V. I. Gurman, Theory of optimum discrete processes, *Avtomat. i Telemekh.*, 1973, Issue 7, 53–58

УДК 62-50:519.2

К ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ

В. И. ГУРМАН

(Москва)

На дискретные задачи оптимального управления распространяются некоторые результаты, полученные ранее для непрерывных задач с неограниченными производными: выясняется, при каких свойствах множества допустимых состояний следующего шага возможен переход к эквивалентной задаче «меньшего порядка», и дается схема перехода. Формулируются достаточные условия оптимальности и дискретно-непрерывных процессов на основе достаточных условий В. Ф. Кротова, полученных для непрерывных и дискретных процессов в отдельности.

На практике широко распространен круг задач, связанный с исследованием и оптимизацией дискретных управляемых процессов. Примерами таких процессов могут служить многоэтапный космический перелет, многошаговый алгоритм, итерационная процедура поиска, многооперационный технологический процесс и т. п.

Теория оптимального управления дискретными процессами получила значительное развитие в ряде работ [1—12], однако конкретных методов оптимизации разработано гораздо меньше, чем в случае непрерывных процессов. Отчасти это объясняется отсутствием аналога принципа максимума Л. С. Понтрягина для оптимальных дискретных процессов.

Настоящая работа имеет целью распространить на дискретные задачи оптимизации в возможно более общей постановке некоторые результаты, полученные ранее для непрерывных задач [13] и, кроме того, на основе достаточных условий оптимальности для дискретных и непрерывных задач в отдельности [11] сформулировать достаточные условия оптимальности дискретно-непрерывных процессов, которые в дальнейшем будем называть сложными.

1. Общая постановка задачи

Рассматривается множество D дискретных управляемых процессов

$$x(t+1) \in Q(t, x(t))^{*}, \tag{1}$$

где $x(t)$ — элемент некоторого множества $X(t)$, заданного при всех $t \in A = \{0, 1, \ldots, N\}$, $Q(t, x(t))$ — некоторое подмножество $X(t+1)$, заданное при каждом $t \in A$, $x(t) \in X(t)$.

Пусть имеется функционал $F(x(N))$, заданный на множестве $X(N)$. Тем самым на D определен функционал $I(x(t)) = F(x(N))$. Ставится задача нахождения минимизирующей последовательности I на D, т. е. последовательности $\{x_s(t)\}$, такой, что

$$I(x_s(t)) \to \inf_D I.$$

Эта постановка отличается от постановки, данной в [10], лишь по форме, выбранной для удобства и краткости изложения.

* Множество $Q(t, x(t))$ характеризует возможности управления на шаге t в состоянии $x(t)$; если оно состоит из единственного элемента, то процесс неуправляем.

2. Вырожденные задачи

Пусть при каждом t, $x(t)$ имеется взаимно-однозначное отображение

(2) $$X(t) \rightleftarrows Y(t) \times Z(t)$$

такое, что

$$Q(t, x(t)) \rightleftarrows Q^{(y)}(t, x(t)) \times Q^{(z)}(t, x(t)),$$

где $Q^{(y)}(t, x(t))$ — некоторое подмножество множества $Y(t+1)$ с элементами $y(t+1)$, $Q^{(z)}(t, x(t))$ — подмножество множества $Z(t+1)$ с элементами $z(t+1)$.

Пусть

(3) $$S(t, y(t)) = Q^{(y)}(t, x(t, y(t), Z(t))).$$

Рассмотрим множество процессов

(4) $$y(t+1) \in S(t, y(t)), \quad y(t) \in Y(t),$$

которое обозначим $D^{(y)}$, и определим на нем функционал

$$J = F^{(y)}(y(N)) = \inf_{z \in Z(N)} F(x(y(N), z)).$$

Задачу минимума J на $D^{(y)}$ назовем *производной задачей*, соответствующей исходной задаче, изложенной в разделе 1. Более точно, производная задача состоит в нахождении минимизирующей последовательности J на $D^{(y)}$.

