

жат галеркинским приближением к решению операторного уравнения (I3). Тогда сходимость  $\gamma_n^{(k)}(t)$  к решению уравнения (I3) следует из сходимости в условиях теоремы 3 галеркинских приближений (см. теорему I) и леммы 3.2 [4] при  $Z = \mathcal{L}_2(\gamma)$  и  $Z_n = H_n \subset \mathcal{L}_2(\gamma)$ . Теорема доказана.

### Л и т е р а т у р а

1. К а д у ш и н В.П. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с комплексно-сопряженными неизвестными // Математический анализ. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. С.39 - 51.

2. К а д у ш и н В.П. О проекционно-итерационном методе решения сингулярных интегральных уравнений // Конструктивная теория функций и функциональный анализ. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1987. Вып.6. С.49 - 57.

3. В а й н б е р г М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972.

4. Г а е в с к и й Х., Г р ё г е р К., З а х а р и а с К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

5. Г а х о в Ф.Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.

6. Г а б д у л х а е в Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980.

А.В.Казанцев

### ВНУТРЕННИЙ РАДИУС ОБЛАСТИ В ЗАДАЧЕ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОНТУРОВ

Обратная задача об изменении контуров заключается в исследовании решения внешней обратной краевой задачи (окз) при малых изменениях начальных условий. Данной проблематике посвящена монография [1]. В ней, в частности, построен алгоритм, позволяющий вычислять приближенное решение внешней окз (т.е. контур  $\tilde{L}_2$  с уравнением  $z = \tilde{z}(s)$ ) по краевым условиям  $\tilde{u}(s)$  и  $\tilde{v}(s)$  с помощью известного точ-

ного решения (контура  $L_z$  с уравнением  $z = z(s)$ ) по начальным данным  $u(s)$  и  $v(s)$ , если

$$\tilde{u}(s) + i\tilde{v}(s) - u(s) - v(s) = \mu \Phi(s), \quad (1)$$

где  $s \in [0, l]$  - дуговая абсцисса контуров  $L_z, \tilde{L}_z$ ,  $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\Phi(s)$  - заданная функция, не зависящая от  $\mu$  и удовлетворяющая дополнительным предположениям. Контур  $\tilde{L}_z$  ищется близким к  $L_z$  в том смысле, что

$$\tilde{z}(s) - z(s) = \mu \Psi(s), \quad (2)$$

где  $\Psi(s)$  не зависит от  $\mu$  и имеет всюду на  $[0, l]$  ограниченную производную.

При анализе полученного в [1] приближенного решения внешней задачи (1) - (2) возникает следующий эффект. Пусть функция  $F(\zeta)$  отображает единичный круг  $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$  на внешность контура  $L_z$  так, что  $F(\zeta_0) = \infty, \zeta_0 \in E$ , т.е.

$$F(\zeta) = e^{i\alpha} \int_0^{\zeta} f'(\tau) \left( \frac{1 - \bar{\zeta}_0 \tau}{\tau - \zeta_0} \right)^2 d\tau + b, \quad \zeta \in E, \quad (3)$$

$\alpha \in \mathbb{R}, a \in E, a \neq \zeta_0, b \in \mathbb{C}$ , и контур  $\partial f(E)$  является решением внутренней окз по условиям  $u(s), v(s)$ . В этом случае из результатов [1, с.64] следует, что внешняя задача (1) - (2) для достаточно малого  $\mu$  имеет единственное (приближенное) решение при условии

$$|\{f, \zeta_0\}| - 2/(1 - |\zeta_0|^2)^2 \neq 0 \quad (4)$$

( $\{f, \zeta\}$  - шварцман), которое означает, что критическая точка  $\zeta = \zeta_0$  внутреннего радиуса

$$R(\zeta) = |f'(\zeta)| (1 - |\zeta|^2) \quad (5)$$

области  $f(E)$  будет либо эллиптической, либо гиперболической.

