$, что противоречит формуле $\Psi(G; g_0, \ldots, g_{n-1}, h_0, \ldots, h_{k-1}, f_0, \ldots, f_{k-1})$.

Итак, вершины y_{t_i} для $i = 0, 1, \ldots, k-1$ в графе H не являются висячими, а потому лежат в Y^*. $\square$

Для любых элементов $x, \check{x} \in X$ и произвольного целого положительного числа r введём обозначение $[x \circ (\check{x})^r] = [x, \underbrace{\check{x}, \ldots, \check{x}}_{r \text{ раз}}]$.

Пусть $G = \langle X; E \rangle$ — граф с множеством вершин X со следующим свойством: в G есть хотя бы одна вершина степени не меньше 3, смежная с хотя бы одной висячей вершиной. Выберем произвольную вершину, удовлетворяющую этому свойству, и обозначим её как x. Пусть x', x'', x''' — смежные с ней вершины, при этом вершина x' висячая.

Введём обозначения: $\widetilde{X} = X \backslash \{x'\}$, а $\widetilde{G} = G(\widetilde{X})$. Для любого целого положительного числа r определим отображение $\varphi_r : X \to \mathcal{L}(\widetilde{X}; \widetilde{G})$ следующим образом:

$$\varphi_r(x_i) = \begin{cases} x_i, & \text{если } x_i \neq x', \\ [x'' \circ (x''')^r], & \text{если } x_i = x'. \end{cases} \tag{6}$$

Проверим, что это отображение единственным образом продолжается до гомоморфизма алгебры $\mathcal{L}(X; G)$ на алгебру $\mathcal{L}(\widetilde{X}; \widetilde{G})$. Действительно, необходимо только проверить, что φ_r сохраняет соотношения алгебры $\mathcal{L}(X; G)$. Пусть $[x_i, x_j] = 0$ в алгебре $\mathcal{L}(X; G)$. Если $x_i \neq x'$ и $x_j \neq x'$, то $\varphi_r([x_i, x_j]) = [x_i, x_j]$. Так как x_i и x_j смежны в G, они будут смежны и в $\widetilde{G}$. Следовательно, $[x_i, x_j] = 0$ в алгебре $\mathcal{L}(\widetilde{X}; \widetilde{G})$. Если же $x_j = x'$ (случай $x_i = x'$ рассматривается аналогично в силу антикоммутативности алгебр Ли), то $x_i = x$. Имеет место $\varphi_r([x, x']) = [x, [x'' \circ (x''')^r]] = 0$, т. к. x смежна с x'' и x''' в графе $\widetilde{G}$. Итак, отображение φ_r единственным образом продолжается до гомоморфизма. Этот гомоморфизм также обозначим через φ_r.

Переобозначим вершины следующим образом: вершину x'' обозначим через x_{p+1}, вершины, смежные с x'' (кроме вершины x) — через $x_1, x_2, \ldots, x_{p-2}$, вершину x — через x_{p-1}, вершины x' и x''' — через x_p и x_0 соответственно, а для остальных вершин в произвольном порядке используем $x_{p+2}, \ldots, x_{n-1}$. После этого введём упорядочение на множестве X, которое было описано выше. Обозначим его как $(*)$.

Для произвольного ассоциативного слова v обозначим через $v_{(r)}$ ассоциативное слово, получающееся заменой в нём каждого вхождения x_p на $x_{p+1}x_0^r$.

ЛЕММА 3.7. *Пусть v и w — два ассоциативных монома. Если $v > w$ относительно порядка $(*)$, то существует r_0, такое что $v_{(r)} > w_{(r)}$ для любого натурального $r \geqslant r_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть r_1 — наибольшее натуральное число, такое что v содержит подслово $x_{p+1}x_0^{r_1-1}$, а r_2 — наибольшее натуральное число, такое что w содержит подслово $x_{p+1}x_0^{r_2-1}$. Положим $r_0 = \max(r_1, r_2)$. Так как $v > w$, возможны два варианта:

(1) $w = vw'$, где w' неединичный моном;

(2) $v = v'x_iv''$, $w = v'x_jw''$, где $i > j$, а мономы v', v'', w'' могут быть единичными.

В первом случае требуемое очевидно, т. к. $v_{(r)} > v_{(r)}w'_{(r)} = w_{(r)}$ для любого натурального r.

