Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Е. С. Кочетков, Обслуживание рекуррентного потока заявок многоканальной экспоненциальной системой с конечной очередью,
Автомат. и телемех., 1977, выпуск 8, 31–40

https://www.mathnet.ru/at7417

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
16 декабря 2025 г., 15:13:47

УДК 65.012.1.122

ОБСЛУЖИВАНИЕ РЕКУРРЕНТНОГО ПОТОКА ЗАЯВОК МНОГОКАНАЛЬНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С КОНЕЧНОЙ ОЧЕРЕДЬЮ

Е. С. КОЧЕТКОВ

(Москва)

Методом нормализации выводятся системы линейных уравнений, определяющие стационарное состояние многоканальной системы обслуживания рекуррентного потока заявок с конечной очередью; время обслуживания каждой заявки считается экспоненциальным.

1. Постановка задачи

Предположим, что система обслуживания состоит из m обслуживающих приборов и бункера емкости n. На нее поступает рекуррентный поток заявок [1—3] с плотностью распределения вероятностей интервала между соседними заявками $f(t)$. Длительности обслуживания заявок каждым прибором будем считать независимыми случайными величинами, распределенными по экспоненциальному закону с параметром μ. Заявка, заставшая в момент поступления в систему хотя бы один свободный прибор, поступает на обслуживание одним из таких приборов. Если в момент поступления заявки в систему все m приборов заняты, но имеется хотя бы одно свободное место в бункере, то заявка занимает одно из этих свободных мест; если же в момент поступления заявки заняты все m приборов и все n мест в бункере, то заявка теряется. Находящиеся в бункере заявки поступают на обслуживание по мере освобождения обслуживающих приборов.

Отдельные результаты исследования описанной системы в некоторых частных случаях (например, при $n=0$ и $n=\infty$) представлены в [1—3]. Анализ этой системы методом нормализации [4] в случае, когда $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ (пуассоновский входящий поток), приведен в [5]. Ниже описывается решение задачи для произвольной плотности распределения вероятностей $f(t)$ и произвольных значений m и n.

2. Случай $m=1, n=0$

Суть предлагаемого решения удобно пояснить на простейшем примере, когда $m=1$, $n=0$. При этом можно отказаться от ограничения на длительность обслуживания заявки прибором. В этом разделе будем предполагать, что время обслуживания заявки представляет собой случайную величину с функцией распределения $\Phi(t)$.

Рассматриваемая система представлена на рис. 1, где по аналогии с [4, 5] $X(t)$ — импульсный поток заявок на входе; Р — распределитель; П — обслуживающий прибор; $X_1(t)$ — случайный сигнал, характеризующий состояние обслуживающего прибора ($X_1(t)=0$, если в момент t прибор свободен, и $X_1(t)=1$, если в момент t прибор занят); $Y(t)=X(t)(1-X_1(t))$; $Z(t)$ — поток заявок, обслуженных системой; $W(t)$ — поток потерянных заявок.

Как и в [5], наряду с этой системой рассмотрим ее нормализованную модель, в которой

$$\tilde{Y}(t)=X(t)\,(1-\tilde{X}_1(t)),\qquad \tilde{X}_1(t)=\int_0^t (1-\Phi(t-\tau))\,\tilde{Y}(\tau)\,d\tau.$$

Волна над символами Y и X_1 означает, что рассматриваемые величины относятся не к реальной, а к нормализованной системе. Из этих двух соотношений вытекает, что

$$\tilde{X}_1(t)=\int_0^t (1-\Phi(t-\tau))\,X(\tau)\,(1-\tilde{X}_1(\tau))\,d\tau. \tag{1}$$

Импульсный сигнал $X(t)$ представим в виде

$$X(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\delta(t-t_i), \tag{2}$$

где $t_1, t_2, \ldots$ — моменты поступления заявок в систему. Из (1) и (2) следует, что

$$\tilde{X}_1(t_{n+1})=\sum_{i=1}^{n}(1-\Phi(t_{n+1}-t_i))\,(1-\tilde{X}_1(t_i)). \tag{3}$$

Соотношение (3) при начальном условии $\tilde{X}_1(t_1)=0$ позволяет определить величины $\tilde{X}_1(t_2)$, $\tilde{X}_1(t_3), \ldots$, характеризующие состояние обслуживающего прибора (свободен — занят) в моменты поступления заявок. В частности, нетрудно проверить, что в случае экспоненциального закона обслуживания (т. е. при $\Phi(t)=1-e^{-\mu t}$) $\tilde{X}_1(t_{n+1})=e^{-\mu(t_{n+1}-t_n)}$. В общем случае, переходя в (3) к математическим ожиданиям и учитывая, что случайные величины $\Phi(t_{n+1}-t_i)$ и $\tilde{X}_1(t_i)$ независимы, получаем