Теорема 1. Если при всех $t \in A$ $Q^{(z)}(t, x(t)) = Z(t+1)$, то производная задача эквивалентна исходной:

$$\inf_{D^{(y)}} J = \inf_{D} I.$$

Доказательство. Рассмотрим класс $D^{(yz)}$ процессов

$$y(t+1) \in Q^{(y)}(t, x(t, y(t), z(t))),$$

$$z(t+1) \in Q^{(z)}(t, x(t, y(t), z(t))), \quad (y(0), z(0)) \in Y(0) \times Z(0),$$

получаемый как преобразование класса D при отображении (2). Множество процессов $y(t)$, соответствующих $D^{(yz)}$, обозначим $D_1^{(y)}$. Так как $Q^{(y)} \subseteq S$ (см. (3)): то $D_1^{(y)} \subseteq D^{(y)}$. Отсюда с учетом указанных соотношений между множествами $D^{(y)}$ и $D_1^{(y)}$ вытекают следующие соотношения для функционалов:

(5) $$\inf_{D} I \geqslant \inf_{D_1^{(y)}} J \geqslant \inf_{D^{(y)}} J.$$

Покажем, что если $Q^{(z)}(t, x(t)) = Z(t+1)$, то существует последовательность $\{x_s(t)\} \subset D$ такая, что

$$I(x_s(t)) \to \inf_{D^{(y)}} J.$$

Пусть $y_r(t)$ — любой элемент минимизирующей последовательности J на $D^{(y)}$. Тогда из (3), (4) следует, что найдется такой элемент $z_r(t) \in Z(t)$, что

$$y_r(t+1) \in Q^{(y)}(t, x(t, y_r(t), z_r(t))), \; y_r(0) \in Y(0).$$

Так как $Z(t+1) = Q^{(z)}(t, x(t))$, то, следовательно,

$$x_r(t+1) \in Q(t, x_r(t)), \quad x_r(0) \in X(0),$$

т. е. $\{x_r(t)\} \subset D$. Это и означает, что $\inf\limits_{D(y)} J = \inf\limits_{D} J$.

Теорема доказана.

Задачи рассматриваемого типа и их решения будем называть *вырожденными*.

Рассмотрим как частный случай следующую задачу минимума функции $F(x, (N))$ конечного состояния системы:

(6) $$x(t+1) = g(t, x(t), u) + h(t, x(t))v,$$

где $x(t) \in X(t) \subset E^n$, g, $h \in E^n$, $v \in E^1$, $u \in V_u(t, x(t)) \subset U(t)$, $U(t)$ — некоторое множество.

Пусть функция $h(t, x(t))$ такова, что существуют $n-1$ независимых первых интегралов системы

$$\frac{dx}{d\tau} = h(t, x), \tag{7}$$

которые обозначим $y^j(t+1, x)$, а их совокупность — через $y(t+1, x)$. Тогда каждая из функций $y^j(t+1, x)$ удовлетворяет следующему уравнению в частных производных:

$$y^j_x(t+1, x) h(t, x) = 0, \tag{8}$$

а это означает, что функции $y^j(t+1, g(t, x(t), u) + h(t, x(t))v)$ не зависят от v. Вектор x может быть выражен из уравнения $y = y(t, x(t))$ как функция y и некоторого скалярного параметра. Для простоты будем полагать, что этот параметр есть одна из координат вектора x, например x^n. Тогда при переходе к новым переменным (y, x^n) система (6) преобразуется к следующей (через $y(t+1)$ обозначено $y(t+1, x(t+1))$):

$$y(t+1) = \varkappa(t, y(t), x^n(t), u),$$
$$x^n(t+1) = g^n(t, x(t), u) + h^n(t, x(t))v.$$

Множество $Q^{(y)}(t, x(t))$ в данном случае есть $y(t+1, g(t, x(t), V_u(t, x(t))) + h(t, x(t))v)$, множество $Q^{(z)}(t, x(t))$ есть числовая ось E^1, множество $S(t, y(t))$ есть $\varkappa(t, y(t), E^1, V_u(t, y(t); E^1))$. Производная задача состоит в минимизации функции

$$F^{(y)}(y(N)) = \inf_{x^n \in E^1} F(x(N, y(N), x^n)$$

конечного состояния системы

$$\begin{aligned} &y(t+1) = \varkappa(t, y(t), x^n(t), u), \\ &y(t) \in Y(t) = y(t, X(t)). \end{aligned} \tag{9}$$

Пример. Пусть требуется найти оптимальный режим подъема ракеты в пустоте с поверхности планеты на максимальную высоту за заданное время при условии, что тяга двигателя может меняться лишь в дискретные моменты времени $0, 1, \ldots, N$, разделяющие заданный промежуток времени $[0, \tau_N]$ на равные интервалы $\Delta = \tau_N / N$. Интегрируя дифференциальные уравнения движения на элементарном промежутке $[\tau_t, \tau_{t+1}]$, получим следующие соотношения между значениями координат в начале и в конце промежутка:

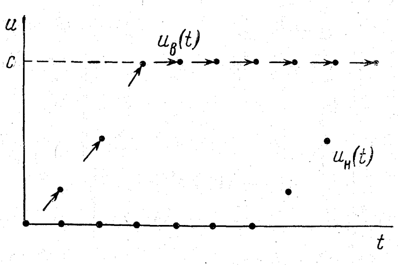
(10а) $u(t+1) = u(t) + a\Delta$,

(10б) $v(t+1) = v(t) + (a-g)\Delta$,

(10в) $h(t+1) = h(t) + v(t)\Delta + {}^1/_2(a-g)\Delta^2 \quad (t = 0, 1, \ldots, N)$.

Здесь u, v, h — соответственно характеристическая скорость и высота подъема ракеты, g — ускорение силы тяжести (принимается постоянным), a — среднее ускорение за счет тяги на промежутке $[\tau_t, \tau_{t+1}]$. Эти соотношения будем рассматривать как дискретные уравнения управляемого движения ракеты, а величину a — как управление, ограниченное пределами

(11) $0 \leqslant a \leqslant f(u)$,



где $f(u)$ — некоторая возрастающая функция (например, максимальное значение тяги постоянно).

Таким образом, требуется минимизировать функцию конечного состояния $F(x_N) = -h_N$ системы (10) при граничных условиях

(12) $u(0) = v(0) = h(0) = 0, \quad u(N) = c$.

Построим границы достижимых значений u для системы (10) при условиях (11), (12). Очевидно, до момента времени, когда $u(t) = c$, верхней границей служит решение уравнения (10а) при $a(t) = f(u(t))$, удовлетворяющее начальному условию, а затем $u(t) = c$. Нижней границей служит решение того же уравнения при $a = 0$, удовлетворяющее начальному условию, т. е. $u(t) = 0$ до пересечения его с решением при $a(t) = f(u(t))$, удовлетворяющим конечному условию (рисунок). Далее эти границы будем считать априорно заданными для множества D (очевидно, это не исказит исходной задачи).

Перейдем к производной задаче. Функции $y^j(t, x(t))$ (здесь $j = 1, 2$) имеют вид

$$y^1 = v - u, \qquad y^2 = h - {}^1\!/_2 u\Delta.$$

Уравнения производной задачи (9) сводятся к следующим:

$$y^1(t+1) = y^1(t) - g\Delta, \tag{13}$$

$$y^2(t+1) = y^2(t) + (y^1(t) + u(t))\Delta - {}^1\!/_2 g(\Delta)^2, \tag{14}$$

а функция $F^{(y)}(y(N))$ есть $y^2(N) - {}^1\!/_2 c\Delta$.

Заметим, что уравнение (13) замкнуто и может быть решено при начальном условии $y^1(0) = 0$, вытекающем из (12), так что задача сводится к исследованию одного уравнения (14), из которого видно, что максимум $y^2(N)$ дает верхняя граница $u : u_{\text{в}}(t)$. Для проверки реализуемости решения производной задачи в классе D достаточно убедиться, что функция $u_{\text{в}}(t)$ удовлетворяет уравнению (10). Но это следует из самого построения $u_{\text{в}}(t)$. Таким образом, решена и исходная задача. Ее решением служит режим, показанный на рисунке, который, как видно, является точным дискретным аналогом известного решения соответствующей непрерывной задачи.

3. Сложные процессы

Пусть имеется подмножество $A^{(*)} \subset A$ такое, что для всех $t \in A^{(*)}$ $X(t)$, $X(t+1)$ суть множества $(n(t)+1)$-мерного эвклидова пространства $x(t) = (\tau(t), y(t))$, где $y \in E^{n(t)}$, $Q(t, x(t))$ — множество элементов $x(t+1)$, соответствующее всевозможным решениям системы дифференциальных уравнений

$$\dot{y} \in S(\tau, y, t)$$

на промежутке $[\tau(t), \tau(t+1)]$ при условиях

$$x(t) \in X(t), \quad x(t+1) \in X(t+1),$$

$$y(\tau) \in V_y(\tau, t) \quad \text{при } \tau \in (\tau(t), \tau(t+1)).$$

Класс троек $(\tau(t), \tau(t+1), y(\tau))$, удовлетворяющих перечисленным условиям, обозначим $D^{\text{н}}(t)$.

Такой процесс будем называть дискретно-непрерывным, или сложным.

