С. Дориченко, Л. Медников, А. Шаповалов, XXXIII Турнир городов (задачи осеннего тура), *Квант*, 2012, номер 1, 60–61

https://www.mathnet.ru/kvant2036

ОЛИМПИАДЫ

XXXIII Турнир городов

ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1(3)[1]. На наибольшей стороне AB треугольника ABC взяли точки P и Q такие, что $AQ = AC$, $BP = BC$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника PQC, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

В.Произволов

2(4). Гости за круглым столом ели изюм из корзины с 2011 изюминками. Оказалось, что каждый съел либо вдвое больше, либо на 6 меньше изюминок, чем его сосед справа. Докажите что были съедены не все изюминки.

Д.Баранов

3(4). Из клетчатого прямоугольника 9×9 вырезали 16 клеток, у которых номера горизонталей и вертикалей четные. Разрежьте оставшуюся фигуру на несколько клетчатых прямоугольников так, чтобы среди них было как можно меньше квадратиков 1×1.

П.Кожевников

4(4). См. задачу М2248, *а*) «Задачника «Кванта».

5(5). По шоссе в одну сторону движутся пешеход и велосипедист, в другую сторону – телега и машина. Все участники движутся с постоянными скоростями (каждый со своей). Велосипедист сначала обогнал пешехода, потом через некоторое время встретил телегу, а потом еще через такое же время встретил машину. Машина сначала встретила велосипедиста, потом через некоторое время встретила пешехода и потом еще через такое же время обогнала телегу. Велосипедист обогнал пешехода в 10 ч, а пешеход встретил машину в 11 ч. Когда пешеход встретил телегу?

А.Шень

10–11 классы

1(3). См. задачу 2 для 8–9 классов.

2(4). В каждой клетке секретной таблицы $n\times n$ записана одна из цифр от 1 до 9. Из них получаются n-значные числа, записанные в строках слева направо и в столбцах сверху вниз. Петя хочет написать такое n-значное число без нулей в записи, чтобы ни это число, ни оно же, записанное задом наперед, не совпадали ни с одним из $2n$ чисел в строках и столбцах таблицы. В каком наименьшем количестве клеток Петя должен для этого узнать цифры?

Г.Гальперин

3(4). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны равны: $AB = 10$, $BC = 14$, $CD = 11$, $AD = 5$. Найдите угол между его диагоналями.

А.Толпыго

4(4). Натуральные числа $a < b < c$ таковы, что $b + a$ делится на $b - a$, а $c + b$ делится на $c - b$. Число a записывается 2011 цифрами, а число b записывается 2012 цифрами. Сколько цифр в числе c?

Б.Френкин

5(5). См. задачу М2249 «Задачника «Кванта».

[1] В скобках после номера каждой задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшееся за ее решение.

СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1(3). Саша пишет на доске последовательность натуральных чисел. Первое число $N > 1$ написано заранее. Новые натуральные числа он получает так: вычитает из последнего записанного числа или прибавляет к нему любой его делитель, больший 1. При любом ли натуральном $N > 1$ Саша сможет написать на доске в какой-то момент число 2011?

А.Бердников

2(4). На стороне AB треугольника ABC взята точка P такая, что $AP = 2PB$, а на стороне AC – ее середина, точка Q. Известно, что $CP = 2PQ$. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

В.Произволов

3(5). В наборе несколько гирь, все веса которых различны. Известно, что если положить любую пару гирь на левую чашу, можно весы уравновесить, положив на правую чашу одну или несколько гирь из остальных. Найдите наименьшее возможное число гирь в наборе.

А.Шаповалов

4(6). На клетчатой доске из 2012 строк и $k > 2$ столбцов в какой-то клетке самого левого столбца стоит фишка. Двое ходят по очереди, за ход можно передвинуть фишку вправо, вверх или вниз на одну клетку, при этом нельзя передвигать фишку на клетку, в которой она уже побывала. Игра заканчивается, как только один из игроков передвинет фишку в самый правый столбец. Но будет ли такой игрок выигравшим или проигравшим – сообщается игрокам только в тот момент, когда фишка попадает в предпоследний столбец (второй справа). Может ли один из игроков обеспечить себе выигрыш?