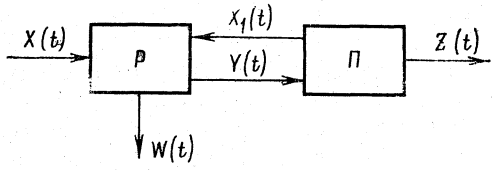

Рис. 1

$$\mathrm{M}[\tilde{X}_1(t_{n+1})]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}[1-\Phi(t_{n+1}-t_i)]\,\mathrm{M}[1-\tilde{X}_1(t_i)], \tag{4}$$

где M — символ математического ожидания. Предельным переходом при $n\to\infty$ из (4) получаем

$$\tilde{x}_1=(1-\tilde{x}_1)\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{M}[1-\Phi(t_i)],$$

где

$$\tilde{x}_1=\lim_{n\to\infty}\mathrm{M}[\tilde{X}_1(t_n)]. \tag{5}$$

Для вычисления $\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{M}[1-\Phi(t_i)]$ обозначим через $f_i(t)$ плотность распределения вероятностей времени поступления в систему i-й по счету заявки, так что $f_i(t)$ есть композиция i функций, каждая из которых равна $f(t)$. Тогда

$$\tilde{x}_1=(1-\tilde{x}_1)\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\infty}(1-\Phi(u))\,f_i(u)\,du.$$

Учитывая, что $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)=\lambda(t)=\mathrm{M}[X(t)]$, получаем

$$\tilde{x}_1=(1-\tilde{x}_1)\int_0^{\infty}(1-\Phi(u))\lambda(u)\,du. \tag{6}$$

В приложениях бывает достаточно знать величину $\tilde{x}_1$, которая определяется соотношением (6) и представляет собой вероятность потери заявки системой в установившемся режиме. Для получения величины

$$x_1=\lim_{t\to\infty}\mathrm{M}[\tilde{X}_1(t)], \tag{7}$$

представляющей собой вероятность занятости прибора в установившемся режиме, можно воспользоваться соотношением (1), если учесть, что

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{M}[X(t)\tilde{X}_1(t)]=\lim_{t\to\infty}\mathrm{M}[X(t)]\cdot\lim_{n\to\infty}\mathrm{M}[\tilde{X}_1(t_n)]=\lambda\tilde{x}_1.$$

Здесь принято обозначение $\lambda=\lim_{t\to\infty}\mathrm{M}[X(t)]$. Известно, что $\lambda^{-1}=\int_0^{\infty}tf(t)\,dt$.

Замечая также, что $\int_0^{\infty}(1-\Phi(u))\,du=\mu^{-1}$, где μ^{-1} — среднее время обслуживания заявки, и обозначая отношение λ/μ буквой ρ, получаем из (1) окончательно

$$x_1=\rho(1-\tilde{x}_1). \tag{8}$$

Приведенные расчеты относятся к случаю, когда существует предел $\lim_{t\to\infty}\mathrm{M}[X(t)]$. Однако соотношение (8), как нетрудно проверить, остается в силе и в некоторых других случаях, например в случае детерминированного потока на входе, когда $X(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\delta(t-ih)$, где h — неслучайный интервал между соседними заявками.

Приближенное решение описанной задачи методом нормализации приведено в [4]. Формулы (6) и (8), полученные выше также методом нормализации, но с привлечением более подробных, чем в [4], выкладок, дают уже не приближенный, а точный результат [1, 3]. Иными словами,

$$\tilde{x}_1=\lim_{n\to\infty}\mathrm{M}[\tilde{X}_1(t_n)]=\lim_{n\to\infty}\mathrm{M}[X_1(t_n)],$$

$$x_1=\lim_{t\to\infty}\mathrm{M}[\tilde{X}_1(t)]=\lim_{t\to\infty}\mathrm{M}[X_1(t)].$$

3. Случай произвольных m и n

Со стохастической системой обслуживания, описанной в разделе 1 (m и n произвольны), так же, как и в [5], свяжем систему $m+n$ последовательно соединенных ячеек (рис. 2), из которых первые m соответствуют обслуживающим приборам, а последние n — местам в бункере. При $1\leqslant i\leqslant m$ ячейка i (рис. 3) представляет собой подсистему с двумя входами $Y_i(t)$ и $U_{i+1}(t)$ и тремя выходами $Z_i(t)$, $U_i(t)$ и $X_i(t)$. Нормализация этой ячейки

