Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Л. Гординг, Об асимптотических свойствах спектральной функции самосопряженного полуограниченного расширения эллиптического дифференциального оператора,
Математика, 1957, том 1, выпуск 3, 117–132

https://www.mathnet.ru/mat20

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.88
21 июня 2025 г., 16:42:30

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ САМОСОПРЯЖЕННОГО ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО РАСШИРЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА[1])

Ларс Гординг

1. Введение. Пусть

$$a = a(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad (m > 0),$$

где $D^\alpha = i^{-|\alpha|}(\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$ и $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ — линейный дифференциальный оператор с достаточное число раз дифференцируемыми коэффициентами $a_\alpha(x)$, заданными на открытом подмножестве S действительного n-мерного пространства R^n. Пусть $C^k(S)$ — класс всех k раз непрерывно дифференцируемых комплекснозначных функций, заданных на S, а $C_0^k(S)$ — подмножество, состоящее из функций $\in C^k(S)$ с компактным несущим множеством. Пусть, наконец, $H = H(S)$ — гильбертово пространство всех интегрируемых с квадратом в S функций со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_S f\bar{g}\, dx.$$

Мы предполагаем, что a эллиптичен, т. е. что многочлен

$$\hat{a}(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$$

не обращается в нуль при действительных, отличных от нуля ξ и что a, рассматриваемый как оператор, отображающий $C_0^m(S)$ в H, обладает полуограниченным самосопряженным расширением A. Заменяя в случае надобности a и A соответственно на $-a$ и $-A$, не нарушая общности, можем предполагать, что A ограничен снизу.

Из нашего предположения следует, что a — обязательно формально самосопряженный оператор, т. е.

$$(af, g) = (f, ag)$$

при $f, g \in C_0^m(S)$. Пусть $0 \neq f \in C_0^m(S)$. Если положить $g(x) = e^{ix\xi} f(x)$, $(x\xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n)$, то

$$(Ag, g) = (ag, g) = \int \hat{a}(x, \xi) |f(x)|^2 dx + O(|\xi|^{m-1}),$$

где $|\xi| = (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^{1/2}$. По предположению левая часть вещественна и ограничена снизу, так что, заменяя ξ на $t\xi$ и заставляя t стремиться к бесконечности, приходим к выводу, что интеграл всегда положителен. Но это означает, что $\hat{a}(x, \xi)$ — положительно определенная форма. В частности, m должно быть четным числом.

---

[1]) Gårding L., On the asymptotic properties of the spectral function belonging to a self-adjoint semi-bounded extension of an elliptic differential operator, *Kungl. Fys. Sällkapets i Lund Förh.*, 24 (1954), № 21.

Пусть $\{E(\lambda)\}$ — совокупность проекционных операторов спектрального разложения, принадлежащего оператору A:

$$A = \int \lambda dE(\lambda).$$

Докажем три теоремы.

Теорема 1. *Для каждого λ существует ядро Карлемана $e(\lambda, x, y)$, такое, что для почти всех y*

$$(E(\lambda) f)(y) = \int e(\lambda, x, y) f(x) dx$$

при $f \in H$. Это ядро является борелевской функцией на множестве $R \times S \times S$; для фиксированного λ ядро $e(\lambda, x, y)$ непрерывно[1]*, эрмитово и обращается в нуль при $\lambda < A$*[2]*. Полная вариация ядра $e(\lambda, x, y)$ при λ, пробегающем конечный интервал, ограничена на компактных подмножествах множества $S \times S$.*

Заимствуя термин из теории интегральных уравнений, будем называть e спектральной функцией оператора A. Спектральная функция подробно изучалась разными авторами в отдельных частных случаях. Особо я хочу отметить глубокое исследование Левитана [11], посвященное оператору Лапласа, и последующее обобщение этого исследования на случай оператора Шредингера [12].

Пусть z — точка из S. Рассмотрим оператор с постоянными коэффициентами

$$\hat{a}_z(D) = \hat{a}(z, D_x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(z) D_x^\alpha.$$

Этот оператор — главная часть оператора a в точке z. Рассматриваемый как отображение $C_0^m(R^n)$ в $H(R^n)$, оператор $\hat{a}_z(D)$ обладает самосопряженным замыканием $\hat{A}_z$, определяемым формулой

$$\hat{A}_z = T^{-1}\hat{a}(z, \cdot) T,$$

где T — преобразование Фурье,

$$Tf(\xi) = (Tf)(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x) dx, \ (f \in C_0(R^n)),$$

T^{-1} — обратное преобразование Фурье,

$$T^{-1}F(x) = (T^{-1}F)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} F(\xi) d\xi, \ (F \in C_0(R^n)),$$

и $\hat{a}(z, \cdot)$ — оператор умножения на $\hat{a}(z, \xi)$. Область определения $\hat{A}_z$ состоит из всех f, принадлежащих $H(R^n)$, для которых

$$\int |Tf(\xi)\, \hat{a}(z, \xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Пусть $\hat{E}_z(\lambda)$ — проекционный оператор спектрального разложения, принадлежащего оператору $\hat{A}_z$. Совершенно очевидно, что

$$(\hat{E}_z(\lambda) f)(y) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\hat{a}(z, \xi) < \lambda} Tf(\xi) e^{iy\xi} d\xi = \int \hat{e}_z(\lambda, x-y) f(x) dx,$$

---

[1]) Точнее, $e(\lambda, x, y) \in C^j(S \times S)$ с любым наперед заданным j при условии, что коэффициенты оператора a достаточное число раз дифференцируемы.

[2]) Через λ автор обозначает и число λ, и оператор умножения элементов H на число λ. Поэтому $\lambda < A$ означает, что действительное число λ меньше нижней грани оператора A. — *Прим. перев.*

где

$$\hat{e}_z(\lambda, x-y) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\hat{a}(z,\xi)<\lambda} e^{-i(x-y)\xi} d\xi. \tag{1}$$

Так как $\hat{a}(z, \xi)$ — положительно определенная форма, то интеграл (1) существует и

$$\hat{e}_z(\lambda, 0) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\hat{a}(z,\xi)<\lambda} d\xi = \lambda^{n/m} (2\pi)^{-n} \int\limits_{\hat{a}(z,\xi)<1} d\xi.$$

Если $x \neq y$, то

$$\hat{e}_z(\lambda, x-y) = O(\lambda^{(n-1)/m}),$$

однако эта оценка неравномерна при $x-y$, стремящемся к нулю.

