А. Л. Тоом, Монотонные бинарные мозаичные автоматы, *Пробл. передачи информ.*, 1976, том 12, выпуск 1, 48–54

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том XII 1976 Вып. 1

УДК 62-507

МОНОТОННЫЕ БИНАРНЫЕ МОЗАИЧНЫЕ АВТОМАТЫ

А. Л. Тоом

Оператор P с локальным взаимодействием действует на совокупности островов — конечных подмножеств d-мерной целочисленной решетки Z^d. Выводятся критерии, позволяющие предсказать ряд свойств его итераций P^t при $t\to\infty$.

§ 1. Формулировки

Обозначим X^d совокупность всех распределений нулей и единиц на d-мерной целочисленной решетке

(1) $$X^d=\{x\},\ x=(x_\xi),\ \xi\in Z^d,\ x_\xi\in\{0, 1\}.$$

Пусть задан непустой конечный список $U=\{u_1,\dots, u_r\}\subset Z^d$ и булевская функция $f(a_1,\dots, a_r)$. Бинарный мозаичный автомат — это оператор P: $X^d\to X^d$, задаваемый следующим условием:

(2) $$(Px)_\xi=f(x_{\xi+u_1},\dots, x_{\xi+u_r}).$$

С прикладной точки зрения мозаичные (клеточные) автоматы вызывают интерес как биологические и вычислительные модели (см. [1, 2], где можно найти много других ссылок). Данная статья примыкает к направлению, изучающему алгоритмические возможности предсказания поведения таких автоматов (см., например, [3, 4]). Все результаты статьи относятся к случаю, когда

(3) $$f(0,\dots, 0)=0,$$

т. е. P переводит состояние «все нули» в себя. Обозначим $I_a(x)$ множество тех точек $\xi\in Z^d$, где $x_\xi=a$. Назовем x островом (состоянием с конечным носителем), если $I_1(x)$ конечно.

Определение 1. Автомат P размывает остров x, если существует t, при котором P^tx — состояние «все нули». Автомат P *размывающий*, если он размывает всякий остров в пространстве X^d, на котором он действует.

Назовем бинарный мозаичный автомат P монотонным, если задающая его булевская функция $f(a_1,\dots, a_r)$ монотонна, т. е.

(4) $$a_1\leqslant a_1',\dots, a_r\leqslant a_r'\Rightarrow f(a_1,\dots, a_r)\leqslant f(a_1',\dots, a_r').$$

Все результаты данной статьи относятся к бинарным монотонным мозаичным автоматам, которые будем сокращенно называть автоматами вида P. Основной результат, заключенный в предложении 1, позволяет для любого автомата вида P выяснить, размывающий ли он. Этот результат может иметь применение также в изучении вероятностных автоматов с локальным взаимодействием. Если оператор вида P размывающий, то можно ожидать, что все итерации его произведения на достаточно слабый случайный шум будут сохранять на низком уровне вероятность того, что $x_\xi=1$.

Частично это предположение доказано в [5] (для случая $m=2$ в формуле (9) данной статьи).

В статье [6], в противоположность данной статье, доказывается невозможность алгоритмического предсказания некоторых свойств бинарных мозаичных операторов, также связанных с размыванием островов.

Перейдем к формулировкам. Во всем дальнейшем тексте оператор вида P будем называть просто оператором P. Формула (2) и условия (3), (4) при этом всюду предполагаются. Включим решетку Z^d в действительное d-мерное пространство R^d с тем же началом координат и направлением осей.

Определение 2. Назовем множество $\mu\subset R^d$ *нулевым* (для данного оператора P), если $I_1(x)\cap\mu=\phi\Rightarrow\bar{0}\in I_0(Px)$, где $\bar{0}$ — начало координат. Обозначим σ_P пересечение выпуклых оболочек всех нулевых подмножеств U.

Замечание. Поскольку U конечно, σ_P легко построить.