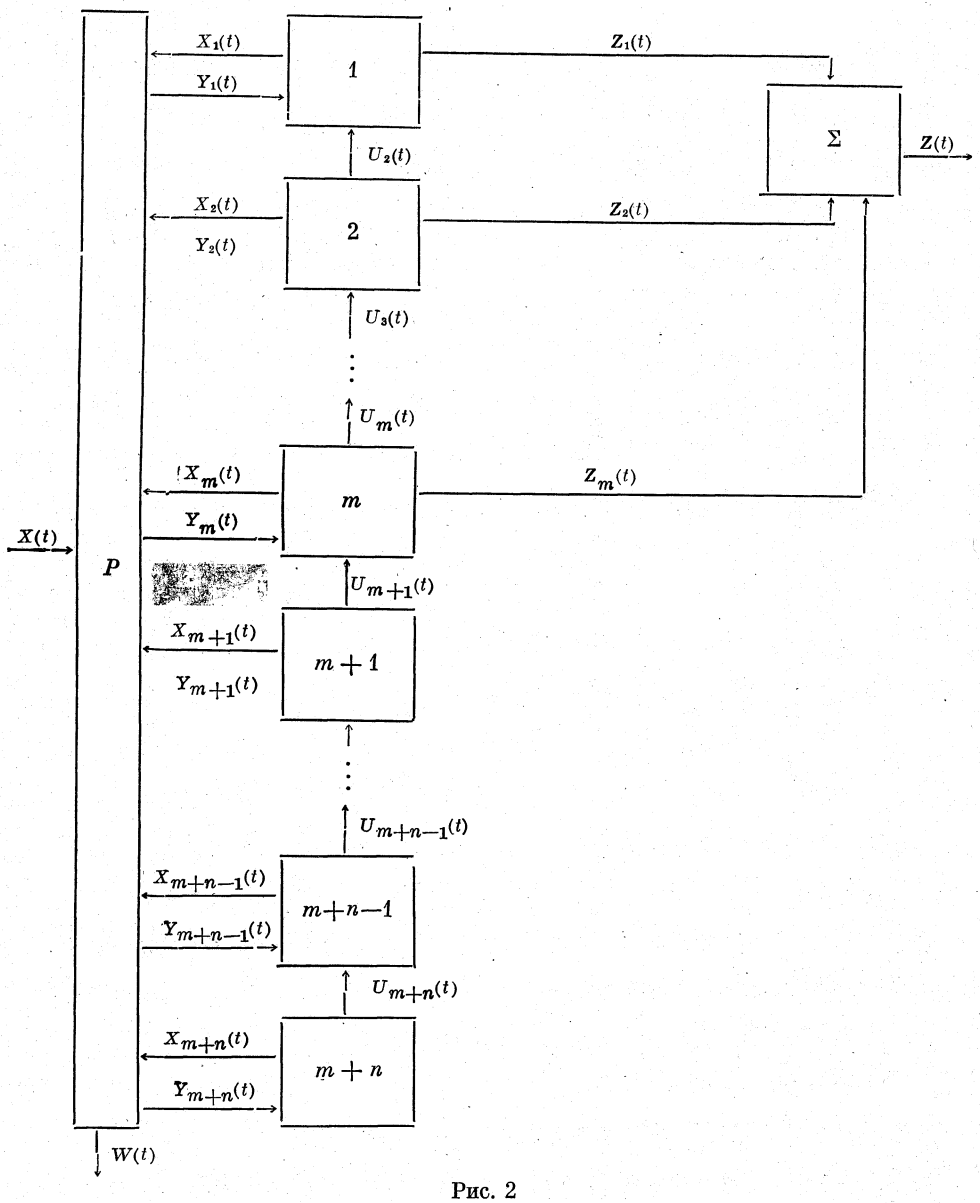

Рис. 2

в соответствии с [4, 5] приводит к операторам a_i и A_i, которые определяются следующим образом:

$$\tilde{Z}_i(t)=\theta_i a_i[\tilde{Y}_i(t)+\tilde{U}_{i+1}(t)]=\theta_i\int_0^t i\mu e^{-i\mu(t-\tau)}(\tilde{Y}_i(\tau)+\tilde{U}_{i+1}(\tau))\,d\tau, \tag{9}$$

$$\tilde{U}_i(t)=(1-\theta_i)\,a_i[\tilde{Y}_i(t)+\tilde{U}_{i+1}(t)],$$

$$\tilde{X}_i(t)=A_i[\tilde{Y}_i(t)+\tilde{U}_{i+1}(t)]=\int_0^t e^{-i\mu(t-\tau)}(\tilde{Y}_i(\tau)+\tilde{U}_{i+1}(\tau))\,d\tau,$$