Теорема 2. *Для больших* λ

$$e(\lambda, x, y) = \hat{e}_x(\lambda, x-y) + o(\lambda^{n/m}) \tag{2}$$

равномерно на компактных подмножествах множества $S \times S$.

Эта теорема представляется естественным завершением цикла результатов, касающихся асимптотического поведения собственных функций теории колебаний, полученных разными авторами [1, 5, 13 и 14] после основоположной работы Карлемана [2]. Действительно, если спектр оператора A дискретен, не имеет предельных точек на конечном расстоянии и $\{(\varphi_k, \lambda_k)\}_1^\infty$ — полная ортонормированная система собственных функций[1]) φ_k и соответствующих собственных значений λ_k, то

$$e(\lambda, x, y) = \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} \overline{\varphi_k(x)} \varphi_k(y), \tag{3}$$

где правая часть — выражение, обычное для такого рода рассмотрений.

Формула (2) страдает тем недостатком, что правая часть в этой формуле эрмитова, а главный член в левой части — неэрмитов. Это налагает ограничение на остаток $R(\lambda)$, ибо из

$$e(\lambda, x, y) = \hat{e}_x(\lambda, x-y) + R(\lambda),$$

если применить одновременно переход к комплексно сопряженным величинам и перестановку букв x и y, следует

$$\hat{e}_x(\lambda, x-y) - \hat{e}_y(\lambda, x-y) = R(\lambda).$$

Нетрудно показать, что наилучшая возможная оценка левой части в общем случае имеет вид $O(\lambda^{(n-\frac{1}{2})/m})$, и это, следовательно, нижняя грань для R.

Если оператор a имеет постоянные коэффициенты, то ситуация упрощается и можно получить более сильные результаты. В этом случае a, рассматриваемый как оператор, отображающий $C_0^m(R^n)$ в $H(R^n)$, имеет самосопряженное замыкание

$$A_0 = T^{-1} a(\cdot) T,$$

спектральная функция которого

$$e_0(\lambda, x-y) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{a(\xi)<\lambda} e^{-i(x-y)\xi} d\xi. \tag{4}$$

---

[1]) Эти собственные функции принадлежат $C^j(S)$ с любым наперед заданным j, если коэффициенты оператора a достаточное число раз дифференцируемы, причем $a\varphi_k = \lambda_k \varphi_k$, если $j \geqslant m$.

Пусть σ — функция ограниченной вариации и пусть

$$I^k\sigma(\lambda)=\Gamma(k)^{-1}\int_{\lambda_0}^{\lambda}(\lambda-\mu)^{k-1}(\lambda-\lambda_0)^{1-k}\,d\sigma(\mu)$$

— риссовское среднее порядка $k>0$ функции σ в интервале (λ_0, λ). Нижеследующая теорема для расширения оператора Лапласа, соответствующего краевым условиям Дирихле, доказанная Левитаном в работе [11], показывает одновременно, что $e_0(\lambda, x-y)$ хорошо аппроксимирует $e(\lambda, x, y)$ при больших значениях λ и что разность $e-e_0$ сильно осциллирует.

Теорема 3. *Если оператор a имеет постоянные коэффициенты, $\lambda_0<\min(A, A_0)$ и $n>1$, то*

$$I^k e(\lambda, x, y)=I^k e_0(\lambda, x-y)+O\left(\lambda^{(n-k)/m}\right) \tag{5}$$

для всякого $k\geqslant 1$, равномерно на компактных подмножествах множества $S\times S$.

Если $k=1$, то в соотношении (5) можно заменить e_0 на спектральную функцию $\hat{e}_0$ оператора $T\hat{a}(\cdot)T^{-1}$, где $\hat{a}$ — главная часть a, но при $k>1$ это, вообще говоря, невозможно. При $k\geqslant n-1$ настоящая теорема дает фактическое улучшение соответствующего результата Левитана. Наше доказательство отличается от доказательства Левитана. Оно использует оценку, полученную в последней части настоящей работы, и некоторую разновидность тауберовой теоремы Гезы Фрейда [3], доказанную в работе [4] Тордом Ганелиусом. Теорема остается верной также при $n=1$, однако этот случай требует некоторой модификации тауберовой теоремы.

Пусть $f\in H$. Рассмотрим выражение

$$e(\lambda, f, y)=\int e(\lambda, x, y)f(x)\,dx. \tag{6}$$

Если имеет место соотношение (3), то

$$e(\lambda, f, y)=\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda}\varphi_k(y)(f, \varphi_k),$$

так что (6) оказывается просто частной суммой разложения f по собственным функциям оператора A. В общем случае (6) является частной суммой обобщенного разложения Фурье функции f по собственным функциям оператора A, которые необязательно интегрируемы с квадратом (см. работы Гординга [6 и 7]). Из (5) вытекает, что

$$I^k e(\lambda, f, y)=I^k e_0(\lambda, f, y)+O\left(\lambda^{(n-k)/m}\right) \tag{7}$$

равномерно на компактных подмножествах множества S при условии, что f интегрируема и имеет компактное в S несущее множество. Поэтому, если $k>n$, то риссовская теория суммирования разложения рассматриваемых функций f по собственным функциям оператора A сводится к соответствующей теории для преобразований Фурье. Отметим, что теория суммирования для интегрируемых с квадратом функций, построенная Левитаном в цитированной работе, в которой показатель при λ в правой части соотношения (7) равен с округлением $(n-2k-1)/2m$, не следует непосредственно из соотношения (5); однако эта теория, по всей вероятности, может быть выведена из фундаментального тождества (7.5) настоящей статьи и улучшенной разновидности тауберовой теоремы.

