O. V. Besov, Embeddings of spaces of functions of variable smoothness, *Dokl. Akad. Nauk*, 1996, Volume 347, Number 1, 7–10

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1996, том 347, № 1, с. 7–10

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛАДКОСТИ

© 1996 г. Член-корреспондент РАН О. В. Бесов

Поступило 08.11.95 г.

В работе изучаются весовые пространства дифференцируемых функций, заданных в области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и обладающих переменной гладкостью в весовом лебеговом пространстве $L_{pv}(G)$. Устанавливаются вложения таких пространств в пространство того же типа, в весовое пространство Соболева, в весовое лебегово пространство $L_{qw}(G)$ и т.п.

Приводимые теоремы содержат классические теоремы вложения пространств $W_p^{(l)}$, $B_{p,\theta}^{(l)}$ [1–3].

Задача о вложении изучаемых здесь пространств с помощью интегральных представлений функций (см., например, [1–3]) сводится к оценкам норм специальных интегральных операторов в весовых лебеговых пространствах

$$\mathcal{L}_{\gamma,m,j}f(x,t) = \sum_{s=0}^{m} \int_{|y|<|t|} \frac{|f(x+ste^j+y)|dy}{|y|^{n-\gamma}} + \int_{|t|<|y|<a} \frac{|t^m f(x+y)|dy}{|y|^{m+n-\gamma}},$$

$$m \in \mathbb{N}_0, \quad 0<\gamma<n, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\mathcal{M}_{|\alpha|,m,j}f(x,t) = \sum_{s=0}^{m} \int_{|y|<|t|} \int_{|h|<c|y|} \frac{|f(x+ste^j+y,h)|dh\,dy}{|y|^{n+1+|\alpha|}} + \int_{|t|<|y|<a} \int_{|h|<c|y|} \frac{|t^m f(x+y,h)|dh\,dy}{|y|^{m+n+1+|\alpha|}}, \quad m, |\alpha| \in \mathbb{N}_0.$$

Далее $[t]_1 = \min\{t, 1\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_1^n x_i e^i$, e^i – орты, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, χ_E, $\chi_{[h,a)}$ – характеристические функции соответственно множества $E \subset \mathbb{R}^n$ и полуинтервала $[h, a) \subset \mathbb{R}^1$, $\chi_{[h,a)} = 0$ при $h \ge a$, область $G \subset \mathbb{R}^n$, $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n: |y-x|<r\}$. Если $y \in \mathbb{R}^n, E \subset \mathbb{R}^n$, то $y + E = E + y = \{x: x = y+z, z \in E\}$, $1 \le p \le q \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Символами v, w: $E \to \mathbb{R}^1$ обозначаются весовые функции на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, т.е. измеримые положительные функции,

$$\tilde{v} = v^{1-p'}, \quad wE = \int_E w(x)dx.$$

Весовое пространство $L_{pv}(E)$, $1 \le p < \infty$, определяется как множество измеримых функций f: $E \to \mathbb{R}^1$ с конечной нормой

$$\|f|L_{pv}(E)\| = \left(\int_E |f(x)|^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Рассмотрим операторы

$$Kf(x) = \int_G k(x,y)f(y)dy,$$

$$K^*f(x) = \int_G k^*(x,y)f(y)dx,$$

где $x \in G$, k: $G \times G \to \mathbb{R}^1$ – измеримая неотрицательная функция, $k^*(x, y) = k(y, x)$.

