В. П. Ильин, Некоторые неравенства для дифференцируемых функций многих переменных, *Докл. АН СССР*, 1960, том 135, номер 4, 779–782

Доклады Академии наук СССР
1960. Том 135, № 4

МАТЕМАТИКА

В. П. ИЛЬИН

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 17 VI 1960)

В настоящей заметке мы рассматриваем некоторые неравенства для функций, принадлежащих пространству $W_p^{(l)}$ С. Л. Соболева ([1]) в области D n-мерного пространства, где l — любое положительное вещественное число, $p \geqslant 1$. В случае нецелого l такие пространства введены Л. Н. Слободецким ([2,3]).

Отметим, что все результаты вытекают из интегральных представлений функций, аналогичных известному тождеству С. Л. Соболева ([1]).

I. Пусть D — область n-мерного пространства, удовлетворяющая условию: для любых двух точек X и Y из D, для которых $|X-Y| \leqslant \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — фиксированное число, не зависящее от X и Y, существуют n-мерные шаровые секторы одинакового раствора и радиуса $\leqslant |X-Y|$, целиком содержащиеся в D, такие, что мера общей части этих секторов $\geqslant \lambda |X-Y|^n$, где $\lambda > 0$ — постоянное число, не зависящее от X и Y. Класс областей такого вида будем обозначать $C_{\mathcal{H}}(\lambda)$.

Введем следующие обозначения. Через D_m будем обозначать произвольное сечение области D гиперплоскостью $x_{m+1} = \mathrm{const}, \ldots, x_n = \mathrm{const}$. Пусть D_m — некоторое сечение области D гиперплоскостью $x_{m+1} = a_{m+1}, \ldots$ $\ldots, x_n = a_n$. Пусть s — целое число, причем $0 \leqslant s \leqslant m$, и D_s — s-мерное сечение $x_{s+1} = a_{s+1}, \ldots, x_m = a_m$, $x_{m+1} = a_{m+1}, \ldots, x_n = a_n$; тогда через $[D_s]_{m-s}^d$ будем обозначать множество точек $X(x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_m, a_{m+1}, \ldots$ $\ldots, a_n)$ сечения D_m, для координат которых справедливы неравенства $|x_i - a_i| \leqslant d$ $(i = s+1, \ldots, m)$. В частности, например, $[D_m]_0^d$ совпадает с D_m, а $[D_0]_m^d$ — часть D_m, заключенная внутри m-мерного куба с ребром $2d$.

II. В дальнейшем будем предполагать, что $f(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывная функция, заданная в области $D \in C_{\mathcal{H}}(\lambda)$, имеющая непрерывные производные до порядка $\bar{l} = [l]$, где $[l]$ — целая часть l, удовлетворяющая условиям:

$$1) \qquad \Big[\overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{(D)} |f(X)|^p dX\Big]^{1/p} \leqslant A \quad (p \geqslant 1); \tag{1}$$

2) существует постоянное число $M > 0$ такое, что для любого целого m, $0 \leqslant m \leqslant n$, и любого $d > 0$ справедливо неравенство:

$$\sup_{D_m} \sum_{i_1, \ldots, i_{\bar{l}} = 1}^{n} \left[\overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{[D_m]_{n-m}^d} \left(\overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{(D)} \frac{\left| \dfrac{\partial^{\bar{l}} f(X)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{\bar{l}}}} - \dfrac{\partial^{\bar{l}} f(Y)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{\bar{l}}}} \right|^p}{|X-Y|^{n+(l-\bar{l})p}} dY \right) dX \right]^{1/p} \leqslant M d^{\alpha_m}, \tag{2}$$

если l нецелое, и

$$\sup_{D_m} \sum_{i_1, \ldots, i_{\bar{l}}=1}^{n} \left[\overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{[D_m]^d_{n-m}} \left| \frac{\partial^{\bar{l}} f(X)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{\bar{l}}}} \right|^p dX \right]^{1/p} \leqslant M d^{\alpha_m}, \tag{2'}$$

если l целое, где α_m $(m = 0, 1, \ldots, n)$ — фиксированные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\alpha_0 \geqslant \alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n = 0, \quad \alpha_m \leqslant \frac{n-m}{p}. \tag{3}$$

Из того, что $\alpha_n = 0$, следует, что при $d \geqslant 1$ в правой части неравенств (2), (2′) d^{α_m} можно опустить.