Нетрудно обобщить три сформулированные выше теоремы на случай, когда H является множеством всех интегрируемых с квадратом в S функций, со значениями в конечномерном гильбертовом пространстве h, а коэффициенты оператора a являются линейными преобразованиями h в h. В этом случае

эллиптичность означает, что форма $\hat{a}(x, \xi)$ является обратимым преобразованием при $\xi \neq 0$. Если a обладает самосопряженным, ограниченным снизу расширением, то $\hat{a}(x, \xi)$ — эрмитово, положительно определенное преобразование при $\xi \neq 0$. Значения $e(\lambda, x, y)$ спектральной функции представляют собой линейные преобразования h в h, и мы должны определить $\hat{e}_x(\lambda, z)$ посредством интеграла

$$(2\pi)^{-n} \int e^{-iz\xi} \hat{e}(\lambda, z, \xi)\, d\xi,$$

где $\int \lambda d\hat{e}(\lambda, z, \xi)$ — спектральное разложение $\hat{a}(z, \xi)$ в h. При аналогичном определении $e_0(\lambda, z)$ наши три теоремы остаются верными. Наконец, можно также заменить S произвольным дифференцируемым многообразием.

2. Спектральная функция. Доказательство теорем 1 и 2 неявно содержится в двух работах автора [5 и 6]. Для удобства читателя мы повторим некоторые рассуждения, изложенные в этих работах.

Пусть, как и в работе [6] (п. 2), x_0 — заданная точка в S и k — такое целое число, что

$$2km > n. \tag{1}$$

Согласно Ф. Джону [9], точка x_0 обладает окрестностью U_0, в которой может быть построено фундаментальное решение $F(x, y)$ дифференциального оператора a^k. Это фундаментальное решение определено в $U_0 \times U_0$, km раз непрерывно дифференцируемо при $x \neq y$ и

$$F = O(|x-y|^{km-n-\varepsilon}) \tag{2}$$

для любого $\varepsilon > 0$, равномерно на компактных подмножествах множества $U_0 \times U_0$. Если $f \in C_0^\infty(S)$, то

$$F(f, y) = \int_{U_0} F(x, y) f(x)\, dx$$

— km раз непрерывно дифференцируемая функция и

$$a^k F(f, y) = f(y), \quad (y \in U_0).$$

Пусть $h \in C_0^\infty(U_0)$ и $h = 1$ на U, где U — открытое подмножество множества U_0, такое, что $x_0 \in U_0$, $\overline{U} \in U_0$. Положим

$$F_0(x, y) = a_y^k(F(x, y)(1 - h(y))),$$

$$F_1(x, y) = F(x, y) h(y)$$

при $(x, y) \in U \times U_0$. Обе эти функции непрерывны в $U \times U_0$, за исключением, быть может, второй при $x = y$; для фиксированного x они, в силу (1) и (2), обращаются в нуль вне несущего множества функции h. Кроме того, $F_0(x, \cdot)$ и $F_1(x, \cdot)$ являются элементами H, непрерывно зависящими от x. Пусть x_0' — другая точка в S, а U_0', U', F_0' и F_1' — соответствующие ей объекты. Обозначим через

$$\theta(\alpha, f, f')$$

спектральную меру

$$(\alpha(A) f, f') = \int \alpha(\lambda)\, d(E(\lambda) f, f'),$$

где α — ограниченная борелевская функция. Пусть B_k — класс борелевских функций с нормой

$$|\alpha|_k = \sup |\alpha(\lambda)(1 + \lambda^{2k})| < \infty.$$

Когда $\alpha \in B_k$ и $(x, x') \in U \times U'$, мы полагаем [6, формула (2.3)]

$$\theta(\alpha, x, x') = \sum_{j, l=0}^{1} \theta(\lambda^{k(j+l)}\alpha, F_j(x, \cdot) F_l'(x', \cdot). \tag{3}$$

Рассуждая так же, как в цитированной работе [6, стр. 47], придем к тождеству

$$\int \theta(\alpha, x, x') f(x) \overline{f'(x')}\, dx\, dx' = \theta(\alpha, f, f') \tag{4}$$

при $f \in C_0^\infty(U)$ и $f' \in C_0^\infty(U')$. Аналогично, если положить

$$\theta(\alpha, f, x') = \sum_{0}^{1} \theta(\lambda^{kl}\alpha, f, F_l'(x', \cdot)), \tag{5}$$

где $f \in H$, то окажется, что

$$\int \theta(\alpha, f, x') \overline{f'(x')}\, dx' = \theta(\alpha, f, f') \tag{6}$$

при $f' \in C_0^\infty(U')$. Варьируя точки x_0 и x_0', на основании (3) и (4) заключаем, что $\theta(\alpha, f, f')$ задается посредством однозначно определяемого ядра $\theta(\alpha, x, x')$, непрерывного на $B_k \times S \times S$. Далее, из формулы (5) видно, что

$$\theta(\alpha, f, x') = \int \theta(\alpha, x, x') f(x)\, dx$$

является непрерывной функцией на $B_k \times H \times S$, так что, в частности, $\theta(\alpha, x, x')$ обладает карлемановским свойством

$$\int |\theta(\alpha, x, x')|^2 dx < \infty.$$

Из хорошо известных соотношений $\theta(\alpha, f', f) = \overline{\theta(\bar{\alpha}, f, f')}$ и $\theta(\alpha, f, f) \geqslant 0$ при $\alpha \geqslant 0$ следует, что $\theta(\alpha, x, x')$ — эрмитово ядро при действительном α и что это ядро неотрицательно при $\alpha \geqslant 0$.

Выбрав специальным образом α, получим теорему 1. Действительно, по предположению, A ограничен снизу, так что $A > \lambda_0$ для некоторого λ_0. Это означает, что $E(\lambda) = 0$ при $\lambda < \lambda_0$ и что

$$(E(\mu) f, f') = \theta(\alpha_\mu, f, f'),$$

где $\alpha_\mu(\lambda)$ — характеристическая функция интервала $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \mu$ при $\mu \geqslant \lambda_0$. Так как α_μ принадлежит B_k, то теорема 1 доказана.