Таким образом, разрешимость, а следовательно, и число решений задачи (1) - (2) зависят от характера поведения функции (5) в ее критических точках. Цель данной статьи - прояснить качественную картину этой зависимости, что позволит с единой точки зрения рассмат-

ривать условия единственной разрешимости задачи об изменении и проблеме устойчивости числа решений исходной окз.

$I^0$ . Пусть  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{C}^+$  — соответственно внешняя и внутренняя окз по начальным данным

$$u = u(s), v = v(s), 0 \leq s \leq l, \quad (6)$$

на которые наложены традиционные ограничения [2, с.320]: 1) периодичность с периодом  $l$ ; 2) существование первых производных, удовлетворяющих условию Гельдера и не обращающихся одновременно в нуль; 3) выполнение условия  $[u(s_1) - u(s_2)]^2 + [v(s_1) - v(s_2)]^2 = 0, 0 \leq s_1 \leq l, 0 \leq s_2 \leq l, (s_1, s_2) \neq (0, l), (l, 0) \Rightarrow s_1 = s_2$ .

Через  $\{\mathcal{C}(\mu)\}$  и  $\{\mathcal{C}^+(\mu)\}$ ,  $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon), \varepsilon > 0$ , будем обозначать однопараметрические семейства соответственно внешних и внутренних окз по начальным данным

$$u = u(s, \mu), v = v(s, \mu), 0 \leq s \leq l, \quad (7)$$

которые удовлетворяют условиям 1) — 3) по параметру  $S$  и связаны с (6) соотношениями

$$u(s, \mu) = u(s) + \mu \psi_1(s, \mu), v(s, \mu) = v(s) + \mu \psi_2(s, \mu), 0 \leq s \leq l, \quad (8)$$

где функции  $\psi_{1,2}(s, \mu)$  непрерывно дифференцируемы по  $\mu$  вместе со своими первыми частными производными по  $S$ . Полагая  $u(s, \mu) + i v(s, \mu) = w(s, \mu)$  и  $\psi_1(s, \mu) + i \psi_2(s, \mu) = \Phi(s, \mu)$ , мы можем переписать (8) в виде

$$w(s, \mu) = w(s) + \mu \Phi(s, \mu), 0 \leq s \leq l. \quad (8')$$

Таким образом, в плоскости  $W = u + i v$  определены простые замкнутые кривые Ляпунова  $\mathcal{L}_{w, \mu}$  с уравнениями (7). Будем предполагать также, что граничные значения  $\omega(e^{i\theta}, \mu)$  функций  $\omega(\zeta, \mu)$ , осуществляющих однолистные конформные отображения  $E$  на  $\mathcal{D}_{w, \mu} = \text{int } \mathcal{L}_{w, \mu}$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ), непрерывно дифференцируемы по  $\mu$  вместе со своими первыми частными производными по  $\theta$ , и  $\omega(1, \mu) = w(0, \mu), \mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Величины  $\mu \Phi(s, \mu)$  ( $\mu \psi_{1,2}(s, \mu)$ ),  $s \in [0, l], \mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , определяющие начальные данные (7) по формуле (8') (формулам (8)) при выполнении

указанных выше условий будем называть допустимыми возмущениями начальных данных (6).

Под решениями задач  $\mathcal{E}(\mu)$  и  $\mathcal{E}^+(\mu)$  будем понимать функции, реализующие отображения  $E$  на искомые области, т.е. соответственно функции  $\mathcal{F}(\zeta, \mu)$  и  $f(\zeta, \mu)$ , связанные представлением, аналогичным (3).

Теперь перейдем к основным определениям. Внешняя задача об изменении контуров состоит в отыскании решения  $\mathcal{F}(\zeta, \mu)$  задачи  $\mathcal{E}(\mu)$ ,

удовлетворяющего условию  $\|\mathcal{F}(e^{i\theta}, \mu) - \mathcal{F}(e^{i\theta})\|_{C[0, 2\pi]} \equiv \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |\mathcal{F}(e^{i\theta}, \mu) - \mathcal{F}(e^{i\theta})| = 0(\mu) (\mu \rightarrow 0)$ , где  $\mathcal{F}(\zeta) = \mathcal{F}(\zeta, 0)$  некоторое известное решение задачи

$\mathcal{E}$  (аналогично определяется и внутренняя окз об изменении). Очевидно, если исходная задача  $\mathcal{E}$  имеет  $n$  решений, то можно поставить  $n$  соответствующих задач об изменении контуров.