где θ_i — случайная величина, равная 1, если из приборов с номерами 1, 2, ..., i, обслуживающих заявки, первым закончит обслуживание i-й прибор, и 0 в противном случае. При $m+1\leqslant i\leqslant m+n$ ячейка i описывается аналогично, с той лишь разницей, что в этом случае $\theta_i=0$, $a_i=a_m$, $\tilde{U}_{m+n+1}(t)=0$. Для завершения описания нормализованной модели рассматриваемой стохасти-

ческой системы обслуживания остается заметить, что $\tilde{Y}_i(t)=X(t)\,(\tilde{X}_{i-1}(t)-\tilde{X}_i(t))$ при любом $1\leqslant i\leqslant m+n$ и $\tilde{X}_0(t)=1$.

Оператор $(1-\theta_i)a_i$ обозначим α_i. Тогда из (9) с учетом того, что $\tilde{U}_{m+n+1}(t)=0$, получаем при любом $1\leqslant i\leqslant m+n$

$$\tilde{U}_i(t)=\sum_{j=i}^{m+n}\left(\prod_{k=i}^{j}\alpha_k\right)[\tilde{Y}_j(t)]. \tag{10}$$

Произведение $\prod\limits_{k=i}^{j}\alpha_k$ в (10), как и другие произведения операторов, используемых ниже, рассматривается в обычном смысле. В частности,

$$\left(\prod_{k=i}^{j}\alpha_k\right)[\tilde{Y}_j(t)]=\alpha_j\left[\left(\prod_{k=i}^{j-1}\alpha_k\right)[\tilde{Y}_j(t)]\right].$$

Заметим, что $A_i=\alpha_i/i\mu(1-\theta_i)$. Учитывая это, из (9) и (10) можно получить соотношения, связывающие между собой только функции $\tilde{X}_i(t)$ ($i=1, 2,\ldots, m+n$):

$$\tilde{X}_i(t)=\frac{1}{i\mu(1-\theta_i)}\sum_{j=i}^{m+n}\left(\prod_{k=i}^{j}\alpha_k\right)[\tilde{Y}_j(t)].$$

Переходя в этих соотношениях к математическим ожиданиям и учитывая, что $\mathrm{P}\{\theta_i=0\}=i-1/i$ при $1\leqslant i\leqslant m$ и $\mathrm{P}\{\theta_i=0\}=1$ при $m+1\leqslant i\leqslant m+n$, получаем

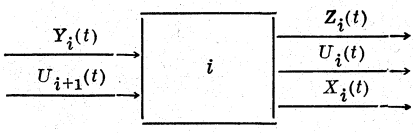

Рис. 3

$$\mathrm{M}[\tilde{X}_1(t)]=\sum_{j=i}^{m}\frac{1}{j\mu}\mathrm{M}\left[\left(\prod_{k=i}^{j}a_k\right)[\tilde{Y}_j(t)]\right]+ \tag{11}$$

$$+\sum_{j=m+1}^{m+n}\frac{1}{m\mu}\mathrm{M}\left[\left(\prod_{k=i}^{m}a_k\right)a_m^{j-m}[\tilde{Y}_j(t)]\right],$$

если $1\leqslant i\leqslant m$, и

$$\mathrm{M}[\tilde{X}_i(t)]=\sum_{j=i}^{m+n}\frac{1}{m\mu}\mathrm{M}[a_m^{j-i+1}[\tilde{Y}_j(t)]], \tag{12}$$

если $m+1\leqslant i\leqslant m+n$. (Символом $a_m{}^r$ обозначается произведение r операторов, каждый из которых есть a_m.)

Заметим, что $\dfrac{1}{j\mu}\prod\limits_{k=i}^{j}a_k$, $\dfrac{1}{m\mu}\left(\prod\limits_{k=i}^{j}a_k\right)a_m^{j-m}$ и $\dfrac{1}{m\mu}a_m^{j-i+1}$ в (11) и (12) представляют собой линейные и интегральные операторы. Соответствующие им весовые функции [6] обозначим $\alpha_{ij}(\sigma)$, $\gamma_{ij}(\sigma)$ и $\beta_{j-i}(\sigma)$. Ввиду простоты операторов $a_1, a_2,\ldots, a_m$ указанные весовые функции могут быть легко найдены методом преобразования Лапласа [7]. Здесь не будем останавливаться на конкретных, достаточно элементарных расчетах; приведем

лишь окончательный результат:

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
&\alpha_{ij}(\sigma)=C_{j-1}^{i-1}e^{-i\mu\sigma}(1-e^{-\mu u})^{j-i} && (i\leqslant j\leqslant m),\\
&\beta_k(\sigma)=\frac{(m\mu\sigma)^k}{k!}e^{-m\mu\sigma} && (0\leqslant k\leqslant n-1),\\
&\gamma_{ij}(\sigma)=m\mu\alpha_{im}(\sigma)*\beta_{j-m-1}(\sigma) && (m+1\leqslant j\leqslant m+n).
\end{aligned}
$$

Символом * в последнем соотношении (13) обозначена свертка функций:

$$
\alpha(\sigma)*\beta(\sigma)=\int_0^\sigma \alpha(t)\beta(\sigma-t)\,dt.
$$

Теперь обратимся к предельному переходу при $t\to\infty$ в (11) и (12). Наши преобразования будут вполне аналогичны тем, которые были осуществлены в разделе 2 при переходе от (1) к (6) и (8). Введем следующие обозначения:

$$
(14)\qquad \tilde{x}_i=\lim_{n\to\infty}\mathrm{M}[\tilde{X}_i(t_n)],\qquad x_i=\lim_{t\to\infty}\mathrm{M}[\tilde{X}_i(t)];
$$

$$
(15)\qquad a_{ij}=\int_0^\infty \lambda(\sigma)\alpha_{ij}(\sigma)\,d\sigma,\quad b_k=\int_0^\infty \lambda(\sigma)\beta_k(\sigma)\,d\sigma,\quad c_{ij}=\int_0^\infty \lambda(\sigma)\gamma_{ij}(\sigma)\,d\sigma.
$$

Тогда из (11) и (12) получаем

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
&\tilde{x}_i=\sum_{j=i}^{m}a_{ij}(\tilde{x}_{j-1}-\tilde{x}_j)+\sum_{j=m+1}^{m+n}c_{ij}(\tilde{x}_{j-1}-\tilde{x}_j) && (1\leqslant i\leqslant m),\\
&\tilde{x}_i=\sum_{j=i}^{m+n}b_{j-i}(\tilde{x}_{j-1}-\tilde{x}_j) && (m+1\leqslant i\leqslant m+n);
\end{aligned}
$$

$$
(17)\qquad
\begin{aligned}
&x_i=\sum_{j=i}^{m}\rho j^{-1}(\tilde{x}_{j-1}-\tilde{x}_j)+\rho m^{-1}(\tilde{x}_m-\tilde{x}_{m+n}) && (1\leqslant i\leqslant m),\\
&x_i=\rho m^{-1}(\tilde{x}_{i-1}-\tilde{x}_{m+n}) && (m+1\leqslant i\leqslant m+n).
\end{aligned}
$$

Решив системы уравнений (16) и (17), нетрудно найти и другие важные параметры нормализованной системы. В частности,

$$
y_i=\lim_{t\to\infty}\mathrm{M}[\tilde{Y}_i(t)]=\lim\mathrm{M}[X(t)(\tilde{X}_{i-1}(t)-\tilde{X}_i(t))]=\lambda(\tilde{x}_{i-1}-\tilde{x}_i).
$$

А это, например, позволяет найти T_i — среднее значение периода занятости i приборов системы $(1\leqslant i\leqslant m)$, т. е. среднее значение промежутка времени, который отсчитывается от того момента, когда поступающая в систему заявка застает $i-1$ приборов, занятых обслуживанием, и заканчивается, когда впервые после этого момента в системе остаются занятыми обслуживанием ровно $i-1$ приборов. По аналогии с [5],

$$
(18)\qquad T_i=\frac{x_i}{y_i}=\frac{1}{\lambda}\frac{x_i}{\tilde{x}_{i-1}-\tilde{x}_i}.
$$

4. Решение системы уравнений (16)

Изложим некоторые результаты, полезные при практическом решении системы уравнений (16).

1. *Случай* $n=0$. В этом случае (16) принимает вид

$$\tilde{x}_i = \sum_{j=i}^{m} a_{ij}(\tilde{x}_{j-1}-\tilde{x}_j) \qquad (1\leqslant i\leqslant m), \tag{19}$$

причем $\tilde{x}_0=1$. По правилу Крамера можно найти $\tilde{x}_m$. В приложении I показано, что

$$\tilde{x}_m = \sum_{i=0}^{m} C_m{}^i \frac{1}{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_i}, \tag{20}$$

$$\lambda_0=1, \qquad \lambda_i = \int_0^\infty e^{-i\mu u}\lambda(u)\,du \qquad (1\leqslant i\leqslant m). \tag{21}$$