Теорема 1. *Пусть $f(X)$ удовлетворяет условиям (1) — (3) в $D \in C_{\mathscr{H}}(\lambda)$, k — целое число, причем $0 \leqslant k < l$.*

Тогда:

1) *Если $\varepsilon_0 = l + \alpha_0 - n/p$, $\varepsilon_0 - k > 0$, $0 < \beta \leqslant \varepsilon_0 - k$, $\beta \leqslant 1$, то справедливы неравенства:*

$$\left| \frac{\partial^k f(X)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right| \leqslant C_1 A h^{-k-n/p} + C_2 M h^{\varepsilon_0 - k}, \tag{4}$$

$$\frac{\left| \dfrac{\partial^k f(X)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} - \dfrac{\partial^k f(Y)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right|}{|X - Y|^\beta} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} C_3 \left(A h^{-k-n/p-\beta} + M h^{\varepsilon_0 - k - \beta} \right), & \text{если } \varepsilon_0 - k > 1 \text{ или } \varepsilon_0 - k - 1; \\ C_4 \left(A h^{-k-n/p-\beta} + \dfrac{1}{1-\beta} M h^{\varepsilon_0 - k - \beta} \right), & \text{если } \varepsilon_0 - k = 1, \ \beta < 1; \\ C_5 \left[A \mathscr{H}^{-k-n/p-\beta} + M \left(1 + \left| \ln \dfrac{\mathscr{H}}{|X - Y|} \right| \right) \right], & \text{если } \varepsilon_0 - k = 1, \quad \beta = 1, \end{cases} \tag{5}$$

где h — произвольное положительное число $\leqslant \mathscr{H}$; C_i — постоянные, не зависящие от A, M, h.

2) *Если $0 \leqslant \beta < 1$, $q \geqslant p$, m целое, $1 \leqslant m \leqslant n$, $\varepsilon_m = l + \alpha_0 (1 - p/q) + \alpha_m p/q + m/q - n/p$, $\varepsilon_m - k - \beta > 0$, s целое, причем $0 \leqslant s \leqslant m$, H — произвольное положительное фиксированное число, $\delta = l + \alpha_0 (1 - p/q) + \alpha_s p/q + s/q - n/p - k$, то справедливы неравенства:*

$$I_1 = \left[\overbrace{\int \cdots \int}^{m}_{[D_s]^H_{m-s}} \left| \frac{\partial^k f(X)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right|^q dv_m \right]^{1/q} \leqslant \tag{6}$$

$$\leqslant \begin{cases} \text{а) } C_6 \left(A H^{(m-s)/q - \nu} h^{s/q + \nu - n/p - k} + M H^{(m-s)/q - \mu} h^{\delta + \mu} \right), \text{ если } \delta > 0; \ \nu, \ \mu \text{ — произвольные числа, удовлетворяющие неравенствам } 0 \leqslant \nu, \ \mu \leqslant \dfrac{m-s}{q}. \\ \text{б) } C_7 \left[A H^{(m-s)/q - \nu} h^{s/q + \nu - n/p - k} + M H^{(m-s)/q - (\alpha_s - \alpha_m) p/q - \mu} h^{\mu} \left(1 + \left| \ln \dfrac{h}{H} \right| \times H^{(\alpha_s - \alpha_m) p/q} \right) \right], \text{ если } \delta = 0, \text{ где } \nu, \ \mu \text{ — произвольные, удовлетворяющие неравенствам } 0 \leqslant \nu \leqslant (m-s)/q, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant (m-s)/q - (\alpha_s - \alpha_m) p/q. \\ \text{в) } C_8 \left(A H^{(m-s)/q - \nu} h^{s/q + \nu - n/p - k} + M H^{(m-s)/q - (\alpha_s - \alpha_m) p/q + \delta - \mu} h^{\mu} \right), \text{ если } \delta < 0, \end{cases}$$

где $0 \leqslant \nu \leqslant (m-s)/q$, $0 \leqslant \mu \leqslant (m-s)/q - (\alpha_s - \alpha_m) p/q + \delta$ (α_s *как в* δ, *так и во всех неравенствах можно заменить на* α_m);

$$I_2 = \left[\overbrace{\int \cdots \int}^{m}_{(D_m)} \left(\overbrace{\int \cdots \int}^{m}_{(D_m)} \frac{\left| \dfrac{\partial^k f(X_m)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} - \dfrac{\partial^k f(Y_m)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right|^q}{|X - Y|^{m+\beta q}} \, dY_m \right) dX_m \right]^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant C_9 (A h^{m/q - n/p - k - \beta} + M h^{\varepsilon_m - k - \beta}). \qquad (7)$$

В (6) *и* (7) h — *произвольное положительное число* $\leqslant \mathscr{H}$; C_i — *постоянные, не зависящие от* A, M, h, H, ν, μ.