Рассмотрим второй случай. Если $i \neq p$ и $j \neq p$, то $v_{(r)} = v'_{(r)}x_iv''_{(r)} > v'_{(r)}x_jw''_{(r)} = w_{(r)}$.

Если $i = p$, то для любого r имеем $v_{(r)} = v'_{(r)}x_{p+1}x_0^rv''_{(r)}$, а $w_{(l)} = v'_{(r)}x_jw''_{(r)}$. Из $p > j$ вытекает $p + 1 > j$, отсюда получаем требуемое.

Наконец, пусть $j = p$. Если $i > p + 1$, то для любого натурального r получаем $v_{(r)} = v'_{(r)}x_iv''_{(r)} > v'_{(r)}x_{p+1}x_0^rw''_{(r)} = w_{(r)}$. Осталось рассмотреть случай $j = p$, $i = p + 1$. Тогда $v_{(r)} = v'_{(r)}x_{p+1}v''_{(r)}$, $w_{(r)} = v'_{(r)}x_{p+1}x_0^rw''_{(r)}$. Если первый множитель в $v''_{(r)}$ отличен от x_0, то $v_{(r)} > w_{(r)}$ для любого натурального r. Пусть $v''_{(r)}$ начинается с x_0. В силу выбора r_0 в $v''_{(r)}$ не более $r_0 - 1$ первых сомножителей равны x_0. Таким образом, имеет место представление $v_{(r)} = v'_{(r)}x_{p+1}x_0^s\hat{v}$, где $s < r_0$ и $\hat{v}$ — некоторый моном либо равный единице, либо начинающийся с порождающего, отличного от x_0. Если $\hat{v} = 1$, то $v_{(r)}$ является началом $w_{(r)}$ для любого натурального $r \geqslant r_0$. Если же $\hat{v} \neq 1$, то он начинается с некоторого порождающего $x_t > x_0$, а значит $v_{(r)} > w_{(r)}$ для любого натурального $r \geqslant r_0$. □

ЛЕММА 3.8. *Пусть* $[u]$ *— базисный моном алгебры* $\mathcal{L}(X;G)$ *относительно упорядочения* $(*)$*. Тогда существует* r_0*, такое что для любого целого положительного* $r \geqslant r_0$ *при подстановке* $[x_{p+1} \circ (x_0)^r]$ *вместо каждого вхождения* x_p *получается базисный моном алгебры* $\mathcal{L}(\widetilde{X};\widetilde{G})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в случае ассоциативных мономов, обозначим через $[u]_{(r)}$ лиевский моном, полученный посредством подстановки $[x_{p+1} \circ (x_0)^r]$ вместо каждого вхождения x_p.

Сначала докажем, что $[u]_{(r)} \in \mathrm{LS}(\widetilde{X})$ для достаточно больших натуральных r, если $[u] \in \mathrm{LS}(X)$.

Очевидно, что это утверждение верно для $r_0 \geqslant 0$, если $[u] \in X$. Пусть $[u] \in \mathrm{LS}(X)$ и $[u] \notin X$. В силу определений 1.1 и 1.2 для любого представления $u = vw$ выполнено $u > wv$. По лемме 3.7 для каждого такого представления существует $r(v,w)$, такое что $u_{(r)} > w_{(r)}v_{(r)}$ при всех натуральных $r \geqslant r(v,w)$. Пусть $r_1 = \max(\{r(v,w) \mid vw = u\})$. Тогда при любом натуральном $r \geqslant r_1$ имеем $u_{(r)} = v'w' > w'v'$ для любого представления

$$u_{(r)} = v'w', \tag{7}$$

которое может быть получено из разложения u на множители (т. е. $v' = v_{(r)}$, $w' = w_{(r)}$ для некоторых v и w, таких что $u = vw$).

Если разложение (7) не может быть получено из разложения $u = vw$, то $v' = v''x_{p+1}x_0^s$, $w' = x_0^{r-s}w''$, где $0 \leqslant s_1 < r$. Так как v'' начинается с порождающего, отличного от x_0, имеем $v'w' > w'v'$. Следовательно, $u_{(r)}$ — ассоциативное слово Линдона–Ширшова.

