13. *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. **36**, № 11. 1513–1528.

Поступила в редакцию
24.01.2020

УДК 517.926.4, 510.57

ПРИМЕР НЕВЫЧИСЛИМОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. В. Тюленев [1]

Строится двумерная диагональная система обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающая следующими свойствами: решение задачи Коши с вычислимым начальным условием есть вычислимая функция, младший показатель Ляпунова невычислим, верхний центральный показатель системы не совпадает со старшим показателем и невычислим.

Ключевые слова: показатели Ляпунова, верхний центральный показатель, вычислимое число, вычислимое решение дифференциального уравнения.

A two-dimensional system of ordinary differential equations is constructed. The system possesses the following properties. The solution to a Cauchy problem with computable initial values is computable, the lower Lyapunov exponent is non-computable, the upper central exponent does not coincide with the higher Lyapunov exponent and is non-computable.

Key words: Lyapunov exponents, upper central exponent, computable real, computable solution of differential equation.

Некоторые сведения из теории алгоритмов. Под *алгоритмом* понимается какая-либо формализация этого интуитивного понятия, например машина Тьюринга (МТ). Через $\mathbb{N}$ обозначается множество натуральных чисел; 0 считается натуральным числом.

Определение. Подмножество $M \subset \mathbb{N}$ называется *разрешимым*, если существует алгоритм, который для любого $n \in \mathbb{N}$ определяет его принадлежность к M. Именно существует МТ, на вход которой подается n и которая всегда останавливается с результатом 1, если $n \in M$, и 0, если $n \notin M$.

Определение. Функция f натурального аргумента называется *вычислимой*, если существует МТ, которая вычисляет $f(n)$, т.е. останавливается только на тех $n \in \mathbb{N}$, для которых определена функция f, и выдает $f(n)$.

Определение. Подмножество $M \subset \mathbb{N}$ называется *перечислимым*, если существует МТ, которая выдает все элементы M и только их.

Следующие два факта хорошо известны (см., например, [1, гл. 2, 7]) .

Теорема 1. *Если множество M разрешимо, то оно перечислимо.*

Теорема 2. *Существует перечислимое неразрешимое множество.*

Имеются различные эквивалентные определения вычислимого действительного числа (см., например, [2, п. 3]). Далее приводится одно из них.

Определение. Последовательность $\{r_k\}$ рациональных чисел называется *вычислимой*, если существуют вычислимые *тотальные* (т.е. всюду определенные) функции $a, b, s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такие, что

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b(k) \neq 0 \quad r_k = (-1)^{s(k)} a(k)/b(k).$$

Определение. Действительное число x называется *вычислимым*, если существуют вычислимая последовательность рациональных чисел $\{r_k\}$ и вычислимая тотальная функция $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — *регулятор сходимости*, такие, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \geqslant \beta(n) \quad |r_k - x| \leqslant 2^{-n}.$$

[1] *Тюленев Андрей Всеволодович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математики Рос. ун-та транспорта (МИИТ), e-mail: TyulenevAV@ya.ru.

Tiulenev Andrei Vsevolodovitch — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Russian University of Transport (MIIT).

Замечание. Можно считать, что $\forall n \in \mathbb{N} \quad \beta(n) \geqslant n$.

Существование невычислимых действительных чисел следует из соображений мощности. Одним из явных примеров является конструкция Шпекера (см. [3]), состоящая в следующем. Пусть подмножество $A \subset \mathbb{N}$ перечислимо и неразрешимо, $\alpha : \mathbb{N} \to A$ — (вычислимая) функция, которая перечисляет A. Рассмотрим

$$s(k) = \sum_{n=0}^{k} 2^{-\alpha(n)}. \tag{0}$$

Теорема 3. *Последовательность $s(k)$ сходится к невычислимому числу s.*

Доказательство. Сходимость следует из монотонности и ограниченности. Предположим, что существует регулятор сходимости β, т.е.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \geqslant \beta(n) \quad |s - s(k)| = \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-\alpha(n)} \leqslant 2^{-n},$$

тогда, в частности,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \geqslant \beta(n) \quad 2^{-\alpha(k+1)} \leqslant 2^{-n},$$