А.Бердников

5(6). Пусть $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$, $0 < a,b,c,d < 1$. Докажите, что $(a+b+c+d)-(a+c)(b+d)\geq 1$.

Г.Гальперин

6(7). См. задачу М2251 «Задачника «Кванта».

7(9). Вершины правильного 45-угольника раскрашены в три цвета, причем вершин каждого цвета поровну. Докажите, что можно выбрать по три вершины каждого цвета так, чтобы три треугольника, образованные выбранными одноцветными вершинами, были равны.

В.Брагин

10–11 классы

1(4). Петя отметил на плоскости несколько точек (больше двух), все расстояния между которыми различны. Пару отмеченных точек A, B назовем *необычной*, если A – самая дальняя от B отмеченная точка, а B – ближайшая к A отмеченная точка (не считая A). Какое наибольшее возможное количество необычных пар могло получиться у Пети?

Б.Френкин

2(4). См. задачу 5 для 8–9 классов.

3(5). См. задачу М2250 «Задачника «Кванта».

4. Существует ли выпуклый N-угольник, все стороны которого равны, а все вершины лежат на параболе $y = x^2$, если: а)(3) $N = 2011$; б)(4) $N = 2012$?

И.Богданов

5(7). Назовем натуральное число *хорошим*, если все его цифры ненулевые. Хорошее число назовем *особым*, если в нем хотя бы k разрядов и цифры идут в порядке строгого возрастания (слева направо). Пусть имеется некое хорошее число. За ход разрешается приписать с любого края или вписать между любыми его двумя цифрами особое число или же, наоборот, стереть в его записи особое число. При каком наибольшем k можно из любого хорошего числа получить любое другое хорошее число с помощью таких ходов?

А.Бердников

6(7). См. задачу М2252 «Задачника «Кванта».

7(9). См. задачу М2253 «Задачника «Кванта».

Публикацию подготовили С.Дориченко, Л.Медников, А.Шаповалов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №4 за 2011 г.)

1. Можно.
Например, $101001000100001 \times 11111 = 1122222112111111111$.

2. а) Диагональ AC делит пополам площадь прямоугольника $ABCD$ и делит пополам площадь каждого из белых прямоугольников. Значит, и синие прямоугольники равны по площади.

б) Да, обязательно.
Пусть X не лежит на диагонали AC, т.е. точки X, A и C образуют треугольник. Обозначим его площадь за s. Из условия следует, что площади четырехугольников $ABCX$ и $ADCX$ равны. Но одна из них на s больше половины площади BCD, а другая на s меньше (это легко увидеть, проведя диагональ AC) – противоречие.

3. 24.
Нам известны окончательные числа в трех клетках – назовем эти клетки «открытыми». Заметим, что каждый квадрат 2×2 внутри нашего прямоугольника содержит ровно одну «открытую» клетку. Тогда каждая операция увеличивает сумму чисел в «открытых» клетках ровно на 1. Сначала эта сумма была 0, а в конце 24. Значит, было сделано 24 операции.

4. Присвоим каждому отрезку простое число так, чтобы все числа были разные (это легко сделать, так как простых чисел бесконечно много). Теперь рядом с каждой точкой напишем произведение чисел, присвоенных выходящим из нее отрезкам. Убедитесь, что получится то, что требовалось.

5. а) Можно.
Разобьем лошадей на пять пятерок. Из первых пяти забегов выясним, кто быстрее в каждой пятерке. Затем возьмем из каждой пятерки победителя и устроим забег для них. После этого составим такую таблицу. В каждую строку запишем лошадей из одной пятерки – слева направо в порядке, в котором они финишировали в своем забеге. Сами строки упорядочим сверху вниз по итогам шестого забега.

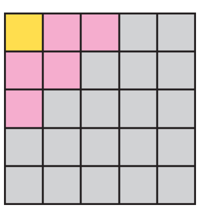

Рис. 1

А теперь посмотрите на рисунок 1. Лошадь на желтой клетке быстрее всех остальных. А у лошадей из серой области точно нет никаких шансов попасть в тройку быстрейших – для каждой из них есть не меньше трех лошадей, которые быстрее ее. Осталось устроить забег для лошадей из красной области, чтобы определить еще двух самых быстрых.