Пусть $[u] \in \mathrm{LS}(X)$ — слово Линдона–Ширшова. Если $[u] = [[v],[w]]$, то $[v],[w] \in \mathrm{LS}(X)$. По предположению индукции $[v]_{(r)}, [w]_{(r)} \in \mathrm{LS}(\widetilde{X})$ для натуральных r, бóльших некоторого натурального r_2. В силу леммы 3.7 существует натуральное число r_3, такое что $v_{(r)} > w_{(r)}$ для любого $r \geqslant r_3$.

Если $[u] = [[v_1, v_2], [w]]$ где $w \geqslant v_2$, то снова из леммы 3.7 следует существование натурального числа r_4, такого что $w_{(r)} \geqslant v_{2(r)}$ для любого натурального $r \geqslant r_4$.

Пусть $r_0 = \max(r_1, r_2, r_3, r_4)$. Тогда $[u]_{(r)} \in \mathrm{LS}(\widetilde{X})$ для любого $r \geqslant r_0$.

Предположим теперь, что $[u] \in \mathrm{PCLS}(X)$. Если $[u]$ является порождающим, то утверждение очевидно для любого натурального числа $r \geqslant 0$. Пусть $[u] = [[v], [w]]$, причём $[v], [w] \in \mathrm{PCLS}(X)$. По предположению индукции можно считать, что $[v]_{(r)}, [w]_{(r)} \in \mathrm{PCLS}(\widetilde{X})$ для любого $r \geqslant r_0$. Остаётся показать, что первая буква слова $[w]_{(r)}$ не смежна хотя бы с одной буквой слов $[v]_{(r)}$.

Если $[w]$ начинается с x_i, где $i \neq p$, то $[w]_{(r)}$ также начинается на x_i. Если x_i не смежна с некоторой вершиной $x_j \in \operatorname{supp}([v]) \backslash \{x_p\}$, то утверждение очевидно для любого $r \geqslant r_0$. Пусть $x_p \in \operatorname{supp}([v])$, $x_i \not\leftrightarrow x_p$ и $x_i \overset{\widetilde{G}}{\leftrightarrow} \operatorname{supp}([v]_{(r)})$. В этом случае $x_i \overset{\widetilde{G}}{\leftrightarrow} \{x_{p+1}, x_0\}$. Если $i = p-1$, то получаем противоречие, т. к. $x_{p-1} \leftrightarrow x_p$; иначе в графе G есть цикл $x_0 x_{p-1} x_{p+1} x_i$, и снова получаем противоречие.

Пусть $[w]$ начинается с x_p. Тогда $[w]_{(r)}$ начинается с x_{p+1}. Из $[u] \in \mathrm{LS}(X)$ вытекает $v > w$. Следовательно, первая буква $[v]$ не меньше x_p, откуда получаем, что первая буква $[v]_{(r)}$ не меньше x_{p+1}. Осталось отметить, что все вершины, смежные с x_{p+1}, меньше x_{p+1}. Значит, первые буквы $[v]$ и $[w]$ не смежны.

Итак, в $[v]_{(r)}$ есть порождающий, не смежный с первой буквой $[w]_{(r)}$. Следовательно, $[u]_{(r)} \in \mathrm{PCLS}(\widetilde{X})$. $\square$

Отметим, что для любого лиевского монома $[u]$ имеет место равенство $\varphi_r([u]) = [u]_{(r)}$.

ЛЕММА 3.9. *Пусть $\mathcal{L}(X; G)$ — частично коммутативная алгебра Ли, её определяющий граф является деревом, в котором существует вершина x, такая что $x \leftrightarrow \{x', x'', x'''\}$, причём x' — висячая. Если $g \in \mathcal{L}(X; G) \backslash \{0\}$, то существует натуральное число r_0, для которого $\varphi_r(g) \neq 0$ (см. (6)) при любом натуральном $r \geqslant r_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введём упорядочение $(*)$ на множестве X и распишем g в виде линейной комбинации базисных мономов относительно этого упорядочения:

$$g = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i [u_i],$$

где $\alpha_i \in R$, а $N \in \mathbb{N}$. В силу леммы 3.8 для каждого $[u_i]$ существует r_i, такой что $\varphi_{(r)}([u_i]) \in \mathrm{PCLS}(\widetilde{X})$ для всех $r \geqslant r_i$. Пусть r_0 равно максимальному из значений r_i. Из леммы 3.7 вытекает, что для любого натурального $r \geqslant r_0$ все элементы $\varphi_r([u_i])$ попарно различны. Следовательно, их линейная комбинация не равна нулю. □

Теперь мы можем доказать критерий универсальной эквивалентности частично коммутативных алгебр, определяющие графы которых являются деревьями.