Обозначим через  $\kappa(\mathcal{E})$  число существенно различных решений задачи  $\mathcal{E}$ . Очевидно, соответствующая задача  $\mathcal{E}^+$  имеет единственное решение  $f(\zeta)$ . Количество критических точек внутреннего радиуса (5) для  $f(\zeta)$  обозначим через  $k(\mathcal{E}^+)$ ; имеем  $\kappa(\mathcal{E}) \leq k(\mathcal{E}^+)$ . Число  $\kappa(\mathcal{E})$  будем называть устойчивым при допустимых возмущениях начальных данных, если для любого семейства  $\{\mathcal{E}(\mu)\}, \mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , внешних окз по начальным данным (8') существует  $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon]$  такое, что при всех  $\mu \in (-\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon})$  имеет место равенство  $\kappa[\mathcal{E}(\mu)] = \kappa(\mathcal{E})$ . (Точно так же определяется и устойчивость  $k(\mathcal{E}^+)$ .)

2°. Решение задачи  $\mathcal{E}(\mu)$  проводится по классической схеме [2, § 33]. Нас будет интересовать зависимость от  $\mu$  величин, появляющихся на различных этапах решения.

Вначале построим соответствие  $S = S(\theta, \mu)$ . Для этого рассмотрим функции  $\delta(\theta, \mu) = \int_0^\theta |\omega'_\zeta(e^{i\theta}, \mu)| d\theta$  и  $\tilde{\delta}(s, \mu) = \int_0^s |w'_s(s, \mu)| ds$ , которые при

фиксированном  $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  выражают длину дуги контура  $L_{w, \mu}$  в зависимости от параметров  $\theta \in [0, 2\pi]$  и  $s \in [0, l]$ . Функции  $\delta$  и  $\tilde{\delta}$  являются монотонно возрастающими по своим первым аргументам, поэтому для каждого  $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  будет корректно определена взаимно-однозначная

функция  $s(\theta, \mu) = \tilde{\delta}^{-1}[\delta(\theta, \mu), \mu]$ . Применяя к уравнению  $\tilde{\delta}(s, \mu) - \delta(\theta, \mu) = 0$  теорему о неявной функции и уменьшая при необходимости  $\varepsilon$ , получим, что  $S(\theta, \mu)$  непрерывно дифференцируема по  $\mu$ . Кроме

того, в силу формулы  $S'_\theta(\theta, \mu) = |(\partial/\partial\theta)\omega(e^{i\theta}, \mu)| / |w'_s[S(\theta, \mu), \mu]|$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $s \in [0, l]$

(корректной в силу результатов § I гл. X из [3]) производная  $S'_0(\theta, \mu)$  наследует непрерывную дифференцируемость по  $\mu$  от функций  $(\partial/\partial\theta)(\omega(e^{i\theta}, \mu))$ ,  $w'_S(S, \mu)$  и  $S(\theta, \mu)$ .

Пусть теперь  $\rho(\theta, \mu) = \operatorname{Re} \ln f'_\zeta(\zeta, \mu)|_{\zeta=e^{i\theta}} = \operatorname{Re} \ln f'_\zeta(\zeta, \mu)|_{\zeta=e^{i\theta}}$ . Тогда в силу  $\rho(\theta, \mu) = \ln S'_0(\theta, \mu)$  функция  $\rho(\theta, \mu)$  также будет непрерывно дифференцируемой по  $\mu$ . Переходя от  $\rho(\theta, \mu)$  к  $\ln f'_\zeta(\zeta, \mu)$  с помощью интеграла Шварца

$$\ln f'_\zeta(\zeta, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\theta, \mu) \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\theta + i\alpha, \quad (9)$$

закключаем, что решение  $f(\zeta, \mu)$  задачи  $\mathfrak{E}^+(\mu)$  сохраняет свойство непрерывной дифференцируемости по  $\mu$ .