Заметим, наконец, что, применяя спектральную функцию $e(\lambda, x, y)$, можем написать

$$\theta(\alpha, x, y) = \int_{\lambda_0}^{\infty} \alpha(\lambda)\, de(\lambda, x, y),$$

где $\alpha \in B_k$, а правая часть является интегралом Лебега — Стильтьеса.

3. Две леммы. Прежде чем переходить к дальнейшему, целесообразно оценить вариации спектральных функций $\hat{e}_x(\lambda, z)$ и $e_0(\lambda, z)$, заданных соотношениями (1.1) и (1.4) соответственно. Пусть C_1 — замкнутый единичный круг $|\gamma| \leqslant 1$ комплексной плоскости. Положим

$$\hat{\sigma}(\lambda) = \hat{e}_x(\lambda, 0)(1 + |\gamma|^2) + 2 \operatorname{Re} \gamma \hat{e}_x(\lambda, z) = (2\pi)^{-n} \int_{\hat{a} < \lambda} |\gamma - e^{iz\xi}|^2 d\xi \tag{1}$$

и

$$\nu = n/m.$$

Лемма 3.1. *Для каждого компактного подмножества $C \subset S \times R^n \times C_1$ существует такая постоянная K, что*

$$K\lambda^\nu - \hat{\sigma}(\lambda)$$

является неубывающей функцией $\lambda \geqslant 0$ при $(x, z, \gamma) \in C$.

Доказательство. Полагая $D = d/d\lambda$, имеем

$$(2\pi)^n D\hat{\sigma}(\lambda) \leqslant 2D \int\limits_{\hat{a}(x,\xi)<\lambda} d\xi = 2 \int\limits_{\hat{a}(x,\xi)<1} d\xi D\lambda^\nu.$$

Так как последний интеграл ограничен на компактных подмножествах множества S, то лемма доказана.

Положим теперь

$$\sigma_0(\lambda) = e_0(\lambda, 0)(1 + |\gamma|^2) + 2\operatorname{Re}\gamma e_0(\lambda, z) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{a(\xi)<\lambda} |\gamma - e^{iz\xi}|^2 d\xi. \tag{2}$$

Лемма 3.2. *Для каждого λ_0 существуют постоянные K и $\lambda_1 \geqslant \lambda_0$, такие, что*

$$K(\lambda - \lambda_0)^\nu - \sigma_0(\lambda)$$

является неубывающей функцией при $\lambda \geqslant \lambda_1$ и $(z, \gamma) \in R^n \times C_1$.

Доказательство. Если $\mu > \lambda$, то

$$(2\pi)^n(\sigma_0(\mu) - \sigma_0(\lambda)) = \int\limits_{\lambda<a<\mu} |\gamma - e^{iz\xi}|^2 d\xi \leqslant 2 \int\limits_{\lambda<a<\mu} d\xi.$$

Переходя к полярным координатам $\xi = \rho\omega$, где $\rho = |\xi|$, и определяя $d\omega > 0$ с помощью соотношения $d\xi = \rho^{n-1} d\rho\, d\omega$, получим

$$\int\limits_{\lambda<a<\mu} d\xi = \int\limits_{\Omega} d\omega \int\limits_{I(\omega)} \rho^{n-1} d\rho,$$

где Ω — единичная сфера, а $I(\omega)$ — открытое множество на положительной оси ρ, на котором $\lambda < a(\omega\rho) < \mu$. Ввиду того что $a(\omega\rho) = \hat{a}(\omega)\rho^m + b(\omega\rho)$, где $\hat{a}(\omega)$ имеет положительный минимум на Ω, для каждого λ_0 существуют постоянные $\lambda_1 \geqslant \lambda_0$ и c, такие, что $\varkappa = a(\omega\rho)$ является неубывающей функцией ρ, удовлетворяющей неравенствам $d\rho/d\varkappa \leqslant c(\varkappa - \lambda_0)^{m-1-1}$ и $\rho^{n-1} \leqslant c(\varkappa - \lambda_0)^{(n-1)/m}$ при $\omega \in \Omega$ и $\rho \geqslant \lambda_1$. Следовательно,

$$\int\limits_{\lambda<a<\mu} d\xi \leqslant c_1 \int\limits_{\lambda}^{\mu} d(\varkappa - \lambda_0)^\nu$$

с соответствующей постоянной $c_1 > 0$ при $\lambda \geqslant \lambda_1$. Этим доказательство завершается.

4. Асимптотическое поведение спектральной функции. Рассмотрим эрмитову форму

$$G_t(f, f') = \theta((\lambda + t)^{-2k}, f, f'),$$

где t — действительное число и $t > -A$. В соответствии с результатами п. 2 эта форма имеет ядро

$$g_t(x, y) = \int (\lambda + t)^{-2k} de(\lambda, x, y).$$

Из свойств спектральной меры вытекает, что билинейная форма

$$C(f, f') = t^{2k} G_t(f, \overline{f'}) \tag{1}$$

равномерно ограничена при $t > \max(1, -A)$ и удовлетворяет тождеству

$$C(bf, f') = C(f, \overline{b}f') = (f, \overline{f'}), \quad (f, f' \in C_0^\infty(S)),$$

где $b = t^{-2k}(a+t)^{2k}$, а $\overline{b} = b^*$ — оператор, алгебраически сопряженный с b [5, стр. 243]. Полагая $\tau = t^{1/m}$, мы можем написать

$$b = b(\tau, x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq 2km} b_\alpha(\tau, x)\, \tau^{-|\alpha|} D_x^\alpha,$$

где коэффициенты b_α являются полиномами от τ^{-1}, а оператор обладает свойствами, требуемыми в [5, п. 2]. В частности,

$$b(\tau, x, \tau\xi) = (\hat{a}(x, \xi) + 1)^{2k} + O(\tau^{-1})\, |\xi|^{2mk-1} \tag{2}$$

равномерно на компактных подмножествах множества S.