ТЕОРЕМА 3.10. *Пусть $G = \langle X; E \rangle$ и $H = \langle Y; F \rangle$ — деревья, причём $|X| \geqslant 2$ и $|Y| \geqslant 2$. Алгебры $\mathcal{L}(X; G)$ и $\mathcal{L}(Y; H)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $G^* \simeq H^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть алгебры $\mathcal{L}(X; G)$ и $\mathcal{L}(Y; H)$ универсально эквивалентны. Докажем, что в этом случае деревья G^* и H^* изоморфны.

Если все вершины дерева G являются висячими, то $n = 2$. Следовательно, $\mathcal{L}(X; G)$ является двупорожденной абелевой алгеброй Ли. Следовательно, предложение

$$\exists z_1, z_2 [z_1, z_2] \neq 0$$

не выполняется в этой алгебре. Если $m \geqslant 3$, то H не является полным графом (т. к. H — дерево), а значит $[y_i, y_j] \neq 0$ для некоторых $i, j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Следовательно, $m = 2$. Все деревья с двумя вершинами изоморфны между собой, поэтому графы G^* и H^* изоморфны (и будут пустыми).

Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда оба множества X^* и Y^* непустые. Из леммы 3.4 следует, что $\mathcal{L}(X; G) \models \Phi(G)$. В силу универсальной эквивалентности алгебр $\mathcal{L}(X; G)$ и $\mathcal{L}(Y; H)$ получаем $\mathcal{L}(Y; H) \models \Phi(G)$. По лемме 3.6 граф G^* изоморфен некоторому подграфу графа H^*. Применяя аналогичные рассуждения для предложения $\Phi(H)$, получаем, что граф H^* изоморфен некоторому подграфу графа G^*. Следовательно, графы G^* и H^* изоморфны. Обратно, пусть деревья G^* и H^* изоморфны. Тогда изоморфны также графы G' и H'.

Предположим, что в дереве G есть вершина степени не меньше 3, смежная хотя бы с одной висячей вершиной. Рассмотрим граф $\widetilde{G}$, построенный по этим вершинам, как было описано выше. Тогда универсальные теории алгебр $\mathcal{L}(X;G)$ и $\mathcal{L}(\widetilde{X};\widetilde{G})$ совпадают. Действительно, в силу теоремы 1.10 для проверки совпадения универсальных теорий алгебр Ли L_1 и L_2 достаточно проверить, что любая конечная подмодель алгебры L_1 имеет изоморфную подмодель в алгебре L_2, и наоборот.

В одну сторону утверждение очевидно, т. к. $\mathcal{L}(\widetilde{X};\widetilde{G})$ является подалгеброй $\mathcal{L}(X;G)$, а значит любая конечная подмодель $\{g_1,\dots,g_a\}$ алгебры $\mathcal{L}(\widetilde{X};\widetilde{G})$ может рассматриваться и как конечная подмодель алгебры $\mathcal{L}(X;G)$.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $\Gamma=\{g_1,\dots,g_a\}$ — произвольное конечное множество ненулевых элементов алгебры Ли $\mathcal{L}(G;X)$. Расширим это множество, добавив в него все ненулевые элементы одного из следующих видов: g_i-g_j, $g_i+g_j-g_k$, $[g_i,g_j]-g_k$. Обозначим полученное множество $\overline{\Gamma}$. Достаточно показать существование натурального числа r, такого что ядро гомоморфизма $\varphi_r:\mathcal{L}(G;X)\to\mathcal{L}(\widetilde{G};\widetilde{X})$ не пересекается с множеством $\overline{\Gamma}$. Действительно, в этом случае образы всех элементов множества Γ различны, и если $g_i\neq g_j+g_k$ или $g_i\neq[g_j,g_k]$, то образы g_i и g_j+g_k (соответственно образы g_i и $[g_j,g_k]$) не равны.

Из леммы 3.9 следует, что для каждого элемента $g_i\in\overline{\Gamma}$ можно выбрать r_i, для которого $\varphi_{r_i}(g_i)\neq 0$. Пусть r_0 — максимальное из значений r_i. Тогда $\varphi_{r_0}(g_i)\neq 0$ для всех $g_i\in\overline{\Gamma}$, если $r\geqslant r_0$.