откуда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha(\beta(n)+1) \geqslant n$. А это противоречит неразрешимости множества A, поскольку для любого $m \in \mathbb{N}$ можно определить, принадлежит ли оно множеству A, следующим образом: вычисляем $\alpha(\beta(j)+1)$, $j = 0, 1, \ldots, m$; если $\alpha(\beta(j)+1) \notin A$ для всех таких j, то $m \notin A$, поскольку $\forall n > m \quad \alpha(\beta(n)+1) > m$. Следовательно, число s невычислимо. Теорема доказана.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ действительных чисел называется *вычислимой*, если существует вычислимая последовательность рациональных чисел $\{r_{nk}\}$, такая, что

$$\forall k \; \forall n \in \mathbb{N} \quad |r_{nk} - x_n| \leqslant 2^{-k}.$$

Замечание. Ясно, что каждое число x_n будет при этом вычислимым.

Замечание. Понятия вычислимого числа, вычислимой последовательности очевидным образом распространяются на случай $\mathbb{R}^q$, $q > 1$.

Пусть I — отрезок с вычислимыми границами (такие промежутки называются *вычислимыми*).

Определение. Функция $f : I \to \mathbb{R}$ называется *вычислимой*, если

1) для любой вычислимой последовательности $\{x_n\} \subset I$ последовательность $\{f(x_n)\}$ вычислима;

2) f эффективно равномерно непрерывна, т.е. существует вычислимая функция $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такая, что

$$\forall x \; \forall y \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |x - y| \leqslant \beta(n)^{-1} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leqslant 2^{-n}.$$

Легко доказываются следующие свойства вычислимых функций.

Теорема 4. 1. *Если функции $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ вычислимы, то функции*

$$f \pm g, \quad f \cdot g, \quad f/g \ (\textit{здесь}\ \forall x \in I \ \ g(x) \neq 0), \quad \max\{f(x), g(x)\}, \quad |f|$$

вычислимы.

2. *Если область значений вычислимой функции g входит в область определения вычислимой функции f, то функция $f(g(\cdot))$ вычислима.*

3. *Если $a < b < c$ — вычислимые числа, функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [b,c] \to \mathbb{R}$ вычислимы и $f(b) = g(b)$, то функция*

$$h : [a,c] \to \mathbb{R}, \quad h\big|_{[a,b]} = f, \quad h\big|_{[b,c]} = g$$

вычислима.

4. *Если функция f вычислима на вычислимом отрезке $[a,b]$, то функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ вычислима на $[a,b]$.*

5. *Все элементарные функции вычислимы на любом вычислимом промежутке области определения.*

Замечание. Определение вычислимой функции может быть распространено на параллелепипед $I \subset \mathbb{R}^l$ (см., например, [4, гл. 0.3]).

Доказательство следующего утверждения можно найти в [4, гл. 1.1].

Теорема 5. *Пусть $f \in C^2[a,b]$ — вычислимая функция на вычислимом отрезке $[a,b]$. Тогда функция f' вычислима на $[a,b]$.*

Замечание. Существует пример вычислимой функции $f \in C^1[0;1]$ с невычислимой производной (см. [4, гл. 1.1]).

Естественно поставить вопрос о вычислимости решений обыкновенного дифференциального уравнения с вычислимой правой частью. Доказательство следующего факта имеется в [5, гл. 1] (см. также [6]).

Теорема 6. *Пусть $f(\cdot,\cdot)$ — вычислимая функция в вычислимом параллелепипеде $I^{q+1} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^q$, $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^q$ — вычислимое начальное условие.*

Пусть выполняются условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0.$$

Тогда решение задачи Коши — вычислимая функция.

Замечание. Если решение задачи Коши не является единственным, то утверждение неверно. В [6] построен пример уравнения с вычислимой правой частью, решения которого невычислимы в любой точке.

Пример системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с вычислимым старшим, невычислимым младшим показателями и невычислимым верхним центральным показателем. Рассматривается двумерная диагональная система

$$\begin{cases} \dot{x} = u(t)x; \\ \dot{y} = v(t)y, \quad t \geqslant 1. \end{cases} \tag{1}$$

Далее строятся вычислимые ограниченные на $[1;+\infty)$ функции u, v.