Положим

$$|K|_{p\tilde{v},qw} = \sup\{\|K(\chi_Q\tilde{v})|L_{qw}(G)\| \, \|\chi_Q|L_{pv}(G)\|^{-1}: \operatorname{dyadic} Q \subset G\},$$

где верхняя грань берется по всем диадическим кубам $Q \subset G$,

$$[k]_{p\tilde{v},qw} = \sup_{x\in G}\sup_{r>0}(w(G\cap B(x,r)))^{\frac{1}{q}}\|\chi_{G\setminus B(x,r)}k(x,\cdot)|L_{p'\tilde{v}}(G)\|.$$

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Москва

Ядро k будем обозначать еще $k_{h,\,a}$, $k_h = k_{h,\,\infty}$, если оно имеет вид

$$k_{h,a}(x, y) = \chi_{[h,a)}(|x-y|)k(x, y), \quad 0 \le h, \quad a \le \infty.$$

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$, $v, w: G \to \mathbb{R}^1$ – *весовые функции*, $\tilde{v} = v^{1-p'}$, $0 < h < a \le \infty$, $b = 3\sqrt{n}\,a$. *Пусть функция* $k_{h,\,b}(\cdot, y)$ *полунепрерывна снизу на* G *для любого* $y \in G$ *и при некоторых постоянных* $C_1, C_2 > 1$

$$k(x, y) \le C_1 k(x', y), \text{ если } x, x', y \in G,$$

$$|x'-y| \le C_2|x-y|, \quad \frac{h}{2} < |x'-y|, |x-y| < b;$$

$$k(x, y) \le C_1 k(x, y'), \text{ если } x, y, y' \in G,$$

$$|x-y'| \le C_2|x-y|, \quad \frac{h}{2} < |x-y'|, |x-y| < b.$$

Тогда существует постоянная $C = C(C_1, C_2)$, *не зависящая от* k, h, a, v, w, f *и такая, что*

$$\|K_{h,a}f|L_{qw}(G)\| \le$$
$$\le C\left(\left|K_{\frac{h}{2},b}\right|_{p\tilde{v},\,qw} + \left|K^*_{\frac{h}{2},b}\right|_{q'w,\,p'\tilde{v}}\right)\|f|L_{pv}(G)\|, \tag{1}$$

а при $1 < p < q < \infty$

$$\|K_{h,a}f|L_{qw}(G)\| \le$$
$$\le C\left(\left[k_{\frac{h}{2},b}\right]_{p\tilde{v},\,qw} + \left[k^*_{\frac{h}{2},b}\right]_{q'w,\,p'\tilde{v}}\right)\|f|L_{pv}(G)\|. \tag{2}$$

В случае $h = 0$, $a = \infty$, $G = \mathbb{R}^n$ оценка (1) установлена в [4, 5], оценка (2) сводится к оценке (1) с помощью результатов В.М. Кокилашвили и его учеников по оценкам слабого типа [6–8] и результатов Сойера [9].

Простые достаточные условия ограниченности оператора $K: L_{pv}(G) \to L_{qw}(G)$ дает

Теорема 2. *Пусть* $1 \le p_1 < p \le p_2 < \infty$, $p < q < \infty$,

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

$v, w: G \to \mathbb{R}^1$ – *весовые функции*, $(kv^{-1/p})(x, y) = k(x, y)v(y)^{-1/p}$. *Пусть* $v = w = 1$ *в случае* $p = p_2$.

Тогда существует постоянная $C > 0$, *не зависящая от* k, v, w, f *и такая, что*

$$\|Kf|L_{qw}(G)\| \le$$
$$\le C\left(\left[kv^{-\frac{1}{p}}\right]_{p_1 1,\,q_1 w} + \left[kv^{-\frac{1}{p}}\right]_{p_2 1,\,q_2 w}\right)\|f|L_{pv}(G)\|. \tag{3}$$

Доказательство теоремы 2 в случае $p < p_2$, сформулированном в [10], следует из оценок слабого типа [4–8] и интерполяционной теоремы Марцинкевича. В общем случае доказательство можно построить на основе следующей поточечной оценки:

$$|Kf(x)| \le 8\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^{-\frac{p}{q}}[k]_{p1,\,qw}^{1-\frac{p}{q}}[k]_{p_1 1,\,q_1 w}^{\frac{p}{q}} \times$$
$$\times \|f|L_p(G)\|^{1-\frac{p}{q}} M_w(|f|^{p_1})(x)^{\frac{p}{p_1 q}},$$