Из результатов работы [5, п. 3] вытекает, что C обладает непрерывным ядром

$$c(\tau, x, y),$$

отличающимся от фундаментального решения $\Gamma^*(\tau, x, y)$ оператора b^*, построенного в [5, п. 2], на член

$$O(\tau^{-N})$$

для любого $N > 0$, равномерно на компактных подмножествах множества $S \times S$. Далее, используя формулу (2.13) и оценки (2.14) и (2.15) работы [5], видим, что Γ^* отличается от

$$B^*(\tau, x, y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\xi}\, b^*(\tau, y, \xi)^{-1}\, d\xi$$

на член

$$O(\tau^{n-\varepsilon}), \qquad (\varepsilon > 0)$$

равномерно на компактных подмножествах множества $S \times S$. Подставляя в интеграле $\tau\xi$ вместо ξ, получаем

$$B^* = \tau^n (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\tau\xi}\, b^*(\tau, y, \tau\xi)^{-1}\, d\xi.$$

Теперь из (2) вытекает, что

$$b^*(\tau, y, \tau\xi)^{-1} - (\hat{a}(y, \xi) + 1)^{-2k} = \tau^{-1} O((1 + |\xi|)^{-2mk-1})$$

равномерно на компактных подмножествах множества S. Так как $2mk > n$, то отсюда вытекает, что B^* отличается от интеграла

$$\tau^n (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\tau\xi} (\hat{a}(y, \xi) + 1)^{-2k}\, d\xi$$

на выражение, равное $O(\tau^{n-1})$, так что, подставляя в последнем интеграле $-\xi\tau^{-1}$ вместо ξ и возвращаясь к g_t, получаем

$$g_t(x, y) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i(x-y)\xi} (\hat{a}(y, \xi) + t)^{2k}\, d\xi + o(t^{\nu-2k}) \tag{3}$$

равномерно на компактных подмножествах множества $S \times S$. Имеем

$$(\hat{a}(y, \xi) + t)^{-2k} = -\int_{\hat{a}(y, \xi)}^{\infty} d(\lambda + t)^{-2k}.$$

Подставим это выражение в правую часть соотношения (3). После изменения порядка интегрирования соответствующий интеграл принимает вид

$$\int (\lambda+t)^{-2k}\, d\hat{e}_y(\lambda, x-y),$$

где $\hat{e}_y(\lambda, x-y)$ задается формулой (1.1). Поэтому соотношение (3) может быть записано в следующем виде:

$$\int (\lambda+t)^{-2k}\, de(\lambda, x, y) = \int (\lambda+t)^{-2k}\, d\hat{e}_y(\lambda, x-y) + o(t^{\nu-2k}). \tag{4}$$

Пусть γ — комплексное число, $|\gamma|<1$. Положим

$$\sigma(\lambda) = e(\lambda, x, x) + 2\operatorname{Re}\gamma e(\lambda, x, y) + |\gamma|^2 e(\lambda, y, y) \tag{5}$$

и аналогично

$$\hat{\sigma}(\lambda) = \hat{e}_y(\lambda, 0)(1+|\gamma|^2) + 2\operatorname{Re}\gamma\hat{e}_y(\lambda, x-y).$$

Обе эти функции не убывают, $\hat{\sigma}(\lambda)$ обращается в нуль при $\lambda\leqslant 0$, и из (4) вытекает, что

$$\int (\lambda+t)^{-2k}\, d\sigma(\lambda) = \int (\lambda+t)^{-2k}\, d\hat{\sigma}(\lambda) + o(t^{\nu-2k}) \tag{6}$$

равномерно на каждом компактном подмножестве $C\subset S\times S\times C_1$. Так как $\sigma(\lambda)$ обращается в нуль при $\lambda<A$, то в соответствии с теоремой 1 $\sigma(0)$ ограничено на C и поэтому

$$\int_{-\infty}^{0} (\lambda+t)^{-2k}\, d\sigma(\lambda) = O(t^{-2k}) \tag{7}$$

равномерно на C. Более того, в силу леммы 3.1, можно найти постоянную K, такую, что функция

$$\beta(\lambda) = \sigma(\lambda) + K\lambda^{\nu} - \hat{\sigma}(\lambda)$$

не убывает при $\lambda\geqslant 0$ и $(x, y, \gamma)\in C$. Поэтому на основании (6) и (7)

$$\int_0^{\infty} (\lambda+t)^{-2k}\, d\beta(\lambda) = K\int_0^{\infty} (\lambda+t)^{-3k}\, d\lambda^{\nu} + o(t^{\nu-2k})$$

равномерно на C и отсюда, в силу тауберовой теоремы Харди и Литтльвуда [8] в формулировке Караматы [10],

$$\sigma(\lambda) = \hat{\sigma}(\lambda) + o(\lambda^{\nu})$$

равномерно на C. Варьируя γ, приходим к выводу, что

$$e(\lambda, x, y) = \hat{e}_y(\lambda, x-y) + o(\lambda^{\nu})$$

равномерно на компактных подмножествах множества $S\times S$. Так как $e(\lambda, x, y) = \overline{e(\lambda, y, x)}$, мы можем справа написать также $\hat{e}_x(\lambda, x-y)$, и теорема 2 доказана.

5. Уточнение результата для постоянных коэффициентов. Пусть коэффициенты оператора a постоянны. Рассмотрим самосопряженный оператор

$$A_0 = Ta(\cdot)T^{-1}$$

в $H(R^n)$ и эрмитову форму

$$(e^{-tA_0}f, g) = (2\pi)^{-n}\int e^{-ta(\xi)}F(\xi)\overline{G(\xi)}\, d\xi,$$

где $t > 0$ и $F = Tf$, $G = T_g$. Она имеет ядро

$$u_0(t, x-y) = (2\pi)^{-n} \int e^{-ta(\xi)-i(x-y)\xi}\, d\xi = \int e^{-t\lambda}\, de_0(\lambda, x-y), \tag{1}$$

где

$$e_0(\lambda, x-y) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{a(\xi)<\lambda} e^{-i(x-y)\xi}\, d\xi$$