Предложение 1. *Оператор P размывающий, если и только если σ_P пусто.*

Предложение 2. *Если σ_P пусто, то существует константа $\lambda_P>0$ такая, что для любого острова x $t>\lambda_P D(I_1(x))\Rightarrow I_1(P^t x)=\phi$, где $D(I_1(x))$ — диаметр $I_1(x)$ в евклидовой метрике.*

Предложение 3. *Пусть τ натуральное, $\xi\in Z^d$.*

а) *Существует остров x такой, что*

$$I_1(P^\tau x)\supset I_1(x)+\xi, \tag{5}$$

если и только если $-\xi/\tau\in\sigma_P$.

б) *Если $\sigma_P=-\xi/\tau$, то существует остров x такой, что*

$$I_1(P^\tau x)=I_1(x)+\xi, \tag{6}$$

Из определения σ_P следует, что если σ_P непусто, то оно содержит рациональную точку, и поэтому существуют x, ξ, τ, для которых выполняется (5).

Предложение 4. *Пусть σ_P непусто. Тогда для любого $R>0$ существует остров x такой, что при всех натуральных t*

$$I_1(P^t x)\supset[(-t\sigma_P)+Ш(R)]\cap Z^d. \tag{7}$$

Здесь и ниже $(-t\sigma_P)$ означает образ σ_P при гомотетии с центром $\bar{0}$ и коэффициентом $-t$, а выражение $Ш(R)$ — шар с центром $\bar{0}$ и радиусом R.

Предложение 5. *Пусть σ_P непусто. Тогда существует такая константа μ_P, что для любого острова x и любого натурального t*

$$I_1(P^t x)\subset(-t\sigma_P)+Ш(\mu_P \max_{\xi\in I_1(x)}|\xi|). \tag{8}$$

Предложение 6. *Пусть σ_P состоит из одной точки ξ. Пусть $\nu(x)$ — число точек в $[Ш(\mu_P \max_{\eta\in I_1(x)}|\eta|)+Q^d]\cap Z^d$,*

где Q^d — куб, определяемый условием: все координаты заключены между нулем и единицей. Тогда если все множества $I_1(P^t x)$, $0\leqslant t\leqslant 2^{\nu(x)}$, непусты, то P не размывает x.

Предложение 6 показывает, что если σ_P состоит из одной точки, то задача распознавания островов x, размываемых данным оператором P, алгоритмически разрешима (ср. с [6]).

§ 2. Доказательства

Предложение 1 будет доказано попутно с другими (оно следует из предложений 2, 3 а). Докажем предложение 2.

Лемма 1. *Для любого оператора P множество σ_P представляется как пересечение конечного числа замкнутых нулевых полупространств в R^d (т. е. полупространств, являющихся нулевыми множествами).*

Доказательство. Пусть U' — нулевое подмножество U. Его выпуклая оболочка — политоп и потому представима как пересечение конечного числа полупространств. Все эти полупространства содержат U' и поэтому нулевые. Взяв пересечение таких пересечений по всем нулевым подмножествам U, получаем требуемое представление σ_P.

Обозначим $\pi_1, \ldots, \pi_s$ замкнутые нулевые полупространства, в пересечении дающие σ_P. Сопоставим каждому π_k линейный функционал L_k на R^d с нормой 1, неотрицательный на π_k и только на нем. По теореме 21.3 в [7] (вариант теоремы Хелли) среди них существует m таких (назовем их $L_1, \ldots$ $\ldots, L_m$), что

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i L_i + \varepsilon \equiv 0, \tag{9}$$

где λ_i, ε — положительные константы и $m \leqslant d+1$. Пусть I — непустой компакт в R^d. Обозначим

$$D_1(I) = \sum_{i=1}^{m} \max L_i(\xi) + \varepsilon.$$

Легко доказать, что

$$D_1(I) \leqslant \Big(\sum_{i=2}^{m} |\lambda_i| \Big) D(I),$$

где $D(I)$ — диаметр I в евклидовой метрике. Поскольку π_i нулевое, то для любого $\xi \in Z^d$ $[(\pi_i + \xi) \cap Z^d] \subset I_0(x) \Rightarrow \xi \in I_0(Px)$. Отсюда для любого острова x

$$\max_{\xi \in I_1(Px)} L_i(\xi) \leqslant \max_{\xi \in I_1(x)} L_i(\xi) + L_i(0), \quad \text{если только } I_1(x) \text{ и } I_1(Px) \text{ непусты.}$$