Рассмотрим достаточные условия оптимальности сложных процессов как комбинацию достаточных условий [11] для дискретных и непрерывных процессов в отдельности. Для краткости будем полагать, что значения $t = 0$, $t = N$ не принадлежат $A^{(*)}$, что не меняет сути дела.

Введем в рассмотрение произвольный функционал $\varphi^{(\text{д})}(t, x)$ и построим конструкции

$$R^{(\text{д})}(t, x(t), u(t)) = \varphi^{(\text{д})}(t+1, u(t)) - \varphi^{(\text{д})}(t, x(t)),$$

$$G_0\ (u(0)) = -\varphi^{(\text{д})}(1, u(0)),$$

$$G_N^{(\text{д})}(x(N)) = \varphi^{(\text{д})}(N, x(N)) + F(x(N)),$$

$$\mu^{(\text{д})}(t) = \sup_{\substack{u(t) \in Q(t, x(t)) \\ x(t) \in X(t)}} R^{(\text{д})}(t, x(t), u(t)),$$

$$m_0^{(\text{д})} = \inf_{\substack{u(0) \in Q(0, x(0)) \\ x(0) \in X(0)}} G_0^{(\text{д})}(u(0)), \qquad m_N^{(\text{д})} = \inf_{x(N) \in X(N)} G_N^{(\text{д})}(x(N)).$$

Далее введем в рассмотрение при каждом $t \in A^{(*)}$ произвольную непрерывную и непрерывно дифференцируемую при всех (τ, y), за исключением конечного числа плоскостей $\tau = \mathrm{const}$, функцию $\varphi^{(н)}(t, \tau, y)$ и построим функции

$$R^{(н)}(t, \tau, y, v) = \varphi_y^{(н)} v + \varphi_\tau^{(н)},$$

$$G^{(н)}(t, x(t+1)) = \varphi^{(н)}(t, x(t+1)) - \varphi^{(н)}(t, x(t)) - R^{(д)}(t, x(t), x(t+1)),$$

$$\mu^{(н)}(t, \tau) = \sup_{v \in S(t,y), y \in Y y(t)} R^{(н)}(t, y, v),$$

$$m^{(н)}(t) = \inf_{\substack{x(t) \in X(t) \\ x(t+1) \in X(t+1)}} G^{(н)}(x(t), x(t+1)).$$

Класс функций $\varphi^{(н)}(t, \tau, y)$, для которых $\mu^{(н)}(t, \tau)$ суммируемы, обозначим $\Phi^{(н)}(t)$.

Теорема 2. Для того чтобы последовательность $\{x_s(t)\} \subset D$ была минимизирующей, достаточно выполнения условий

1°. $R^{(д)}(t, x_s(t), x_s(t+1)) \to \mu^{(д)}(t)$,

2°. $G_0^{(д)}(x_s(1)) \to m_0^{(д)}, \quad G_N^{(д)}(x_s(N)) \to m_N^{(д)}$.

Далее для выполнения условия 1° при $t \in A^{(*)}$ достаточно существования такой функции $\varphi^{(н)}(t, \tau, y) \in \Phi^{(н)}(t)$, чтобы

1а°. $\mu^{(н)}(t, \tau) \equiv 0$,

1б°. $R^{(н)}(\tau, y_s(\tau), \dot{y}_s(\tau), t) \xrightarrow{м} \mu^{(н)}(\tau, t) = 0$ *,

1в°. $G^{(н)}(t, x_s(t), x_s(t+1)) \to m^{(н)}(\tau, t)$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы есть, по существу, достаточное условие оптимальности дискретных процессов [10, 11] и специального доказательства не требует. Для доказательства второго утверждения введем в рассмотрение функционал

$$L^{(н)}(t) = G^{(н)}(t, x(t), x(t+1)) - \int_{\tau(t)}^{\tau(t+1)} R^{(н)}(t, \tau, y, v)\, dt.$$

Очевидно, при $\varphi^{(н)}(t, \tau, y) \in \Phi^{(н)}(t)$ $L^{(н)}(t)$ определен на $D^{(н)}(t)$,

$$L^{(н)}(t) \equiv -R^{(д)}(t, x(t), x(t+1)),$$

когда

$$(\tau(t), \tau(t+1), y(\tau)) \in D^{(н)}(t), \text{ и } \inf_{D^{(н)}(t)} L^{(н)}(t) = -\mu^{(д)}(t).$$