Чтобы исключить произвол, обусловленный возможностью движений в плоскости искомым областей, будем предполагать, что  $f(\zeta, \mu)$  нормированы условиями  $f(0, \mu) = 0$ ,  $f'_\zeta(0, \mu) > 0$ ,  $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Продолжим решение задачи  $\mathfrak{E}(\mu)$ . Как известно [4], критические точки внутреннего радиуса (5), записанного для функции  $f(\zeta, \mu)$ , определяются из уравнения Гахова

$$\mathfrak{F}(\zeta, \mu) \equiv f''_{\zeta^2}(\zeta, \mu)/f'_\zeta(\zeta, \mu) - 2\bar{\zeta}/(1-|\zeta|^2) = 0 \quad (10)$$

с непрерывно дифференцируемой по  $\mu$  левой частью в силу (9).

Пусть уравнение (10) при  $\mu=0$  имеет  $n$  корней  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  в  $E$ , для каждого из которых выполняется условие (4). Это означает, что якобиан  $J_{\mathfrak{F}}$  отображения  $\mathfrak{F}$ , с точностью до знакоопределенной величины совпадающий с выражением  $\{f(\zeta, \mu), \zeta\} + (f''_{\zeta^2}(\zeta, \mu)/f'_\zeta(\zeta, \mu))^2 / (2 - 2\bar{\zeta}^2 / (1 - |\zeta|^2)^2) - 4 / (1 - |\zeta|^2)^4$  в точках  $\zeta_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , при  $\mu=0$  отличен от нуля. Тогда по теореме о неявной функции найдутся число  $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon]$  и окрестности  $U_j \subset E$  точек  $\zeta_j$  такие, что для любого  $\mu \in (-\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon})$  отображение  $\mathfrak{F}$  имеет единственный нуль  $\zeta_j(\mu)$  в  $U_j$ , причем знак  $J_{\mathfrak{F}}$  в  $\zeta_j(\mu)$  тот же, что и в  $\zeta_j$  при  $\mu=0$ ;  $\zeta_j(\mu)$  — непрерывно дифференцируемая функция от  $\mu$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Докажем теперь существование числа  $\hat{\varepsilon}$  такого, что для всех  $\mu \in (-\hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon})$  уравнение (10) не имеет корней, отличных от  $\zeta_j(\mu)$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Предположим противное, т.е., что для любого  $\hat{\varepsilon} > 0$  существует

$\mu \in (-\hat{\xi}, \hat{\xi})$  такое, что некоторая точка  $\zeta(\mu) \in E$  будет корнем уравнения (10), и  $\zeta(\mu) \neq \zeta_j(\mu), j = \overline{1, n}$ . Выберем последовательность  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  ( $m \rightarrow \infty$ ) и рассмотрим соответствующую последовательность  $\zeta(\mu_m)$ . Без ограничения общности можно считать, что она сходится при  $m \rightarrow \infty$ , т.е. при  $\mu_m \rightarrow 0$ .

Рассмотрим три случая: 1)  $\zeta(\mu_m)$  сходится в точке  $\zeta_0 \neq \zeta_j, j = \overline{1, n}$ , однако, это противоречит предположению о том, что уравнение (10) при  $\mu = 0$  не имеет других корней, кроме  $\zeta_j, j = \overline{1, n}$ ; 2)  $\zeta(\mu_m)$  сходится к одной из точек  $\zeta_j$  - в этом случае возникает противоречие с единственностью  $\zeta_j(\mu)$  при  $\mu$ , близких к 0; 3) сходимость  $\zeta(\mu_m)$  к точке, лежащей на  $\partial E$ , невозможна в силу непрерывности функции  $p(\theta)$ .