Умножив на λ_k и просуммировав, получаем: $D_1(I_1(Px)) \leqslant D_1(I_1(x)) - \varepsilon$. Отсюда $I_1(P^t x)$ пусто при всех $t > t_P(x)$, где

$$t_P(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} D_1(I_1(x)) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=2}^{m} |\lambda_k| D(I_1(x)).$$

Предложение 2 доказано.

Объясним геометрически динамику размывания островов. Пусть $L_1, \ldots$ $\ldots, L_m$ удовлетворяют (9), причем никакое их собственное подмножество не удовлетворяет аналогичному условию. Тогда, как нетрудно доказать, непустые множества вида

$$\{\xi : \forall i = 1, \ldots, m, \quad L_i(\xi) \leqslant l_i\}, \tag{10}$$

будучи профакторизованы по максимальному подпространству, на котором $\forall i$, $L_i \equiv L_i(0)$, представляют собой симплекс или точку. Если $I_1(x) \subset (10)$, то $I_1(Px)$ принадлежит множеству того же вида, только с другими l_i, отличающимися от прежних на константы, не зависящие от x. Иначе говоря, стороны симплекса сдвигаются на постоянные расстояния. Важнее всего то, что при этом симплекс уменьшается. В результате многократного применения P симплекс исчезает за время, пропорциональное его первоначальным линейным размерам. При этом остров x заведомо размывается.

Разберем случай, когда σ_P непусто.

Назовем множество $M\subset R^d$ *толстым* по вектору $V\neq\bar{0}$, если никакая прямая, параллельная V, не пересекает M ровно по одной точке.

Лемма 2. *Для любых ненулевых $V_1,\dots,V_s$ в R^d существует d-мерный политоп $M\subset R^d$, толстый по всем $V_1,\dots,V_s$.*

Доказательство. Добавим, если это нужно, векторы $V_{s+1},\dots,V_{s'}$ так, чтобы система векторов $V_1,\dots,V_{s'}$ была полной в R^d. Определим M формулой

$$M=\left\{\sum_{i=1}^{s'}C_iV_i,\qquad 0\leqslant C_i\leqslant 1\right\}. \tag{11}$$

Очевидно, M — искомый политоп.

Лемма 3. *Пусть $\xi\in\sigma_P$. Пусть d-мерный политоп M толст по всем ненулевым векторам вида $u_1-\xi,\dots,u_r-\xi$. Тогда существует такое $\rho_M>0$, что при всех $\rho>\rho_M$ и при всех $\eta\in R^d$ условие $I_1(x)=(\rho M+\eta)\cap Z^d$ определяет такой остров x, что при всех натуральных t*

$$I_1(P^tx)\supset(\rho M+\eta-t\xi)\cap Z^d\neq\varnothing. \tag{12}$$

Доказательство. Назовем шар с центром в M *негодным*, если он пересекается с такими гранями $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ политопа M, пересечение которых пусто. Из соображений компактности минимум радиусов всех негодных шаров достигается и положителен. Обозначим его $R_0>0$. Обозначим Q_0 максимальную длину ребра d-мерного куба со сторонами параллельными осям координат в R^d (и в Z^d), принадлежащего M. Очевидно, $Q_0>0$. Обозначим $S_0=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}|u_i-\xi|$. Положим

$$\rho_M=\max\ \{S_0/R_0,\ 1/Q_0\} \tag{13}$$

и докажем утверждение леммы. Из определения Q_0 легко вывести, что $(\rho M+\theta)\cap Z^d$ непусто при всех $\theta\in R^d$, откуда следует неравенство в (12). Докажем включение в (12). Достаточно доказать, что