б) Не хватит.
Допустим, что хватит и шести забегов. До забегов про скорости лошадей ничего не известно, поэтому считаем, что все 25 лошадей потенциально быстрейшие. Каждый забег сокращает это число не более чем на четыре: лошади, пришедшие к финишу на местах со 2 по 5, не могут быть быстрейшими. Значит, перед шестым забегом есть не меньше 5 потенциально быстрейших лошадей и каждая из них должна соревноваться в последнем забеге, чтобы определилась тройка лидеров. Следовательно, после первых пяти забегов должно остаться ровно 5 возможных лидеров, а каждая из остальных 20 лошадей соревновалась только один раз. Пусть в последнем забеге первыми пришли лошади A, $Б$, $В$ (в таком порядке). Лошадь, которая финишировала вслед за A в одном из первых пяти забегов, соревновалась ровно один раз – в забеге с A, причем ни $Б$, ни $В$ в этом забеге не участвовали. Теоретически эта лошадь может оказаться в тройке сильнейших, но для проверки этого нам необходимо сравнить ее хотя бы с $Б$. Значит, шести забегов все-таки не хватит.

СТЕПЕНИ n И n-Е СТЕПЕНИ

1. Рассуждая как в доказательстве леммы 1, можно получить $x^{t-1} + x^{t-2}y + x^{t-3}y^2 + \ldots + xy^{t-2} + y^{t-1} \equiv ty^{t-1} \pmod m$.

2. Можно применить рассуждения из решения М2122,б), вместо леммы 1 ссылаясь на упражнение 1 и используя оценку

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right) \geq$$

$$\geq 2\left(3^{n-1} + 3^{n-2} + \ldots + 3 + 1\right) = 3^n - 1 > n^2.$$

3. Если $m = \text{НОК}(a, b)$, то из условия следует, что $m \in A_1(2)$, откуда $m = 1$.

4. Если $a^n - b^n$ делится на n и $\text{НОД}(a-b, n) = 1$, то $\text{НОД}(a, n) = 1$ и $\text{НОД}(b, n) = 1$. Значит, ситуацию можно свести к рассмотренной ранее в задаче 1, подобрав такое натуральное c, что $bc \equiv 1 \pmod n$.

5. Можно применить идею решения задачи 2.

6. Достаточно положить $n = 2 \cdot 3^m$. Применяя LTE-лемму для $a = 2$, $b = -1$ (или просто применяя индукцию по m), можно доказать, что $2^{3^m} + 1$ делится на 3^m.

7. Предположим, что $\{a + nd \mid n \in \mathbb{N}\}$ – искомая прогрессия, причем можно считать, что $a > 0$. Будем брать простое p вида $1 + md$, $m \in \mathbb{N}$, такое, что $p > 2^a$ (таких p бесконечно много). Тогда $pa = a + (ma)d$, и $2^{pa} - 1 \equiv 2^a - 1 \not\equiv 0 \pmod p$, следовательно, $\text{НОД}\left(2^{pa} - 1, pa\right) \leq a$. Противоречие.

8. С помощью приема, который используется в упражнении 4, вопрос сводится к случаю $b = 1$, т.е. к леммам 5 и 6.

9. Можно положить $a = p^{k-1} + 1$, где p – нечетное простое. Тогда $p \in A_k(a)$. С другой стороны, если $n \in A_{k+1}(a)$ и $n > 1$, то, по задаче 1, n делится на p. Теперь можно прийти к противоречию, сравнивая $\nu_p\left(a^n - 1\right)$ и $\nu_p\left(n^{k+1}\right)$.

10. а) По задаче 2, если $n \in A_3(3)$, $n > 2$, то n делится на 4, $n = 4m$. Но делимость $81^m - 1$ на 2^6m^3 противоречит лемме 6. б) Рассуждения ведутся по той же схеме. Как и в решении задачи 2, получаем, что если $n \in A_3(5)$, $n > 1$, то n четно, $n = 2t$. Имеем: $25^t - 1$ делится на 2^3t^3. Если $t > 1$, то,