Построение функции u. Разобьем луч $[1;+\infty)$ на отрезки так:

$$I_{2j-1} = [4^{j-1}; 2\cdot 4^{j-1}], \quad I_{2j} = [2\cdot 4^{j-1}; 4^j], \quad j = 1,2,\ldots\ . \tag{2}$$

Их длины равны 4^{j-1}, $2\cdot 4^{j-1}$ соответственно.

Пусть $A \subset \mathbb{N}$ есть перечислимое неразрешимое множество, $\alpha : \mathbb{N} \to A$ — функция, которая его перечисляет. Возьмем ступенчатую функцию

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \alpha(0), \ \text{если } 1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ \sum_{j=0}^{k} 2^{-\alpha(j)}, \ \text{если } t > \frac{1}{2}\,, \end{cases}$$

где k определяются условиями $4^{k-1} + \frac{1}{2}\cdot 4^{k-1} < t \leqslant 4^k + \frac{1}{2}\cdot 4^k$, т.е. точки разрыва — середины отрезков I_{2k-1}.

Превратим функцию φ_0 в непрерывную функцию φ_1, заменив ее линейными функциями $\xi_k(t - s_{2k-1}) + \varphi_o(s_{2k-1})$ на отрезках $[s_{2k-1}, t_{2k-1}] \subset I_{2k-1}$, где

$$s_{2k-1} = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{8}\right)\cdot 4^{k-1}, \quad t_{2k-1} = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{8}\right)\cdot 4^{k-1}, \ \text{угловой коэффициент } \xi_k = \frac{2^{-\alpha(k)}}{4^{k-2}} \leqslant 4^{-(k-2)}.$$

Сгладим φ_1 так, чтобы получилась функция φ_2 из $C^1[1;+\infty)$. В Δ-окрестности s_{2k-1} возьмем функцию

$$\frac{\xi_k}{4\Delta}(t - s_{2k-1} + \Delta)^2 + \sum_{j=0}^{k-1} 2^{-\alpha(j)},$$

а в Δ-окрестности t_{2k-1} — функцию

$$-\frac{\xi_k}{4\Delta}(t - t_{2k-1} - \Delta)^2 + \sum_{j=0}^{k} 2^{-\alpha(j)}.$$

Положим $\Delta = \frac{1}{16}$.

Функция φ_2 непрерывно дифференцируема, $\dot{\varphi}_2(t) = 0$ при $t \in I_{2k}$ и $0 \leqslant \dot{\varphi}_2(t) \leqslant \xi_k$ при $t \in I_{2k-1}$.

Положим $u(t) = \varphi_2(t) + t\dot{\varphi}_2(t)$ для всех $t \geqslant 1$. Ясно, что $u \in C[1;+\infty)$ и

$$\forall t \in I_{2k} \quad 0 < u(t) < 2, \quad \forall t \in I_{2k-1} \quad 0 < u(t) < 2 + \xi_k\big(t_{2k-1} + \frac{1}{16}\big) < 9.$$

Вычислимость функции u непосредственно следует из теоремы 4.

Построение функции v. Расширим каждый отрезок I_{2j-1} (см. (2)) на $\frac{1}{2}$ влево и вправо, отрезки новой системы обозначим

$$I'_{2j-1} = \big[4^{j-1} - \frac{1}{2};\ 2\cdot 4^{j-1} + \frac{1}{2}\big], \quad I'_{2j} = \big[2\cdot 4^{j-1} + \frac{1}{2};\ 4^{j-1} - \frac{1}{2}\big].$$

Определим

$$v(t) = \begin{cases} 0,\ \text{если}\ t \in I'_{2k}; \\ 9,\ \text{если}\ t \in I_{2k-1}; \\ 9 + 18(t - 4^{k-1}),\ \text{если}\ 4^{k-1} - \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 4^{k-1}; \\ 9 - 18(t - 2\cdot 4^{k-1}),\ \text{если}\ 2\cdot 4^{k-1} - \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 4^{k-1} + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Функция v непрерывна, из теоремы 4 следует ее вычислимость.

Среди решений системы (1) имеются такие:

$$\exp\Big(\int_1^t v(\tau)d\tau\Big), \quad \exp\Big(\int_1^t u(\tau)d\tau\Big).$$

Их характеристические показатели обозначим через $\lambda_1,\ \lambda_2$.