где

$$M_w f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{w(G \cap B(x, r))} \int\limits_{G \cap B(x,r)} f(y)dy.$$

Используя теоремы 1, 2 для оценок операторов $\mathcal{L}_{\gamma,\,m,\,j}$, $\mathcal{M}_{|\alpha|,\,m,\,j}$, можно получить теоремы вложения соответствующих пространств функций переменной гладкости, определенных на области $G \subset \mathbb{R}^n$. Укажем применение лишь теоремы 1 (применение теоремы 2 аналогично и частично содержится в [10]).

Будем далее считать, что область G удовлетворяет условию гибкого конуса [2, 3], обобщающему условие конуса.

Пусть $E_t = \{x: \bar{B}(x, t) \subset E\}$ при $E \subset \mathbb{R}^n$, $t \ge 0$, $[x, y]$ – отрезок в $\mathbb{R}^n$ с концами в точках x, y. При $x, y \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^1$, $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\Delta_i(h)f(x) = f(x + he^i) - f(x), \quad \Delta_i^0(h)f(x) = f(x),$$

$$\Delta_i^m(h)f(x) = \Delta_i(h)[\Delta_i^{m-1}(h)f(x)] =$$
$$= \sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}C_m^j(x + jhe^i).$$

При $m \in \mathbb{N}_0$, $E \subset \mathbb{R}^n$

$$\Delta_i^m(h, E)f(x) = \begin{cases} \Delta_i^m(h)f(x) & \text{при } [x, x + mhe^i] \subset E, \\ 0 & \text{при } [x, x + mhe^i] \not\subset E. \end{cases}$$

Определение. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, $h_0 \in (0, \infty]$, $\sigma: G \times (0, h_0) \to \mathbb{R}^1$ – весовая функция, $m \in \mathbb{N}$, $f \in L(G, \text{loc})$. Будем говорить, что $f \in b^{\sigma,\,m}_{p,\,\theta}(G)$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, если конечна полунорма

$$\|f|b^{\sigma,\,m}_{p,\,\theta}(G)\| =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\int\limits_{|h|<h_0}\|\sigma(\cdot, h)\Delta_i^m(h, G_{|h|})f(\cdot)|L_p(G)\|^{\theta}\frac{dh}{|h|}\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

В простейшем случае $\sigma(x, h) = |h|^{-l}$ пространство $b^{\sigma,\,m}_{p,\,\theta}(G)$ обозначается также $b^{(l)}_{p,\,\theta}(G)$, см. [1, 3].

Теорема 3. *Пусть* $1<p<q<\infty$, u, v, w: $G\to\to\mathbb{R}^1$ – *весовые функции*, $|\alpha|<l$, $0<b\le+\infty$. *Пусть*

$$[|x-y|_{0,b}^{l-n-|\alpha|}]_{p\tilde{v},qw}+[|x-y|_{0,b}^{l-n-|\alpha|}]_{q'w,p'v}+$$
$$+[1_{0,b}]_{p\tilde{u},qw}+[1_{0,b}]_{q'w,p'\tilde{u}}<\infty.$$

Тогда существуют постоянные δ, $C>0$ *такие, что*

$$\|D^\alpha f|L_{qw}(G)\|\le C\sum_{i=1}^n\|D_i^l f|L_{pv}(G)\|+C\|f|L_{pu}(G_\delta)\|$$