Остальные неизвестные системы (19) определяются рекуррентно: при $1\leqslant i\leqslant m-1$

$$\tilde{x}_{i-1} = \lambda_i{}^{-1}\left((1+\lambda_i)\tilde{x}_i + \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij}(\tilde{x}_{j-1}-\tilde{x}_j)\right).$$

2. При рассмотрении случая, когда $n\neq 0$, приходим к системам уравнений вида

$$z_i = \sum_{j=i}^{m} a_{ij}(z_{j-1}-z_j) + \varepsilon_i z_m, \tag{22}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ — заданные числа; $z_1, z_2, \ldots, z_m$ — неизвестные и $z_0=1$. Неизвестное z_m в системе уравнений (22) также можно найти по правилу Крамера, а остальные неизвестные — рекуррентно. Подробное решение приведено в приложении II; здесь же ограничимся основным результатом. Пусть $\tilde{x}_1^{(m)}, \tilde{x}_2^{(m)}, \ldots, \tilde{x}_m^{(m)}$ — решение системы m уравнений (19), а $z_1^{(m)}, z_2^{(m)}, \ldots, z_m^{(m)}$ — решение системы m уравнений (22). Тогда

$$\frac{1}{z_m^{(m)}} = \frac{1+\lambda_1-\varepsilon_1}{\lambda_1} + \sum_{k=2}^{m}(1-\varepsilon_k)\left(\frac{1}{\tilde{x}_k^{(k)}} - \frac{1}{\tilde{x}_{k-1}^{(k-1)}}\right). \tag{23}$$

3. *Общий случай.* Из n последних уравнений системы (16) получаем при $1\leqslant i\leqslant n$:

$$\tilde{x}_{m+i} = \frac{b_0{}^i\Delta_{n-i}}{\Delta_n}\tilde{x}_m, \tag{24}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b_0+1 & b_1 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ 1 & b_0+1 & & b_{n-3} & b_{n-2} \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & & b_0+1 & b_1 \\ 1 & 1 & & 1 & b_0+1 \end{vmatrix}.$$

Для нахождения неизвестных $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m$ используем первые m уравнений системы (16) и формулу (24). В результате получается система уравнений (22) при

$$\varepsilon_i = \sum_{j=m+1}^{m+n} c_{ij}\frac{b_0^{j-m-1}\Delta_{m+n+1-j} - b_0^{j-m}\Delta_{m+n-j}}{\Delta_n}. \tag{25}$$

Таблица 1

ρ	0,1	0,3	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0
$\tilde{P}_2(1)$	0,0045	0,0335	0,0769	0,2000	0,4000	0,5294	0,6154
$\tilde{P}_2(2)$	0,0002	0,0082	0,0323	0,1379	0,3536	0,4992	0,5950
$\tilde{P}_2(3)$	0,0000	0,0034	0,0197	0,1147	0,3354	0,4877	0,5874
$P_2(1)$	0,0045	0,0335	0,0769	0,2000	0,4000	0,5294	0,6154
$P_2(2)$	0,0014	0,0219	0,0645	0,2069	0,4420	0,5824	0,6694
$P_2(3)$	0,0006	0,0167	0,0577	0,2082	0,4596	0,6041	0,6907

Таблица 2

ρ	0,1	0,3	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0
$\tilde{P}_3(1)$	0,0002	0,0050	0,0189	0,0909	0,2857	0,4426	0,5517
$\tilde{P}_3(2)$	0,0000	0,0005	0,0043	0,0488	0,2413	0,4155	0,4358
$\tilde{P}_3(3)$	0,0000	0,0001	0,0018	0,0354	0,2243	0,4056	0,5304
$P_3(1)$	0,0002	0,0050	0,0189	0,0909	0,2857	0,4426	0,5517
$P_3(2)$	0,0000	0,0013	0,0086	0,0732	0,3016	0,4848	0,6028
$P_3(3)$	0,0000	0,0005	0,0053	0,0642	0,3074	0,5024	0,6237

5. Примеры

По описанной методике были рассчитаны две системы с $m=2$, $n=0$ и $m=2$, $n=1$, каждая для трех входных эрланговских потоков с $f(t)=\lambda\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}$; при $k=1$ (пуассоновский поток), $k=2$ и $k=3$. В каждом из этих трех случаев полагалось $\lambda/k\mu=\rho$, так что каждый из трех потоков обеспечивал одну и ту же интенсивность заявок, приходящихся на один прибор. Некоторые результаты расчетов приведены ниже.

Табл. 1 относится к случаю $m=2$, $n=0$. В ней $\tilde{P}_2(k)$ и $P_2(k)$ — вероятности потери заявки и вероятности полной загруженности системы, относящиеся к соответствующим значениям k ($k=1$, 2, 3). Табл. 2, содержащая аналогичные величины $\tilde{P}_3(k)$ и $P_3(k)$, относится к случаю $m=2$, $n=1$.