Утверждение 1. *Имеет место равенство* $\lambda_1 = 6$.

Доказательство. По определению $\lambda_1 = \varlimsup\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_1^t v(\tau)d\tau$. Если заменить v ступенчатой функцией $\hat{p}$, равной 9 на I'_{2k-1} и 0 на I'_{2k}, $k = 1, 2, \ldots$, то верхний предел не уменьшится и будет равен

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{9}{2\cdot 4^k + \frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=0}^{k}\big(4^j + \frac{1}{2}\big) - \frac{9}{4}\Big) = 6.$$

С другой стороны, если заменить v ступенчатой функцией $\check{p}$, равной 9 на всех I_{2k-1} и 0 вне этих промежутков, верхний предел не увеличится и будет равен

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{9}{2\cdot 4^k}\sum_{j=0}^{k} 4^j = 6.$$

Следовательно, $\lambda_1 = 6$. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *Справедливо неравенство* $\lambda_2 < 2$, *причем число* λ_2 *невычислимо.*

Доказательство. Имеем

$$\lambda_2 = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_1^t (\varphi_2(\tau) + \tau\dot{\varphi}_2(\tau))d\tau = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\Big(\tau\varphi_2(\tau)\Big|_1^t\Big) = \varlimsup_{t\to+\infty}\Big(\varphi_2(t) - \frac{\varphi_2(1)}{t}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-\alpha(n)},$$

а это число невычислимо (см. пример Шпекера в теореме 3). Утверждение 2 доказано.

Займемся верхним центральным показателем (в.ц.п.) Ω системы (1). Известно, что он совпадает с в.ц.п. семейства функций $\mathfrak{P} = \{u, v\}$ (см. [7, гл. III, § 8]). Через $\mathfrak{R}(\mathfrak{P})$ обозначим верхний класс семейства $\mathfrak{P}$. Определим функцию $p : [1; +\infty) \to \mathbb{R}$, $\quad p(t) = \max\{u(t), v(t)\}$. Очевидно, $p \in \mathfrak{R}(\mathfrak{P})$.

Утверждение 3. *В качестве* $\mathfrak{R}(\mathfrak{P})$ *можно взять лишь функцию* p.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\forall f \in \mathfrak{R}(\mathfrak{P}) \quad \bar{p} \leqslant \bar{f}$, где

$$\bar{g} \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_1^t g(\tau)d\tau.$$

Из определения верхнего класса системы функций (см. [7, гл. III, §8]) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $D'_\varepsilon, D''_\varepsilon$, что для всех t, s, таких, что $t \geqslant s \geqslant 1$, справедливы неравенства

$$\int_s^t u(\tau)d\tau \leqslant \int_s^t f(\tau)d\tau + \varepsilon(t-s) + D'_\varepsilon, \quad \int_s^t v(\tau)d\tau \leqslant \int_s^t f(\tau)d\tau + \varepsilon(t-s) + D''_\varepsilon. \tag{3}$$

Обозначим $D_\varepsilon = \max\{D'_\varepsilon,\ D''_\varepsilon\}$. Обозначим промежутки, на которых $v(t) \geqslant u(t)$, через I''_{2k-1}, а те, на которых это не так, — через I''_{2k} . Рассмотрим

$$\mathscr{I}_0 \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{j=1}^{+\infty}\big(\big(I''_{2j} \cap [s,t]\big)\big), \quad \mathscr{I}_1 \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{j=1}^{+\infty}\big(\big(I''_{2j-1} \cap [s,t]\big)\big).$$

Количество отрезков вида I''_{2j} (вида I''_{2j-1}), пересекающихся с $[s,t]$, обозначается через n_0 (n_1). Ясно, что $[s,t] = \mathscr{I}_0 \cup \mathscr{I}_1$, $\quad \big|\mathscr{I}_0 \cap \mathscr{I}_1\big| = 0$. Тогда из (3) следует

$$\int_s^t p(\tau)d\tau = \int_{\mathscr{I}_0} u(\tau)d\tau + \int_{\mathscr{I}_1} v(\tau)d\tau \leqslant \int_{\mathscr{I}_0} f(\tau)d\tau + \varepsilon\big|\mathscr{I}_0\big| + n_0 D_\varepsilon + \int_{\mathscr{I}_1} f(\tau)d\tau + \varepsilon\big|\mathscr{I}_1\big| + n_1 D_\varepsilon\,. \quad (4)$$