$$I_1(Px)\supset(\rho M+\eta-\xi)\cap Z^d. \tag{14}$$

Возьмем любую точку в $(\rho M+\eta-\xi)\cap Z^d$. Можно считать, что эта точка есть $\bar{0}$. Докажем, что $\bar{0}\in I_1(Px)$. Все точки $u_1,\dots,u_r$ принадлежат шару $Ш(S_0)+\xi$. Если $Ш(S_0)+\xi\subset\rho M+\eta$, то утверждение очевидно. Пусть это не так. Тогда шар $Ш(S_0)+\xi$ пересекает некоторые грани $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ политопа $\rho M+\eta$. По определению R_0 пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{m}\alpha_i$ непусто. Очевидно, оно содержит хоть одну вершину ω политопа $\rho M+\eta$. Пусть $\alpha_1,\dots,\alpha_{m'}$ — полный список граней $\rho M+\eta$, содержащих ω. Обозначим $\nu+\omega$ пересечение m' замкнутых полупространств, содержащих $\rho M+\eta$ и ограниченных гиперплоскостями, проходящими через $\alpha_1,\dots,\alpha_{m'}$. Очевидно, $\nu+\omega$ есть транслят выпуклого конуса ν. Поскольку шар $Ш(S_0)+\xi$ не пересекает граней $\rho M+\eta$, кроме $\alpha_1,\dots,\alpha_m$, то $[Ш(S_0)+\xi]\cap(\nu+\omega)=[Ш(S_0)+\xi]\cap(\rho M+\eta)$.

Поэтому достаточно доказать, что $\bar{0}\in I_1(Px')$, где x' определено условием $I_1(x')=(\nu+\omega)\cap Z^d$. Поскольку $\bar{0}\in\rho M+\eta-\xi$, то $\xi\in\rho M+\eta$ и тем самым $\xi\in\nu+\omega$. Поэтому $\nu+\xi\subset\nu+\omega$. Поэтому по монотонности f достаточно доказать, что $\bar{0}\in I_1(Px'')$, где x'' определено условием

$$(15)\qquad I_1(x'')=(\nu+\xi)\cap Z^d.$$

Допустим противное: $\bar{0}\in I_0(Px'')$.

Поскольку ω — вершина $\rho M+\eta$, то через ω можно провести к $\rho M+\eta$ опорную гиперплоскость γ, причем $\gamma\cap\rho M+\eta=\omega$. Обозначим через γ' открытое полупространство, ограниченное γ и не пересекающееся с $\rho M+\eta$. Обозначим $\gamma''=\gamma'+\xi-\omega$. Поскольку $\gamma'\cap(\rho M+\eta)=\varnothing$, то $\gamma'\cap\nu+\omega=\varnothing$, тогда и $\gamma''\cap\nu+\xi=\varnothing$. Поэтому $\gamma''\cap Z^a\subset I_0(x'')$. Но поскольку полупространство γ'' не содержит ξ, оно не может быть нулевым. Поэтому если $\bar{0}\in I_0(Px')$, то должна существовать точка u_i, $1\leqslant i\leqslant r$, входящая в $I_0(x'')$, но не входящая в γ''. Точка u_i не может принадлежать $\nu+\xi$ в силу (15). Тогда точки u_i, ξ различны, и прямая, проходящая через них, имеет с $\nu+\xi$ лишь одну общую точку ξ. Тогда параллельная ей прямая, проходящая через ω, имеет лишь одну общую точку ω с $\nu+\omega$, а тем самым и с $\rho M+\eta$, что невозможно, так как $\rho M+\eta$ толст по $u_i-\xi$.

Лемма 3 доказана. Из лемм 2, 3 следует, что если σ_P не пусто, то P неразмывающий. Таким образом, предложение 1 полностью доказано. Из этих лемм также следует предложение 3а в одну сторону: если $-\xi/\tau\in\sigma_P$, то существует остров x, удовлетворяющий (5).