Замечание 1. Если $\alpha_i = 0$ ($i = 1, \ldots, n$), $q > p > 1$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $0 \leqslant \beta < 1$, $l + m/q - n/p - k - \beta = 0$, то:

1) при $\beta = 0$

$$I_1 \leqslant C_{10} (A \mathscr{H}^{m/q - n/p - k} + M);$$

2) при $0 < \beta < 1$

$$I_2 \leqslant C_{11} (A \mathscr{H}^{m/q - n/p - k - \beta} + M).$$

Замечание 2. Если $\alpha_i = 0$ ($i = 1, \ldots, n$), $\delta = s/q + l - k - n/p = 0$, то при различных дополнительных предположениях относительно s, q и области D оценку (6) можно улучшить.

1) Если $s \geqslant 1$, $q > p > 1$, то

$$I_1 \leqslant C_{12} (A H^{(m-s)/q - \nu} h^{s/q + \nu - n/p - k} + M H^{(m-s)/q - \mu} h^{\mu}), \; 0 \leqslant \nu, \; \mu \leqslant (m-s)/q.$$

2) Если $s \geqslant 1$, $q = p$, $D \in C^{n-s}_{\mathscr{H}_{n-s}}$ (каждая точка D достижима с помощью $(n-s)$-мерного сектора, содержащегося в сечении области D гиперплоскостью $x_1 = \text{const}, \ldots, x_s = \text{const}$), то

$$I_1 \leqslant C_{13} \left[A H^{(m-s)/p - \nu} h^{s/p + \nu - n/p - k} + M H^{(m-s)/p - \mu} h^{\mu} \left(1 + \left| \ln \frac{h}{H} \right|^{1/p'} \right) \right],$$

$$0 \leqslant \nu, \; \mu \leqslant \frac{m-s}{p}.$$

Аналогичное неравенство для случая $l = 1$, $q = p = 2$, $s = n - 2$, $m = n - 1$ получено С. М. Никольским ([4]).

Замечание 3. Положим

$$\left\| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right\|_{W_q^{(\beta)}(D_m)} = \left\| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right\|_{L_q(D_m)} +$$

$$+ \left[\overbrace{\int \cdots \int}^{m}_{(D_m)} \left(\overbrace{\int \cdots \int}^{m}_{(D_m)} \frac{\left| \dfrac{\partial^k f(X)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} - \dfrac{\partial^k f(Y)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right|^q}{|X - Y|^{m+\beta q}} \, dY \right) dX \right]^{1/q},$$

$$\left\| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right\|_{C^{(\beta)}(D)} = \left\| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right\|_{C(D)} + \sup_{X, Y \in D} \frac{\left| \dfrac{\partial^k f(X)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} - \dfrac{\partial^k f(Y)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right|}{|X - Y|^{\beta}},$$

если $0 < \beta < 1$, и

$$\left\| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right\|_{W_q^{(0)}(D_m)} = \left\| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right\|_{L_q(D_m)},$$

$$\left\| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right\|_{C^{(0)}(D)} = \left\| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right\|_{C(D)},$$

если $\beta = 0$.

Из неравенств (4) — (7) следует, что

$$\left\|\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}\right\|_{C^{(\beta)}(D)} \leqslant C_{14}\left(\|f\|_{L_p(D)}^{\frac{\varepsilon_0-k-\beta}{l+\alpha_0}} M^{\frac{n/p+k+\beta}{l+\alpha_0}} + \|f\|_{L_p(D)}\right), \tag{8}$$

если $\varepsilon_0 - k - \beta > 0$, и

$$\left\|\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}\right\|_{W_q^{(\beta)}(D_m)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{15}\left(\|f\|_{L_p(D)}^{\frac{\varepsilon_m-k-\beta}{l+\alpha_0(1-p/q)+\alpha_m p/q}} M^{\frac{n/p+k+\beta-m/q}{l+\alpha_0(1-p/q)+\alpha_m p/q}} + \|f\|_{L_p(D)}\right), \tag{9}$$

если $\varepsilon_m - k - \beta > 0$.

Отметим, что при некоторых дополнительных предположениях относительно области D все результаты распространяются и на функции, имеющие обобщенные производные в смысле С. Л. Соболева.

Наконец, заметим, что если имеется множество функций, ограниченное в смысле (1) — (2), то из того, что это множество будет компактно в $L_p(D')$, если D' — ограниченная область и такая, что $\bar{D}' \subset D$, и из (8) и (9) непосредственно вытекает, что производные порядка k образуют множество, компактное в $C^{(\beta)}(D')$, если $\varepsilon_0 - k - \beta > 0$, или, соответственно, в $W_q^{(\beta)}(D'_m)$, если $\varepsilon_m - k - \beta > 0$.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
14 VI 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. [2] Л. Н. Слободецкий, ДАН, **118**, № 2 (1958). [3] Л. Н. Слободецкий, Уч. зап. Ленинградск. пед. инст. им. А. И. Герцена, **197** (1958). [4] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., **23**, № 5 (1959).