для всех функций f *с конечной правой частью.*

Теорема 4. *Пусть* $1<p<q<\infty$, $q\le\theta\le\infty$, $m\in\mathbb{N}$, $|\alpha|<l$, $0<t_0<\infty$, $0<b\le\infty$, u, v: $G\to\mathbb{R}^1$, τ: $G\times(-t_0,\,t_0)\to\mathbb{R}^1$ – *весовые функции, функция* $\tau(\cdot,\,t)$ *полунепрерывна снизу на* G *при любом* $t\in(-t_0,\,t_0)$,

$$\tau^{(\gamma,j)}(x,r)=r^{\gamma-n}\sum_{s=0}^m\left\{\int_{|t|<t_0}\left[\frac{|t|}{r}\right]_1^{m\theta}\tau(x-ste^j,t)\frac{dt}{|t|}\right\}^{\frac{1}{\theta}},$$

$$\tau_0(x)=\left\{\int_{|t|<t_0}|\tau(x,t)|^\theta|t|^{m\theta-1}dt\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Пусть существуют постоянные C_1, $C_2>1$ *такие, что*

$$\tau^{(n,j)}(x',r)\le C_1\tau^{(n,j)}(x,r)$$

при $|x'-x|<C_2r\le C_2b$, $j=1,\,\ldots,\,n$.

Пусть еще при $\gamma=l-|\alpha|$, $j=1,\,\ldots,\,n$, $\hat{\tau}^{(\gamma,j)}(x,y)==\tau^{(\gamma,j)}(x,|x-y|)$

$$[\hat{\tau}_{0,b}^{(\gamma,j)}]_{p\tilde{v},q1}+[\hat{\tau}_{0,b}^{(\gamma,j)}]_{q'\tilde{v},p'1}+$$
$$+[1_{0,b}]_{p\tilde{u},q\tau_0}+[1_{0,b}]_{q'\tau_0,p'u}<\infty.$$

Тогда существуют постоянные δ, $C>0$ *такие, что*

$$\|D^\alpha f|b_{q,\theta}^{\tau,m}(G)\|\le C\sum_{i=1}^n\|D_i^l f|L_{pv}(G)\|+C\|f|L_{pu}(G_\delta)\|$$

для всех функций f *с конечной правой частью.*

Теорема 5. *Пусть* $1<p<q<\infty$, $1\le\theta\le p$, $0<<b\le h_0\le\infty$, $m\in\mathbb{N}$, σ: $G\times(-h_0,\,h_0)\to\mathbb{R}^1$, u, w: $G\to\to\mathbb{R}^1$ – *весовые функции*, $c>0$,

$$\hat{\sigma}(x,h)=\left(\int_{|\xi|<ch}\sigma(x,\xi)^{-\theta'}\frac{d\xi}{|\xi|}\right)^{-\frac{1}{\theta'}},$$

$$\hat{\sigma}^{(|\alpha|)}(x,y)=|x-y|^{-n-|\alpha|}\hat{\sigma}(x,|x-y|)^{-1}.$$

Пусть существуют постоянные C_1, $C_2>1$ *такие, что*

$$\hat{\sigma}(x,h)\le C_1\hat{\sigma}(x,2h),\ \ \textit{если}\ \ x\in G,\quad 0<2h<b,$$

$$\hat{\sigma}(x',h)\le C_1\hat{\sigma}(x,h),\ \ \textit{если}\ \ |x'-x|\le C_2h\le C_2b.$$

Пусть еще

$$[\hat{\sigma}_{0,b}^{(|\alpha|)}]_{p1,qw}+[\hat{\sigma}_{0,b}^{(|\alpha|)}]_{q'w,p'1}+$$
$$+[1_{0,b}]_{p\tilde{u},qw}+[1_{0,b}]_{q'w,p'u}<\infty.$$

Тогда существуют постоянные δ, $C>0$ *такие, что*

$$\|D^\alpha f|L_{qw}(G)\|\le C\|f|L_{pu}(G_\delta)\|+C\|f|b_{p,\theta}^{\sigma,m}(G)\|$$