Докажем предложение 4. Пусть σ_P непусто. Очевидно, σ_P — политоп. Пусть σ_P — выпуклая оболочка точек $\xi_1,\ldots,\xi_m$. Пользуясь леммой 2, построим d-мерный политоп M, толстый по всем векторам вида $u_i-\xi_j$, где $1\leqslant i\leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant m$. Определим ρ_0 формулой (13) с тем различием, что теперь

$$S_0=\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant j\leqslant m}}|u_i-\xi_j|.$$

Пусть $\rho>\rho_0$. Определим x условием $I_1(x)=\rho M\cap Z^d$. Потребуем еще, чтобы

$$(16)\qquad \rho M\supset Ш(R+dD(\sigma_P)).$$

Предложение 4 следует из того, что

$$I_1(P^tx)\supset\left[\bigcup_{1\leqslant k_1,\ldots,k_t\leqslant m}\left(\rho M-\sum_{u=1}^{t}\xi_{k_u}\right)\right]\cap Z^d\supset$$

$$\supset\left\{\bigcup_{1\leqslant k_1,\ldots,k_t\leqslant m}\left[Ш(R+dD(\sigma_P))+\sum_{u=1}^{t}\xi_{k_u}\right]\right\}\cap Z^d\supset[(-t\sigma_P)+Ш(R)]\cap Z^d.$$

Здесь первое включение следует из леммы 3, второе — из (16), третье следует из формулы

$$(17)\qquad \bigcup_{1\leqslant k_1,\ldots,k_t\leqslant m}\left[Ш(dD(\sigma_P))-\sum_{u=1}^{t}\xi_{k_u}\right]\supset(-t\sigma_P),$$

которую сейчас докажем. Пусть точка принадлежит $-t\sigma_P$. Тогда она имеет вид $-t\eta$, где $\eta\in\sigma_P$. По теореме Каратеодори найдутся $l\leqslant n+1$ точек из числа $\xi_1,\ldots,\xi_m$ (обозначим их $\xi_1,\ldots,\xi_l$) такие, что

$$\eta=\sum_{i=1}^{l}c_i\xi_i,\qquad c_i>0,\qquad \sum_{i=1}^{l}c_i=1.$$

Определим числа $k_1, \ldots, k_t$ так, чтобы из них число равных i было равно $[c_i t]$, $1 \leqslant i \leqslant l-1$; число равных l было равно $t - \sum_{i=1}^{l-1} [c_i t]$. Тогда, как легко убедиться, расстояние между точками $-t\eta$, $-\sum_{u=1}^{t} \xi_{k_u}$ не превышает $dD(\sigma_P)$, что и требовалось. Предложение 4 доказано.

Докажем предложение 5. Из леммы 1 множество σ_P, а потому и $-\sigma_P$ может быть задано конечной системой линейных неравенств. Пусть

$$-\sigma_P = \{\xi : \forall i=1, \ldots, m, \langle \xi, V_i \rangle \leqslant \alpha_i\}, \quad \text{где } |V_i| = 1.$$

Назовем неравенство $\langle \xi, V \rangle \leqslant \alpha$, где $|V|=1$, опорным для $-\sigma_P$, если все точки $-\sigma_P$ ему удовлетворяют и хотя бы для одной из них оно обращается в равенство. Нетрудно доказать, что все опорные для $-\sigma_P$ неравенства представимы как линейные комбинации неравенств

$$(18) \qquad \langle \xi, V_i \rangle \leqslant \alpha_i, \qquad i=1, \ldots, m,$$

с неотрицательными коэффициентами и равномерно ограниченными суммами этих коэффициентов. Обозначим μ_P ограничивающую их константу и докажем предложение 5 при таком μ_P. Обозначим $\Sigma_\beta = \{\xi : \forall i=1, \ldots, m, \langle \xi, V_i \rangle \leqslant \alpha_i + \beta\}$. Очевидно, $\Sigma_0 = -\sigma_P$.