Таким образом, доказана следующая

**Теорема I.** Пусть  $\{\mathcal{F}(\mu)\}, \mu \in (-\xi, \xi)$ , - семейство внешних окз со свойствами, указанными в п. I<sup>0</sup>. Тогда при выполнении сделанных выше предположений существует  $\tilde{\varepsilon} > 0$  такое, что при  $\mu \in (-\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon})$  внутренний радиус (5) для функции  $f(\zeta, \mu)$ , решающей задачу  $\mathcal{F}^+(\mu)$ , имеет  $n$  критических точек  $\zeta_j(\mu) \in E$ . При этом  $\zeta_j(\mu)$  непрерывно дифференцируемы как функции  $\mu$ , и  $\operatorname{sgn} K[\zeta_j(\mu)] = \operatorname{sgn} K(\zeta_j)$ , где  $K(\zeta) = R^2(\zeta)[4/(1-|\zeta|^2)^4 - |f, \zeta|^2]$  - кривизна поверхности (5) в ее критической точке;  $j = \overline{1, n}$ .

Завершим процесс решения задачи  $\mathcal{F}(\mu)$ . Точкам  $\zeta_j(\mu), j = \overline{1, n}$ , отвечают  $n$  решений  $\bar{F}_j(\zeta, \mu)$  задачи  $\mathcal{F}(\mu)$ , непрерывно дифференцируемых по  $\mu$ , каждое из которых восстанавливается по формуле

$$\bar{F}_j(\zeta, \mu) = e^{i\alpha} \int_a^{\zeta} f'(\zeta, \mu) \left( \frac{1 - \overline{\zeta_j(\mu)}\zeta}{\zeta - \zeta_j(\mu)} \right)^2 d\zeta + b, \zeta \in E, \quad (II)$$

где  $\alpha, a$  и  $b$  выберем такими же, как и в (3);  $\bar{F}_j(\zeta, 0) \equiv \bar{F}_j(\zeta), j = \overline{1, n}$ .

Справедлива

**Теорема 2.** При выполнении условий теоремы I имеют место следующие свойства:

1)  $\|\bar{F}_j(e^{i\theta}, \mu) - \bar{F}_j(e^{i\theta})\|_{C[0, 2\pi]} = o(\mu) (\mu \rightarrow 0), j = \overline{1, n}$  (при надлежащем выборе  $a$  в формуле (II));

2) если решения  $\mathcal{F}_j(\zeta)$  существенно различны, то и решения  $\mathcal{F}_j(\zeta, \mu)$  также существенно различны;

3) если решения  $\mathcal{F}_{j_1}(\zeta)$  и  $\mathcal{F}_{j_2}(\zeta)$  являются совпадающими, то существует автоморфизм  $\Gamma(\zeta)$  круга  $E$  такой, что  $\|\mathcal{F}_{j_1}(e^{i\theta}, \mu) - \mathcal{F}_{j_2} \circ \Gamma(e^{i\theta},$

$\mu)\|_{C[0, 2\pi]} = 0(\mu) (\mu \rightarrow 0)$  (при надлежащем выборе  $\alpha, \alpha$  и  $\theta$  в (II)).

Доказательство. I) Запишем разность

$$|\mathcal{F}_j(e^{i\theta}, \mu) - \mathcal{F}_j(e^{i\theta})| \quad \text{в виде} \\ \left| \int_0^{e^{i\theta}} \left\{ \left[ f'_j(\zeta, \mu) - f'_j(\zeta) \right] \left( \frac{1 - \bar{\zeta}_j(\mu)\zeta}{\zeta - \bar{\zeta}_j(\mu)} \right)^2 + f'_j(\zeta) \left[ \left( \frac{1 - \zeta_j(\mu)\zeta}{\zeta - \zeta_j(\mu)} \right)^2 - \left( \frac{1 - \bar{\zeta}_j\zeta}{\zeta - \bar{\zeta}_j} \right)^2 \right] \right\} d\zeta \right| \quad (I2)$$