Некоторые из приведенных в таблицах значений, естественно, совпадают с соответствующими значениями, приведенными в [1], § 1.4. Расчеты подтверждают необходимость различать величины $\tilde{P}_2$ и P_2 (или $\tilde{P}_3$ и P_3), которые совпадают лишь при $k=1$ (пуассоновский входящий поток). Они показывают также, что вероятность потери заявки системой зависит не только от средней длины интервала между последовательными заявками, но и от других характеристик этой величины (в общем случае требуется задание закона распределения вероятностей указанной длины).

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Систему уравнений (19) запишем в матричном виде $B\tilde{x}=C$, где $C'=(\lambda_1, 0, 0, \ldots, 0)$, а элементами матрицы B служат числа

$$b_{ij}=\begin{cases}\delta_{ij}+a_{ij}-a_{i,j+1}, & \text{если} \quad i\leqslant j<m,\\ \delta_{ij}+a_{ij}, & \text{если} \quad i\leqslant j=m.\end{cases}$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера. Определитель матрицы B зависит от $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, где λ_i определяется по (21). Будем писать $\det B = B_m(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$. Преобразуем

$$\det B = \begin{vmatrix} 1+a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & a_{13}-a_{14} & \cdots & a_{1,\,m-1}-a_{1m} & a_{1m} \\ -a_{22} & 1+a_{22}-a_{23} & a_{23}-a_{24} & & a_{2,\,m-1}-a_{2m} & a_{2m} \\ 0 & -a_{33} & 1+a_{33}-a_{34} & & a_{3,\,m-1}-a_{3m} & a_{3m} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1+a_{m-1,\,m-1}-a_{m-1,\,m} & a_{m-1,\,m} \\ 0 & 0 & 0 & & -a_{mm} & a_{mm} \end{vmatrix}$$

посредством прибавления m-го столбца к $(m-1)$-му столбцу, сохраняя прежними столбцы $1, 2, \ldots, m-2, m$. Учитывая, что

$$(a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{m-1,\,m}, a_{mm}+1) = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{mm}) + (0, 0, \ldots, 1),$$

получаем

$$B_m(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = a_{mm} B_{m-1}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}) + D,$$

$$D = \begin{vmatrix} 1+a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & a_{13}-a_{14} & \cdots & a_{1,\,m-1} & a_{1m} \\ -a_{22} & 1+a_{22}-a_{23} & a_{23}-a_{24} & & a_{2,\,m-1} & a_{2m} \\ 0 & -a_{33} & 1+a_{33}-a_{35} & & a_{3,\,m-1} & a_{3m} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1+a_{m-1,\,m-1} & a_{m-1,\,m} \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & a_{13}-a_{14} & \cdots & a_{1,\,m-1}-a_{1m} \\ -a_{12} & 1+a_{22}-a_{23} & a_{23}-a_{24} & & a_{2,\,m-1}-a_{2m} \\ 0 & -a_{33} & 1+a_{33}-a_{34} & & a_{3,\,m-1}-a_{3m} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & 1+a_{m-1,\,m-1}-a_{m-1,\,m} \end{vmatrix},$$

Из последнего определителя (он имеет порядок $m-1$) образуем новый определитель $(m-1)$-го порядка $\gamma = \det \|\gamma_{ij}\|$, i-я строка которого представляет собой сумму первых i строк последнего из выписанных определителей; таким образом,

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{i} (\delta_{kj} + a_{kj} - a_{k,\,j+1}), & \text{если} \quad 1 \leqslant j < m, \\ \sum\limits_{k=1}^{i} (\delta_{kj} + a_{kj}), & \text{если} \quad j = m. \end{cases}$$

Очевидно, что $\sum\limits_{k=1}^{i} (a_{kj} - a_{k,\,j+1}) = C_{j-1}^{i-1} \int\limits_0^\infty (\lambda(u) e^{-\mu u}) e^{-\mu u} (1-e^{-\mu u})^{j-i}\, du$, и потому $\det\|\gamma_{ij}\| = B_{m-1}(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m)$. Таким образом,

$$B_m(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = a_{mm} B_{m-1}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}) + B_{m-1}(\lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_m),$$

откуда, учитывая, что $a_{mm} = \lambda_m$, получаем по индукции

$$B_m(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m \sum_{i=0}^{m} C_m^i (\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i)^{-1}.$$

Для получения (20) остается заметить, что при замене первого столбца матрицы B столбцом C (столбец свободных членов в системе уравнений (19)) получается матрица, определитель которой равен $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m$.