— спектральная функция оператора A_0. Рассмотрим также форму

$$(e^{-A} f, g), \quad (f, g \in H(S)),$$

где A — полуограниченное, самосопряженное расширение оператора a, определенного во введении. В силу результатов п. 2, эта форма имеет ядро

$$u(t, x, y) = \int e^{-t\lambda}\, de(\lambda, x, y). \tag{2}$$

Ниже будет доказано существование постоянной $c > 0$, такой, что

$$u(t, x, y) - u_0(t, x-y) = O(\exp - ct^{-1/(m-1)})$$

равномерно на компактных подмножествах множества $S \times S$ при $t < 1$. Сначала мы докажем теорему 3, исходя из этой оценки. Пусть $\sigma(\lambda)$ определена посредством (4.5) и $\sigma_0(\lambda)$ — посредством (3.2) с $z = x - y$. Если $\lambda_0 < \min(A, A_0)$, то функция $\sigma(\lambda) - \sigma_0(\lambda)$ обращается в нуль при $\lambda \leqslant \lambda_0$, и из леммы 3.2 вытекает, что для любого компактного подмножества $C \subset S \times \times S \times C_1$ можно найти такие постоянные K и λ_1, что

$$\sigma(\lambda) + K(\lambda - \lambda_0)^{\nu} - \sigma_0(\lambda)$$

не убывает при $\lambda \geqslant \lambda_1$. Далее, из (3) вытекает, что

$$\int e^{-t\lambda}\, d(\sigma(\lambda) - \sigma_0(\lambda)) = O(\exp - ct^{-1/(m-1)})$$

равномерно при $(x, y, \gamma) \in C$ и $t < 1$. Наконец, полагая $\varepsilon = 1/(m-1)$, имеем $\nu(1+\varepsilon)/\varepsilon = n \geqslant 2$, по предположению. Поэтому, применяя разновидность тауберовой теоремы Гезы Фрейда, доказанную в работе [4] Тордом Ганелиусом, видим, что

$$I^k \sigma(\lambda) = I^k \sigma_0(\lambda) + O(\lambda^{(n-k)/m})$$

равномерно на компактных подмножествах множества $S \times S \times C_1$. Варьируя γ, получаем требуемый результат (1.5).

6. Фундаментальное решение. Рассмотрим более подробно функцию $u_0(t, x)$, заданную формулой (5.1). Как утверждает нижеследующая лемма, $u_0(t, x)$ является фундаментальным решением оператора

$$L = a - D_t, \qquad (D_t = \partial/\partial t). \tag{1}$$

Пусть $\overline{R}^+$ и R^+ — интервалы $t \geqslant 0$ и $t > 0$ соответственно. Определим классы функций $C^j(W)$ и $C_0^j(W)$ дословно, как и раньше, также для того случая, когда W является произведением замкнутого множества $\overline{R}^+$ и некоторого открытого множества.

Лемма 6.1. *Функция u_0 принадлежит $C_0^\infty(R^+ \times R^n)$ и если $f \in C_0^\infty(\overline{R}^+ \times \times R^n)$, то*

$$A(t, x) = \int\limits_t^\infty dt' \int u_0(t'-t, y-x) f(t', y)\, dy \tag{2}$$

принадлежит $C^\infty(\overline{R}^+ \times R^n)$ *и*

$$LA(t, x) = f(t, x). \tag{3}$$

При $t > 0$

$$(a + D_t) u_0(t, -x) = 0. \tag{4}$$

Доказательство. Применяя равенство Парсеваля, имеем

$$A(t, x) = (2\pi)^{-n} \int_t^\infty dt' \int e^{-(t'-t)a(\xi)+ix\xi} F(t', \xi)\, d\xi,$$

где

$$F(t', x) = \int e^{-iy\xi} f(t', y)\, dy.$$

Из $f \in C_0^\infty(\overline{R}^+ \times R^n)$ вытекает хорошо известная оценка

$$F(t', \xi) = O((1 + |\xi|)^{-N})$$

для каждого $N > 0$, равномерно относительно t'. Так как a ограничен снизу, то из этой оценки вытекает, что $A \in C^\infty(\overline{R}^+ \times R^n)$ и что

$$D_t A = -(2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} F(t, \xi)\, d\xi +$$

$$+ (2\pi)^{-n} \int_t^\infty dt' \int a(\xi) e^{-(t'-t)a(\xi)+ix\xi} F(t', \xi)\, d\xi = -f(t, x) + aA(t, x),$$

так что (3) доказано. Принадлежность u_0 к $C^\infty(R^+ \times R^n)$ и справедливость соотношения (4) устанавливается выполнением в (5.1) дифференцирования под знаком интеграла.

Более точные сведения о функции u_0 дает следующая лемма.

Лемма 6.2. *Существует число* $c_1 > 0$, *зависящее только от оператора* a *и обладающее тем свойством, что если* $t < 1$, *то*

$$|D^\alpha u_0(t, x)| \leqslant C_\alpha \tau^{-|\alpha|-n} \exp(-c_1 |x\tau^{-1}|^{m/(m-1)}) \tag{5}$$

для всех x. *Здесь* $\tau = t^{1/m}$, α *произвольно,* C_α — *постоянная, зависящая от* α.

Доказательство. Дифференцируя (5.1) под знаком интеграла, получим

$$D^\alpha u_0(t, x) = (2\pi)^{-n} (-1)^{|\alpha|} \int \xi^\alpha e^{-ta(\xi)-ix\xi}\, d\xi,$$

где $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$. Обозначим интеграл через I и выполним замену переменной интегрирования ξ на $\xi\tau^{-1}$. В результате найдем

$$I = \tau^{-|\alpha|-n} \int \xi^\alpha \exp(-\hat{a}(\xi) - \tau^m b(\xi\tau^{-1}) + iy\xi)\, d\xi,$$