и выберем  $\alpha \in E$  и  $\tilde{\varepsilon} > 0$  такими, чтобы при  $\mu \in (-\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon})$  на интервале  $(\alpha, e^{i\alpha 2\pi})$  не было корней уравнения (IO) и расстояние от множества  $\{\zeta_j(\mu) : \mu \in (-\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon})\}$  до пути интегрирования  $(\alpha, e^{i\alpha 2\pi}) \cup (e^{i\alpha 2\pi}, e^{i\theta})$

было не меньше некоторого  $\rho = \rho(\alpha) > 0$ . Рассматривая теперь (I2) на указанных участках интегрирования и пользуясь непрерывной дифференцируемостью  $f'_j(\zeta, \mu)$  и  $\zeta_j(\mu)$  по  $\mu$  и непрерывностью  $f'_j(\zeta)$  в  $\bar{E}$ , заключаем, что существует  $A_j = A_j(\alpha) > 0$ , для которого  $|\mathcal{F}_j(e^{i\theta}, \mu) - \mathcal{F}_j(e^{i\theta})| \leq A_j |\mu|, \mu \in (-\varepsilon, \varepsilon), \theta \in [0, 2\pi]$ , т.е. п. I) доказан.

2) Предположим противное, т.е. что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  такое, что два решения  $\mathcal{F}_{j_1}(\zeta, \mu)$  и  $\mathcal{F}_{j_2}(\zeta, \mu)$  являются совпадающими в следующем смысле:

$$\mathcal{F}_{j_1}(\zeta, \mu) = e^{i\alpha\mu} \mathcal{F}_{j_2}[\Gamma_\mu(\zeta), \mu] + \theta_\mu, \quad (I3)$$

где  $\Gamma_\mu(\zeta)$  - автоморфизм  $E$  такой, что  $\Gamma_\mu[\zeta_{j_1}(\mu)] = \zeta_{j_2}(\mu)$  и  $\alpha_\mu \in \mathbb{R}, \theta_\mu \in \mathbb{C}, \mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Как и при доказательстве теоремы I, выберем последовательность  $\mu_m \rightarrow 0 (\mu \rightarrow \infty)$  и рассмотрим (I3) при соответствующих  $\mu_m$ . Без ограничения общности можно считать, что последовательности  $e^{i\alpha\mu_m}$  и  $\theta_{\mu_m}$  являются сходящимися; далее, в силу принципа сгущения [3, с. 20], из последовательности  $\Gamma_{\mu_m}(\zeta)$  можно выделить подпоследовательность (обозначим ее вновь через  $\Gamma_{\mu_m}(\zeta)$ ), которая будет (равномерно внутри  $E$ ) сходиться к автоморфизму  $E$ . Таким образом, при  $\mu_m \rightarrow 0$  соотношение (I3) переходит в аналогич-

ную формулу для решений  $\mathcal{F}_{j_1}(\zeta)$  и  $\mathcal{F}_{j_2}(\zeta)$  задачи  $\mathcal{E}$ , что будет противоречить их существенному различию.

3) Поскольку решения  $\mathcal{F}_{j_1}(\zeta)$  и  $\mathcal{F}_{j_2}(\zeta)$  задачи  $\mathcal{E}$  являются совпадающими, то они связаны соотношением вида (13), которое при надлежащем выборе постоянных в (II) можно записать в виде  $\mathcal{F}_{j_1}(\zeta) = \mathcal{F}_{j_2}[\Gamma(\zeta)]$ , где  $\Gamma(\zeta)$  — некоторый автоморфизм круга  $E$ . Доказательство завершается получением оценки

$$|\mathcal{F}_{j_1}(e^{i\theta}, \mu) - \mathcal{F}_{j_2} \circ \Gamma(e^{i\theta}, \mu)| \leq (A_{j_1} + A_{j_2}) |\mu|,$$

справедливой в силу п.1). Теорема 2 доказана.

3<sup>0</sup>. Связь между устойчивостью числа существенно различных решений задачи  $\mathcal{E}$  и разрешимостью соответствующих задач об изменении описывается таким следствием из результатов п.2<sup>0</sup>.