Таким образом, совпадают универсальные теории алгебр $\mathcal{L}(X;G)$ и $\mathcal{L}(\widetilde{X};\widetilde{G})$.

Рассмотрим деревья G и H. Удаляя последовательно висячие вершины, смежные с вершинами степени не меньше 3, получим соответственно деревья G' и H'. При этом, в силу только что доказанного, алгебры $\mathcal{L}(X';G')$ и $\mathcal{L}(X;G)$ универсально эквивалентны. Аналогично, универсально эквивалентными являются алгебры $\mathcal{L}(Y';H')$ и $\mathcal{L}(Y;H)$. Осталось вспомнить, что $G^* \simeq H^*$ эквивалентно $G' \simeq H'$. Значит, универсальные теории алгебр $\mathcal{L}(X';G')$ и $\mathcal{L}(Y';H')$ совпадают. Таким образом, доказана универсальная эквивалентность алгебр $\mathcal{L}(X;G)$ и $\mathcal{L}(Y;H)$. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Duchamp, D. Krob*, Free partially commutative structures, J. Algebra, **156**, No. 2 (1993), 318—361.
2. *H. Servatius*, Automorphisms of graph groups, J. Algebra, **126**, No. 1 (1989), 34—60.
3. *G. Duchamp, D. Krob*, The lower central series of the free partially commutative group, Semigroup Forum, **45**, No. 3 (1992), 385—394.
4. *A. J. Duncan, I. V. Kazachkov, V. N. Remeslennikov*, Parabolic and quasiparabolic subgroups of free partially commutative groups, J. Algebra, **318**, No. 2 (2007), 918—932.
5. *Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко*, Частично коммутативные метабелевы группы: централизаторы и элементарная эквивалентность, Алгебра и логика, **48**, № 3 (2009), 309—341.
6. *Е. И. Тимошенко*, Универсальная эквивалентность частично коммутативных метабелевых групп, Алгебра и логика, **49**, № 2 (2010), 263—290.
7. *Е. И. Тимошенко*, Мальцевская база частично коммутативной нильпотентной, метабелевой группы, Алгебра и логика, **50**, № 5 (2011), 647—658.
8. *Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко*, Об универсальных теориях частично коммутативных метабелевых групп, Алгебра и логика, **50**, № 1 (2011), 3—25.
9. *F. Cartier, D. Foata*, Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements (Lect. Notes Math., **85**), Berlin a.o., Springer-Verlag, 1969.
10. *K. Hang Kim, L. Makar-Limanov, J. Neggers, F. W. Roush*, Graph algebras, J. Algebra, **64** (1980), 46—51.
11. *G. Duchamp, D. Krob*, The free partially commutative Lie algebra: Bases and ranks, Adv. Math., **92**, No. 1 (1992), 95—126.
12. *Е. Н. Порошенко*, О базисах частично коммутативных алгебрах Ли, Алгебра и логика, **50**, № 5 (2011), 595—614.

13. *Е. Н. Порошенко*, Централизаторы в частично коммутативных алгебрах Ли, Алгебра и логика, **51**, № 4 (2012), 524—554.

14. *E. N. Poroshenko, E. I. Timoshenko*, Universal equivalence of partially commutative metabelian Lie algebras, J. Algebra, **384** (2013), 143—168.

15. *E. N. Poroshenko*, On universal equivalence of partially commutative metabelian Lie algebras, Commun. Algebra, **43**, No. 2 (2015), 746—762.

16. *M. Hall*, A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups, Proc. Am. Math. Soc., **1** (1950), 575—581.

17. *А. И. Ширшов*, Подалгебры свободных лиевых алгебр, Матем. сб., **33(75)**, № 2 (1953), 441—452.

18. *А. И. Ширшов*, О свободных кольцах Ли, Матем. сб., **45(87)**, № 2 (1958), 113—122.

Поступило 30 сентября 2015 г.

Адрес автора:

ПОРОШЕНКО Евгений Николаевич, каф. алгебры матем. логики, Новосибирский гос. техн. ун-т, пр-т К.Маркса, 20, г. Новосибирск, 630092, РОССИЯ. e-mail: auto_stoper@ngs.ru