Докажем сначала, что при всех $\beta \geqslant 0$

$$(19) \qquad \Sigma_\beta \subset \Sigma_0 + Ш(\mu_P \beta).$$

Пусть $\eta_1 \in \Sigma_\beta$, $\eta_1 \notin \Sigma_0$. Пусть η_0 — ближайшая к η_1 точка в Σ_0. Тогда $\Sigma_0 \subset \{\xi : \langle \xi, \eta_1 - \eta_0 \rangle \leqslant \langle \eta_0, \eta_1 - \eta_0 \rangle\}$. Представим опорное для Σ_0 неравенство

$$\left\langle \xi, \frac{\eta_1 - \eta_0}{|\eta_1 - \eta_0|} \right\rangle \leqslant \left\langle \eta_0; \frac{\eta_1 - \eta_0}{|\eta_1 - \eta_0|} \right\rangle$$

как сумму неравенств (18) с коэффициентами $k_i \geqslant 0$, где $\sum_{i=1}^{m} k_i \leqslant \mu_P$. Тогда для всех $\xi \in \Sigma_\beta$

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \langle \xi, V_i \rangle \leqslant \sum_{i=1}^{m} k_i (\alpha_i + \beta),$$

откуда

$$\left\langle \xi, \frac{\eta_1 - \eta_0}{|\eta_1 - \eta_0|} \right\rangle \leqslant \left\langle \eta_0, \frac{\eta_1 - \eta_0}{|\eta_1 - \eta_0|} \right\rangle + \mu_P \beta.$$

Подставив η_1 вместо ξ, получаем $|\eta_1 - \eta_0| \leqslant \mu_P \beta$. Условие (19) доказано. Теперь заметим, что для любого $i=1, \ldots, m$ $\quad \xi \in I_1(x) \Rightarrow \langle \xi, V_i \rangle \quad \max\limits_{\xi \in I_1(x)} |\xi|$. Легко убедиться, что тогда для любого $i=1, \ldots, m$ $\quad \xi \in I_1(P^t x) \Rightarrow \langle \xi, V_i \rangle \leqslant \leqslant t\alpha_i + \max\limits_{\xi \in I_1(x)} |\xi|$. Таким образом $t^{-1} I_1(P^t x) \subset \Sigma t^{-1} \max\limits_{\xi \in I_1(x)} |\xi|$. Тогда из (17) $t^{-1} I_1(P^t x) \subset (-\sigma_P) + Ш(t^{-1} \mu_P \max\limits_{\xi \in I_1(x)} |\xi|)$. Умножив это на t, получаем (8). Предложение 5 доказано. Из него следует недостающая часть предложения 3а. Предложение 3б легко вывести из предложений 3 а) и 5. Предложение 6 легко доказать, пользуясь предложением 5.

Автор благодарит Л. Г. Митюшина, предложившего простой способ доказательства леммы 2 с помощью формулы (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Essays on cellular automata, Ed. by A. W. Burks. Urbana a. o. Univ. of Illinois press. cop. 1970.
2. Однородные структуры. (Анализ. Синтез. Поведение). М., «Энергия», 1973.
3. *Amoroso S., Patt I. N.* Decision Procedures of Surjectivity and Injectivity of Parallel Maps for Tessellation Structures. J. Comput. System Sci., 1972, 6, *5*, 448–464.
4. *Jaky T.* The Constructibility of a Configuration in a Cellular Automaton. J. Comput. System Sci., 1973, 7, *5*, 481–496.
5. *Тоом А. Л.* Неэргодичные многомерные системы автоматов. Проблемы передачи информации, 1974, 10, *3*, 70–79.
6. *Тоом А. Л., Митюшин Л. Г.* Два результата о невычислимости для одномерных мозаичных автоматов. Проблемы передачи информации (в печати).
7. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973.

Поступила в редакцию
19 июня 1974 г.