Так как $n_0 + n_1 \leqslant j$, если $t \in I'_j$, то $n_0 + n_1 \leqslant \log_2 t + 1$. Поэтому из (4) вытекает, что для любого $t \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{t}\int_1^t p(\tau)d\tau \leqslant \frac{1}{t}\int_1^t f(\tau)d\tau + \frac{\varepsilon(t-1)}{t} + \frac{\log_2 t + 1}{t}\cdot D_\varepsilon,$$

следовательно, $\bar{p} \leqslant \bar{f} + \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $\bar{p} \leqslant \bar{f}$. Утверждение 3 доказано. Следовательно, $\Omega = \bar{p}$.

Докажем вспомогательное предложение. Пусть числа t_0, t_1, C_0, C_1 таковы, что $1 \leqslant t_0 \leqslant t_1/2$, $\ 0 \leqslant C_0 \leqslant C_1/2$. Определим функцию $\chi : [1;+\infty) \to \mathbb{R}$ так: χ непрерывна на $[1;t_1]$, $0 \leqslant \chi(t) \leqslant C_1$ и

$$\chi(t) = \begin{cases} C_1, \text{ если } t \in [t_0; t_1]; \\ C_0, \text{ если } t > t_1. \end{cases}$$

Лемма. *Функция* $\frac{1}{t}\int_1^t \chi(\tau)d\tau$ *не убывает на* $[t_0;t_1]$ *и не возрастает при* $t > t_1$.

Доказательство. Пусть $t \in [t_0;t_1]$. Введем обозначения

$$J_0 = \int_1^{t_0} \chi(\tau)d\tau, \quad \theta = t - t_0, \quad \Phi_0(\theta) = \frac{1}{t_0+\theta}\int_1^{t_0+\theta} \chi(\tau)d\tau.$$

Тогда

$$\Phi_0(\theta) = \frac{1}{t_0+\theta}(J_0 + C_1\theta), \quad \Phi'_0(\theta) = \frac{C_1 t_0 - J_0}{(t_0+\theta)^2} \geqslant 0.$$

Пусть теперь $t > t_1$. Обозначим

$$J_1 = \int_1^{t_1} \chi(\tau)d\tau, \quad \theta = t - t_1, \quad \Phi_1(\theta) = \frac{1}{t_1+\theta}\int_1^{t_1+\theta} \chi(\tau)d\tau.$$

Тогда

$$\Phi_1(\theta) = \frac{1}{t_1+\theta}(J_1 + C_0\theta), \ \Phi'_1(\theta) = \frac{C_0 t_1 - J_1}{(t_0+\theta)^2} = \frac{C_0 t_1 - J_0 - C_1 t_1 + C_1 t_0}{(t_0+\theta)^2} \leqslant \frac{\frac{C_1}{2}t_1 - J_0 - C_1 t_1 + \frac{C_1}{2}t_1}{(t_0+\theta)^2} \leqslant 0.$$

Лемма доказана.

Определим функции $\hat{p}_1(t) = \max\{\hat{p}(t), u(t)\}$, $\ \check{p}_1(t) = \max\{\check{p}(t), u(t)\}$ (см. доказательство утверждения 1). Из их определения имеем

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,\frac{1}{t}\int_1^t \check{p}_1(\tau)d\tau \leqslant \bar{p} \leqslant \overline{\lim_{t\to+\infty}}\,\frac{1}{t}\int_1^t \hat{p}_1(\tau)d\tau.$$

Далее, для любых чисел $T_1 \in I_{2k-1}$, $\ T_2 \in I_{2K}$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{T_1}\int_1^{T_1} (\hat{p}_1(\tau) - \check{p}_1(\tau))d\tau \leqslant \frac{1}{4^{k-1}}(9\cdot(2k-2)), \quad \frac{1}{T_2}\int_1^{T_2} (\hat{p}_1(\tau) - \check{p}_1(\tau))d\tau \leqslant \frac{1}{2\cdot 4^{k-1}}(9\cdot 2k). \quad (5)$$