где $\hat{a}$ — главная часть оператора a, $a = \hat{a} + b$ и

$$y = -x\tau^{-1}.$$

В силу теоремы Коши, можно заменить ξ на $\xi + i\eta$ с действительным η, не меняя при этом значения интеграла. Замечая, что $\tau < 1$, получим при достаточно большом значении постоянной c

$$\operatorname{Re} \hat{a}(\xi + i\eta) \geqslant c^{-1} |\xi|^m - c|\eta|^2 (|\eta|^{m-2} + |\xi|^{m-2} + 1),$$

$$\operatorname{Re} \tau^m b((\xi + i\eta)\tau^{-1}) \geqslant -c(|\xi|^{m-1} + |\eta|^{m-1} + 1),$$

$$-\operatorname{Re} iy(\xi + i\eta) = y\eta.$$

Выберем теперь подходящее η. Положим $r=|y|^{1/(m-1)}$, $\bar{y}=|y|y^{-1}$ и

$$\eta=sr\bar{y}$$

с малым $s>0$, которое будет выбрано позднее. Подставляя это η в записанные выше соотношения, получим

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\hat{a}(\xi+i\eta)\geqslant c^{-1}|\xi|^m-c(s^mr^m+s^2r^2|\xi|^{m-2}+s^2r^2),\\&\operatorname{Re}\tau^m b((\xi+i\eta)\tau^{-1})\geqslant -c(|\xi|^{m-1}+s^{m-1}r^{m-1}+1),\\&-\operatorname{Re}iy(\xi+i\eta)=sr^m.\end{aligned}$$

Поэтому, применяя неравенство $|\xi|^{m-2}r^2\leqslant|\xi|^m+r^m$ и полагая

$$B=\hat{a}(\xi+i\eta)+tb((\xi+i\eta)\tau^{-1})-iy(\xi-i\eta),$$

получим

$$\operatorname{Re}B\geqslant\frac{1}{2}c^{-1}|\xi|^m+\frac{1}{2}sr^m-c+B_1,$$

где

$$B_1=\left(\frac{1}{2}c^{-1}-cs^2\right)|\xi|^m+\left(\frac{1}{2}s-cs^m-cs^2\right)r^m-c(s^2r^2+s^{m-1}r^{m-1}+|\xi|^{m-1})$$

— многочлен от $|\xi|$ и r для фиксированного s. Его главная часть положительно определена, если s достаточно мало (также при $m=2$) и в этом случае она ограничена снизу. Отсюда

$$\operatorname{Re}B\geqslant\frac{1}{2}c^{-1}|\xi|^m+\frac{1}{2}sr^m-c$$

с достаточно большим c и подходящим s. Подставляя эту оценку в интеграл, получим

$$|I|\leqslant c\tau^{-|\alpha|-n}\exp\left(-\frac{1}{2}sr^m\right)$$

с достаточно большим c. Так как $r=|x\tau^{-1}|^{1/(m-1)}$, то лемма доказана.

7. Одно тождество. Рассмотрим эрмитову форму

$$V(t,f,g)=(e^{-tA}f,g)-(e^{-tA_0}f,g),$$

при $t>0$ и $f,g\in C_0(S)$. В соответствии с (5.1) и (5.2) эта форма задается посредством ядра

$$v(t,x,y)=u(t,x,y)-u_0(t,x-y).$$

Если $g\in C_0^\infty(\bar{R}^+\times S)$, то

$$\begin{aligned}-D_tV(t,f,g(t,\cdot))&=-D_t((f,e^{-tA}g(t,\cdot))-(f,e^{-tA_0}g(t,\cdot)))=\\&=V(t,f,ag(t,\cdot))-V(t,f,D_tg(t,\cdot))=V(t,f,Lg(t,\cdot)),\end{aligned}\tag{1}$$

где L определено в (6.1). Кроме того, замечаем, что

$$V(0,f,g)=0\tag{2}$$

для всех f и g.

Пусть теперь S_1 — открытое подмножество множества S с компактным замыканием и пусть $h\in C_0^\infty(S)$ и $h=1$ на S_1. Положим

$$b(t,x,y)=(a(D_x)+D_t)(u_0(t,y-x)(1-h(x)))\tag{3}$$

при $y\in S_1$. Функция b обращается в нуль при $x\in S_1$, а также ввиду (6.4) тогда, когда x находится вне несущего множества функции h. В силу (6.5), $b\in C^\infty(\bar{R}^+\times S\times S_1)$ и обращается в нуль вместе со всеми своими производ-

ными по x и y при $t=0$. Пусть $\psi \in C^\infty(R^+)$, а $\varphi \in C_0^\infty(S_1)$. Рассмотрим функцию

$$b(\psi, t, x, \varphi) = \int_{S_1} \varphi(y)\, dy \int_t^\infty b(t'-t, x, y)\, \psi(t')\, dt'.$$

Замечая, что $b(t'-t, x, y) = L_x(u_0(t'-t, y-x)(1-h(x)))$ при $t' \geqslant t$ и применяя (6.3), имеем в аналогичных обозначениях

$$b(\psi, t, x, \varphi) = Lu_0(\psi, t, x, \varphi) - L(h(x)\, u_0(\psi, t, x, \varphi)) = \psi(t)\, \varphi(x) - Lf(t, x), \quad (4)$$

где $u_0(t, x, y) = u_0(t, y-x)$ и $f(t, x) = h(x)\, u_0(\psi, t, x, \varphi) \in C_0^\infty(\bar{R}^+ \times S)$.

Мы собираемся доказать тождество

$$v(t, y, y') = \int_{t>t'>t''>0} V(t'', b(t-t', \cdot, y), b(t'-t'', \cdot, y'))\, dt' dt'', \quad (5)$$

где $(y, y') \in S_1 \times S_1$. Для доказательства обозначим правую часть через

$$w(t, y, y').$$

В силу свойств непрерывности V и b, w принадлежит $C^\infty(\bar{R}^+ \times S_1 \times S_1)$. После умножения на $\varphi, \bar{\varphi}' \in C_0^\infty(S_1)$ и $\psi \in C_0^\infty(R^+)$ и интегрирования получим

$$w(\psi, \varphi, \varphi') = \int_{t'>t''>0} V(t'', b(\psi, t', \cdot, \varphi), b(t'-t'', \cdot, \varphi'))\, dt' dt'',$$

где

$$w(\psi, \varphi, \varphi') = \int w(t, y, y')\, \psi(t)\, \varphi(y)\, \overline{\varphi'(y')}\, dt\, dy\, dy'.$$