Обозначим

$$l^{(н)}(t) = m^{(н)}(t) - \int_{\tau(t)}^{\tau(t+1)} \mu^{(н)}(t, \tau)\, dt = m^{(н)}(t).$$

Очевидно, $\inf L^{(н)}(t) \geqslant l^{(н)}(t)$. При выполнении условий 1а°, 1б°, 1в° $L_s^{(н)} \to l^{(н)}(t) = m^{(н)}(t)$, т. е. $l^{(н)}(t) = -\mu^{(д)}(t) = \inf_{D^{(н)}t} L^{(н)}(t)$ или $R^{(д)}(t, x_s(t), x_s(t+1)) \to \mu^{(д)}(t)$, что и требовалось доказать.

Фигурирующие в формулировке и доказательстве теоремы 2 конструкции могут быть использованы для построения приближенных методов по

---

* Символ $\xrightarrow{м}$ означает стремление по мере.

типу, например, изложенному в [11]. Здесь ограничимся лишь выражением для оценки приближенного решения.

Пусть $x_s(t), t \in A$, $y(t, \tau)$, $t \in A^{(*)}$ — приближенное решение рассматриваемой задачи. Все соответствующие ему величины будем обозначать индексом $(\ )_s$. Построим функционал

$$L = G_0^{(\text{д})}(u(0)) + G_N^{(\text{д})}(x(N)) + \sum_{t \in A(*)} L^{(\text{н})}(t) - \sum_{t \in (A/A(*))} R^{(\text{д})}(t, x(t), u(t)),$$

где $L^{(\text{н})}(t)$ строится с помощью функций $\varphi^{(\text{н})}(t, \tau, y) \in \Phi^{(\text{н})}(t)$, удовлетворяющих условию $1_a°$ теоремы 2.

Обозначим

$$l = m_0^{(\text{д})} + m_N^{(\text{д})} + \sum_{t \in A(*)} l^{(\text{н})}(t) - \sum_{t \in (A/A(*))} \mu^{(\text{д})}(t).$$

Непосредственно проверяется, что при $x(t) \in D$, $(\tau(t), \tau(t+1), y(t, \tau)) \in D^{(\text{н})}(t)$ $I = L \geqslant l$.

Отсюда следует, что

$$I_s - \inf_D I \leqslant \Delta_s = L_s - l.$$

Величина Δ_s служит верхней оценкой точности приближенного решения и зависит от выбора функций $\varphi^{(\text{д})}(t, x(t))$, $t \in A$ и $\varphi^{(\text{н})}(t, \tau, y)$, $t \in A^{(*)}$.

Поступила в редакцию
27 июня 1972 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Беллман Р.* Динамическое программирование. Изд-во иностр. литер., 1960.
2. *Красовский Н. Н.* Об одной задаче оптимального регулирования. Прикл. матем. и мех., т. 21, вып. 5, 1957.
3. *Цыпкин Я. З.* Оптимальные процессы в импульсных автоматических системах. Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, № 4, 1960.
4. *Фельбаум А. А.* Основы теории оптимальных автоматических систем. «Наука», 1966.
5. *Цыпкин Я. З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. «Наука», 1968.
6. *Пропой А. И.* О принципе максимума для дискретных систем управления. Автоматика и телемеханика, № 7, 1965.
7. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. «Наука», 1965.
8. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов. «Наука», 1971.
9. *Фан Лянь-цэнь, Ван Чу-сень.* Дискретный принцип максимума. «Мир», 1967.
10. *Кротов В. Ф.* Достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых систем. Докл. АН СССР, т. 172, № 1, 1967.
11. *Кротов В. Ф., Букреев В. З., Гурман В. И.* Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. «Машиностроение», 1969.
12. *Габасов Р., Тарасенко Н. В.* Необходимые условия оптимальности высокого порядка для дискретных систем. Автоматика и телемеханика, № 1, 1971.
13. *Гурман В. И.* Об оптимальных процессах с неограниченными производными. Автоматика и телемеханика, № 12, 1972.

ON THE OPTIMALITY THEORY OF DISCRETE PROCESSES

V. I. GURMAN

Certain results obtained earlier for continuous problems with infinite derivatives are extended to discrete control problems. It is found which properties of the set of feasible states of a subsequent step permit transition to an equivalent «lower order» problem and a flow-chart of the transition is given. Sufficient conditions for optimality of discrete — continuous processes are formulated on the bases of V. F. Krotov's sufficient conditions obtained for continuous and discrete processes separately.