Правые части неравенств (5) меньше 2^{-k} при $k \geqslant 10$, что обеспечивает эффективную сходимость к нулю при $T_{1,2} \to +\infty$. Поэтому

$$\bar{p} = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_1^t \check{p}_1(\tau)d\tau.$$

Теорема 7. *Число $\bar{p}$ невычислимо.*

Доказательство. Из леммы следует, что

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_1^t \check{p}_1(\tau)d\tau = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2\cdot 4^k}\int_1^{2\cdot 4^k} \check{p}_1(\tau)d\tau.$$

Последний интеграл равен

$$9\cdot\sum_{j=0}^k |I_{2j+1}| + \sum_{j=1}^k \varphi_0(4^j)|I_{2j}| = 9\cdot\sum_{j=0}^k 4^j + \sum_{j=1}^k\sum_{i=0}^j 2^{-\alpha(i)}\cdot 2\cdot 4^{j-1} = 3(4^{k+1}-1) + 2\cdot\sum_{j=1}^k 4^{j-1}\cdot s(j)$$

(см. (0)). Отсюда получаем

$$\frac{1}{2\cdot 4^k}\int_1^{2\cdot 4^k} \check{p}_1(\tau)d\tau = 6 - \frac{3}{2\cdot 4^k} + \sum_{j=1}^k 4^{j-1-k}\cdot s(j). \qquad (6)$$

Так как $6-\frac{3}{2\cdot 4^k}$ эффективно стремится к 6, рассмотрим последнее слагаемое в (6). Обозначим $c_k = \sum_{j=1}^k 4^{j-k-1}s(j)$. Последовательность $\{c_k\}$ ограничена сверху $\frac{2}{3}$. Оценим разность соседних членов:

$$c_{k+1}-c_k = \frac{1}{4}s(k+1) + \sum_{j=1}^k (4^{j-k-2}-4^{j-k-1})\cdot s(j) = \frac{1}{4}\big(s(k+1) - \frac{3}{4}\cdot\sum_{j=1}^k \frac{s(j)}{4^{k-j+1}}\big) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{s(k+1)}{4} - \frac{3\cdot s(k)}{16}\cdot\sum_{j=1}^k\frac{1}{4^{k-j}} = \frac{s(k+1)}{4} - \frac{3\cdot s(k)}{16}\cdot\frac{1-\frac{1}{4^k}}{\frac{3}{4}} \geqslant \frac{s(k+1)-s(k)}{4} = 2^{-\alpha(k+1)-2}.$$

Следовательно, последовательность $\{c_k\}$ монотонно возрастает, а потому сходится к некоторому действительному числу C. Предположим, что эта сходимость эффективна, т.е. существует вычислимая функция $\beta:\ \mathbb{N}\to\mathbb{R},\ \ \beta(n)\geqslant n$, такая, что

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \forall k\geqslant\beta(n)\quad C-c_k\leqslant 2^{-n}.$$

Тогда получим, в частности,

$$\forall k\geqslant\beta(n)\qquad 2^{-\alpha(k+1)-2}\leqslant c_{k+1}-c_k\leqslant 2^{-n},$$

откуда следует, что $2^{\alpha(\beta(n)+1)}\geqslant 2^{n-2}$, т.е. $\alpha(\beta(n)+1)\geqslant n-2$, что противоречит неразрешимости множества A, которое перечисляется функцией α (см. доказательство теоремы 3). Значит, правая часть (6) стремится к невычислимому числу $6+C$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крупский В.Н., Плиско В.Е.* Теория алгоритмов. М.: Издательский центр “Академия”, 2009.
2. *Успенский В.А.* Лекции о вычислимых функциях. М.: Физматгиз, 1960.
3. *Specker E.* Nicht konstructiv beweisbare Saetze der Analysis // J. Symbol. Logic. 1949. **14**, N 3. 145–158.
4. *Pour-El M.B., Richards J.I.* Computability in Analysis and Physics. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1989.
5. *Henrici P.* Discrete variable methods in ordinary differential equations. N.Y.: Wiley, 1962.
6. *Pour-El M.B., Richards J.I.* A computable ordinary differential equation which possesses no computable solution // Ann. Math. Log. 1979. **17**. 61–90.
7. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию
04.03.2020