для всех функций f *с конечной правой частью.*

Теорема 6. *Пусть* $1<p<q<\infty$, $1\le\theta\le\kappa\le\infty$, $0<h_0$, $t_0<\infty$, $b\le h_0$, σ: $G\times(-h_0,\,h_0)\to\mathbb{R}^1$, τ: $G\times\times(-t_0,\,t_0)\to\mathbb{R}^1$ – *весовые функции*, $\sigma_h(x)=\sigma(x,\,h)$,

$$\tau_{jt}(x)=\sum_{s=0}^m\tau(x-ste^j,t),$$

$$m,k\in\mathbb{N},\quad |\alpha|\in\mathbb{N}_0,$$

$$k^{(t)}(x,y)=k^{(t)}(x-y),\quad k^{(t)}(x)=\left[\frac{|t|}{|x|}\right]_1^m|x|^{-n-1-|\alpha|},$$

$$\tilde{\mathcal{N}}(t,h)=\sum_{j=1}^n\left(\left[k_{\frac{|h|}{2c},b}^{(t)}\right]_{p\bar{\sigma}_h^p,q\tau_{jt}^q}+\left[k_{\frac{|h|}{2c},b}^{(t)}\right]_{q'\tau_{jt}^q,p'\bar{\sigma}_h^p}\right),\ \ c>0.$$

Пусть

$$\sum_{j=1}^n([1_{0,b}]_{p\tilde{u},q\tau_{jt}^q}+[1_{0,b}]_{q'\tau_{jt}^q,p'\tilde{u}})<\infty.$$

Пусть еще при некотором $c>0$ *в случае* $\theta=\kappa$

$$\sup_{|t|<t_0}|t\eta|\tilde{\mathcal{N}}(t,t\eta)\le\tilde{\tilde{\mathcal{N}}}(|\eta|),\quad\int_0^\infty\tilde{\tilde{\mathcal{N}}}(\eta)\frac{d\eta}{\eta}<\infty,$$

а в случае $1<\theta<\kappa<\infty$ *при некоторых* θ_i, κ_i, *удовлетворяющих условиям*

$$1\le\theta_1<\theta\le\theta_2<\infty,\quad\frac{1}{\kappa_1}-\frac{1}{\theta_1}=\frac{1}{\kappa_2}-\frac{1}{\theta_2}=\frac{1}{\kappa}-\frac{1}{\theta},$$

$$\sum_{i=1}^2\sup_{|t|<t_0}\sup_{r>0}r^{\frac{1}{\kappa}}\left\{\int_0^\infty\left[|t|^{-\frac{1}{\kappa}}\tilde{\mathcal{N}}(t,h)h^{\frac{1}{\theta}}\right]^{\theta_i'}dh\right\}^{\frac{1}{\theta_i'}}<\infty.$$

Тогда существуют постоянные δ, $C > 0$ *такие, что*

$$\left\| D^{\alpha} f \,|\, b^{\tau, m}_{q, \theta}(G) \right\| \le C \left\| f \,|\, b^{\sigma, k}_{p, \theta}(G) \right\| + C \left\| f \,|\, L_{pu}(G_{\delta}) \right\|$$

для всех функций f с конечной правой частью.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 93–011–197) и Международного научного фонда (грант NFS000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.
2. *Бесов О.В.* // Тр. МИАН. 1984. Т. 170. С. 12–30.
3. *Бесов О.В.* // Там же. 1985. Т. 172. С. 4–15.
4. *Sawyer E.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. V. 308. № 2. P. 533–545.
5. *Sawyer E., Wheeden R.L.* // Amer. J. Math. 1922. V. 114. P. 813–874.
6. *Кокилашвили В.М., Габидзашвили М.А.* // ДАН. 1985. Т. 282. № 6. С. 1304–1306.
7. *Габидзашвили М.А.* // Тр. Тбил. мат. ин-та. 1986. Т. 82. С. 25–36.
8. *Kokilashvili V.M., Gabidzashvili M.A.* Two weight weak type inequalities for fractional type integrals. Prepr. № 45. Prague: Česk. Akad. Věd, Mat. Ústav. 1989. P. 1–11.
9. *Sawyer E.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 281. № 1. P. 339–345.
10. *Бесов О.В.* // Тр. МИРАН. 1995. Т. 210. С. 31–40.