С л е д с т в и е . При выполнении условия (4) в критических точках функции (5), записанной для решения  $f(\zeta)$  задачи  $\mathcal{E}^+$ : 1) величина  $k(\mathcal{E}^+)$  является устойчивой при допустимых возмущениях начальных данных; 2) устойчивость числа  $\mathcal{X}(\mathcal{E})$  существенно различных решений задачи  $\mathcal{E}$  эквивалентна единственной разрешимости соответствующих этим решениям задач об изменении.

Отметим, что можно построить целый класс задач  $\mathcal{E}$  с устойчивым  $\mathcal{X}(\mathcal{E})$ , выделяя те  $\mathcal{E}$ , для которых решения  $f(\zeta)$  соответствующих задач  $\mathcal{E}$  удовлетворяют строгому неравенству Нехари

$$|\{f, \zeta\}| < 2/(1 - |\zeta|^2)^2, \quad \zeta \in E.$$

В этом случае функция  $f(\zeta)$  будет однолистной в  $E$  [5], а внутренний радиус (5) для этой функции имеет единственный (глобальный) эллиптический максимум.

Чтобы полностью прояснить роль условия (4) в картине устойчивости числа решений внешней окз, рассмотрим пример, в котором оно нарушается.

Пусть задача  $\mathcal{E}^+(\mu)$  имеет решение

$$f(\zeta, \mu) = \zeta / [1 - (\mu + 1/3)\zeta^2], \quad \mu \in (-1/3, 1/3).$$

Из результатов статьи [6] следует, что (5) для  $f(\zeta, \mu)$  имеет одну нулевую критическую точку при  $\mu \leq 0$ , к которой при  $\mu > 0$  добавятся еще две:  $\zeta_{1,2} = \pm 3(3\mu)^{1/2} [(3\mu+1)(8-3\mu)]^{-1/2}$ . При  $\mu=0$  и  $\zeta=0$  в

(4) будет равенство; с ростом  $\mu$  от нулевого решения (10) будут ответвляться (бифуркационные) решения уравнения Гахова (им будут отвечать совпадающие решения задачи  $\mathcal{E}(\mu)$ ). Таким образом,  $\chi(\mathcal{E}) = k(\mathcal{E}^+) = 1$ ,  $\chi[\mathcal{E}(\mu)] = 2(k[\mathcal{E}^+(\mu)] - 3)$  при  $\mu > 0$ .

### Л и т е р а т у р а

1. С а л и м о в Р.Б. Некоторые основные задачи об изменении контуров теории аналитических функций и их приложения к механике жидкости. Казань, 1970.

2. Г а х о в Ф.Д. Краевые задачи. 3-е изд. М.: Наука, 1977.

3. Г о л у з и н Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. 2-е изд. М.: Наука, 1966.

4. А к с е н т ь е в Л.А. Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области // Изв. вузов. Матем. 1984. № 2. С.3 - II.

5. N e h a r i Z. The Schwarzian derivative and schlicht functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1949. V.55. N 6. P.545 - 551.

6. А к с е н т ь е в Л.А., К а з а н ц е в А.В., К и с е л е в А.В. О единственности решения внешней обратной краевой задачи // Изв. вузов. Матем. 1984. № 10. С.8 - 18.

Г.Д.Луговая, А.Н.Шерстнев

### ОБ УПОРЯДОЧЕННЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СО СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМОЙ

Пространства с порядковой единицей - естественные обобщения вещественных упорядоченных векторных пространств, являющихся эрмитовыми частями  $C^*$ -алгебр с единицей. Этим обусловлен увеличивающийся интерес к указанным объектам, особенно в направлении, связанном с построением спектральной теории. В частности, ищутся условия на пространства с порядковой единицей, обеспечивающие наличие в них спектральной теоремы (в том или ином контексте (см., напр., [1] - [3])). Как правило, эти условия носят достаточный характер и соот-