Далее, из (4) следует

$$b(\psi, t', x, \varphi) = \psi(t')\, \varphi(x) - L'f(t', x), \quad (6)$$

где $L' = a_x - D_{t'}$. Отсюда

$$w(\psi, \varphi, \varphi') = \int_0^\infty \psi(t')\, dt' \int_0^{t'} V(t'', \varphi, b(t'-t'', \cdot, \varphi'))\, dt'' + R, \quad (7)$$

где

$$R = \int_{t'>t''>0} V(t'', L'f(t', \cdot), b(t'-t'', \cdot, \varphi'))\, dt'\, dt'' =$$

$$= \int_0^\infty dt'' \int_{t''}^\infty V(t'', L'f(t', \cdot), b(t'-t'', \cdot, \varphi'))\, dt'.$$

Внутренний интеграл обращается в нуль при большом t' и $t'=t''$, так что, интегрируя по частям и меняя порядок интегрирования, получим

$$R = \int_0^\infty dt'' \int_{t''}^\infty V(t'', f(t', \cdot), (a+D_{t'})\, b(t'-t'', \cdot, \varphi'))\, dt' =$$

$$= \int_0^\infty dt'' \int_{t''}^\infty V(t'', f(t', \cdot), L''b(t'-t'', \cdot, \varphi'))\, dt' =$$

$$= \int_0^\infty dt' \int_0^{t'} \frac{d}{dt''} V(t'', f(t', \cdot), b(t'-t'', \cdot, \varphi'))\, dt'' = 0,$$

в силу (1) и (2). Поэтому, меняя порядок интегрирования в (7) и заменяя t''

на t, имеем

$$w(\psi, \varphi, \varphi') = \int_0^\infty V(t, \varphi, b(\bar{\psi}, t, \cdot, \varphi'))\, dt.$$

Но из (4) следует

$$b(\bar{\psi}, t, \cdot, \varphi') = \overline{\psi(t)}\, \varphi'(\cdot) - Lg(t, \cdot),$$

где

$$g(t, \cdot) = h(\cdot)\, u_0(\bar{\psi}, t, \cdot, \varphi'),$$

так что из (1) вытекает

$$w(\psi, \varphi, \varphi') = \int_0^\infty V(t, \varphi, \varphi')\, \psi(t)\, dt.$$

Ввиду произвольности ψ, φ и φ' мы получаем желаемый результат, а именно

$$w(t, y, y') = v(t, y, y')$$

в $R^+ \times S_1 \times S_1$. Теперь мы можем доказать оценку (5.3). Действительно, при $t \leqslant 1$ имеем

$$|v| \leqslant \int_{t>t'>t''} |V|\, |b(t-t', \cdot, y)|\, |b(t'-t'', \cdot, y')|\, dt'dt'',$$

где

$$|V| = \sup_{t<1} \sup_{|f|=|g|=1} |V(t, f, g)| < \infty.$$

Отсюда

$$|v| \leqslant t^2 |V| \sup_{\tau<t} |b(\tau, \cdot, y)| \sup_{\tau<t} |b(\tau, \cdot, y')|.$$

Однако, в силу (3) и леммы (6.2), мы можем найти постоянную $c > 0$, зависящую только от a, такую, что

$$|b(\tau, \cdot, y)|^2 - \int |b(\tau, x, y)|^2 dx = O(\exp(-ct^{-1/(m-1)})), \quad (\tau < t \leqslant 1),$$

равномерно на компактных подмножествах множества S_1. Поэтому

$$v(t, y, y') = O(\exp(-ct^{-1/(m-1)}))$$

равномерно на компактных подмножествах множества $S_1 \times S_1$. Так как S_1 можно взять настолько широким, чтобы оно содержало любое наперед заданное компактное подмножество множества S, то (5.3) доказано.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Browder F. E., Le problème des vibrations pour un opérateur aux dérivées partielles self-adjoint et du type elliptique à coefficients variables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **236** (1953), 2140—2142.

[2] Carleman T., Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes, Åttonde skand. matematikerkongressen i Stockholm, 1934., pp. 34—44.

[3] Freud G., Restglied eines Tauberschen Satzes, I, II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **2** (1951), 299—308; **3** (1952), 299—307.

[4] Ganelius T., On the remainder in a Tauberian theorem, *Kungl. Fys. Sällskapets i Lund Förh.*, **24** (1955), № 20.

[5] Gårding L., On the asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctiones of elliptic differential operators, *Math. Scand.*, **1** (1953), 237—255.

[6] Gårding L., Eigenfunction expansions connected with elliptic differential operators, Tolfte skand. matematikerkongressen i Lund, 1953, pp. 44—55. (Есть русский перевод, см. стр. 107—116 настоящего выпуска сборника.)

[7] Gårding R., Applications of the theory of direct integrals of Hilbert spaces to some integral and differential operators, Public lecture published by the Institute for Fluid Dynamics and Applied Math. of the University of Maryland (1954).

[8] Hardy G. H., Littlewood J. E., Notes on the theory of series (XI) On Tauberian theorems, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **30** (1930), 23—27.
[9] John F., General properties of solutions of linear elliptic partial differential equations, Proc. of the symposium on spectral theory and differential problems, Stillwater, Okla., 1951, 113—175.
[10] Karamata J., Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze; welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen, *J. reine angew. Math.*, **164** (1931), 27—39.
[11] Левитан Б. М., О разложении по собственным функциям оператора Лапласа, *Матем. сборник*, **35**(77), (1954), 267—316.
[12] Левитан Б. М., О разложении по собственным функциям уравнения $\Delta u+(\lambda-q(x_1, x_2, x_3))u=0$, *Докл. АН СССР*, **94** (1954), 179—182.
[13] Minakshisundaram S. and Pleijel A., Some properties of the Laplace-operator on Riemannian manifolds, *Canad. J. Math.*, **1** (1949), 242—256.
[14] Pleijel A., Propriétés asymptotiques des fonctions et valeurs propres de certains problèmes de vibrations, *Ark. Mat. Astr. Fys.*, **27**, *A* (1940), № 13, 1—100.