Решение системы уравнений (22) по правилу Крамера сводится к вычислению определителя

$$\begin{vmatrix} 1+a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,\,m-1}-a_{1m} & a_{1m}-\varepsilon_1 \\ -a_{22} & 1+a_{22}-a_{23} & & a_{2,\,m-1}-a_{2m} & a_{2m}-\varepsilon_2 \\ 0 & -a_{33} & & a_{3,\,m-1}-a_{3m} & a_{3m}-\varepsilon_3 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & 1+a_{m-1,\,m-1}-a_{m-1,\,m} & a_{m-1,\,m}-\varepsilon_{m-1} \\ 0 & 0 & & -a_{mm} & 1+a_{mm}-\varepsilon_m \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a_{11}-\varepsilon_1 & a_{12}-\varepsilon_1 & \cdots & a_{1,\,m-1}-\varepsilon_1 & a_{1m}-\varepsilon_1 \\ 1-\varepsilon_2 & 1+a_{22}-\varepsilon_2 & & a_{2,\,m-1}-\varepsilon_2 & a_{2m}-\varepsilon_2 \\ 1-\varepsilon_3 & 1-\varepsilon_3 & & a_{3,\,m-1}-\varepsilon_3 & a_{3m}-\varepsilon_3 \\ \vdots & & & & \\ 1-\varepsilon_{m-1} & 1-\varepsilon_{m-1} & & 1+a_{m-1,\,m-1}-\varepsilon_{m-1} & a_{m-1,\,m}-\varepsilon_{m-1} \\ 1-\varepsilon_m & 1-\varepsilon_m & & 1-\varepsilon_m & 1+a_{mm}-\varepsilon_m \end{vmatrix}.$$

Этот определитель обозначим через $\Delta_m(\lambda(u);\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_m)$. Очевидно, что

$$\Delta_m(\lambda(u);\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_m)=a_{mm}\Delta_{m-1}(\lambda(u);\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_{m-1})+\nu_m,$$

где

$$\nu_m = \begin{vmatrix} 1+a_{11}-\varepsilon_1 & a_{12}-\varepsilon_1 & \cdots & a_{1,\,m-1}-\varepsilon_1 & a_{1m}-\varepsilon_1 \\ 1-\varepsilon_2 & 1+a_{22}-\varepsilon_2 & & a_{2,\,m-1}-\varepsilon_2 & a_{2m}-\varepsilon_2 \\ 1-\varepsilon_3 & 1-\varepsilon_3 & & a_{3,\,m-1}-\varepsilon_3 & a_{3m}-\varepsilon_3 \\ \vdots & & & & \\ 1-\varepsilon_{m-1} & 1-\varepsilon_{m-1} & & 1+a_{m-1,\,m-1}-\varepsilon_{m-1} & a_{m-1,\,m}-\varepsilon_{m-1} \\ 1-\varepsilon_m & 1-\varepsilon_m & & 1-\varepsilon_m & 1-\varepsilon_m \end{vmatrix} =$$

$$=(1-\varepsilon_m)\,\Delta_{m-1}(\lambda(u)\,e^{-\mu u};\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0).$$

Итак,

$$\Delta_m(\lambda(u);\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_m)=\lambda_m\Delta_{m-1}(\lambda(u);\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_{m-1})+$$
$$+(1-\varepsilon_m)\,\Delta_{m-1}(\lambda(u)\,e^{-\mu u};\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0).$$

Отсюда, учитывая, что $\Delta_m(\lambda(u);\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)=\det B$ (см. приложение I), нетрудно получить (23).

Поступила в редакцию
16 июля 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. «Наука», 1966.
2. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания. «Наука», 1966.
3. *Саати Т. Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. «Сов. радио», 1971.
4. *Пугачев В. С.* Приближение стохастических систем методом нормализации. Автоматика и телемеханика, № 5, стр. 74—81, 1974.
5. *Кочетков Е. С.* Нормализация стохастической системы обслуживания несколькими приборами с бункером. Автоматика и телемеханика, № 7, стр. 52—56, 1976.
6. *Пугачев В. А., Кузнецов П. И.* Справочник по операционному исчислению. Гостехиздат, 1951.

SERVICING A RECURRENT FLUX OF QUIERIES IN A MULTI-CHANNEL EXPONENTIAL SYSTEM WITH A FINITE QUEUE

Ye. S. KOCHETKOV

By the normalization method sets of linear equations are derived, that dictate the stationary state of a multi-channel system which services a recurrent flux of quieries with a finite queue; the servicing time for each quiery is assumed exponential.