

Г. Ф. Лаптев

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	29
§ 1. Структурные формы пространства представления группы Ли	30
§ 2. Касательные элементы	32
§ 3. Распределения m -мерных касательных элементов	35
§ 4. Объект неголономности	36
§ 5. Голономные распределения	38
§ 6. Линии, принадлежащие распределению	41
§ 7. Распределения, отнесенные к частично канонизированному ре- перу	42
§ 8. Распределения в пространстве со связностью	44
Цитированная литература	47

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается n -мерное пространство представления какой-либо группы Ли.

Если, например, отправляться от проективной группы, то таким пространством может быть соответствующее точечное проективное пространство, многообразие прямых в нем и т. д.

Каждое m -мерное подмногообразие, проходящее через фиксированную точку (образующий элемент пространства), порождает в этой точке фундаментальный геометрический объект первого порядка. Этот объект (включающий соответствующую точку) мы будем называть m -мерным касательным элементом. С каждой точкой связывается, следовательно, пучок таких элементов.

Поле, сопоставляющее каждой точке пространства один из соответствующих ей элементов, называется неголономным многообразием или распределением касательных элементов.

Распределение порождает последовательность своих фундаментальных геометрических объектов, образующих базу для построения дифференциальной геометрии распределения.

Распределению ставится в соответствие некоторая вспомогательная система $n-m$ пфаффовых уравнений (система, ассоциированная с распределением). Дается инвариантный признак инволютивности (голономности) распределения. Когда распределение голономно, ассоциированная система становится вполне интегрируемой и определяет $(n-m)$ -параметрическое семейство m -мерных подмногообразий, «оггибающих» элементы распределения.

В общем случае из всех кривых пространства выделяется класс кривых (кривых, принадлежащих распределению), которые являются одномерными интегральными многообразиями ассоциированной системы.

Заметим, что распределения плоских элементов (неголономные многообразия) уже давно изучались с различных точек зрения многими геометрами (Врэнчану, Бомпьяни, Д. М. Синцов, В. В. Вагнер, С. С. Бюшгенс и др.). В настоящей статье рассмотрены в инвариантной аналитической форме исходные понятия геометрии распределений касательных элементов в однородных пространствах и в пространствах фундаментально-групповой связности с произвольным образующим элементом. Статья примыкает к докладу В. И. Ближникаса и К. И. Гринцевичюса [1] и является развитием одного из тезисов докладов автора [3], [4].

Рассмотрения имеют локальный характер. Все встречающиеся функции считаются аналитическими.

§ 1. СТРУКТУРНЫЕ ФОРМЫ ПРОСТРАНСТВА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛИ

Пусть задана r -мерная группа Ли G с базисными инвариантными формами ω^A . Эти формы удовлетворяют структурным уравнениям Э. Картана

$$D\omega^A = \frac{1}{2} C_{BC}^A \omega^B \wedge \omega^C \quad (1.1).$$

$$(A, B, C = 1, \dots, r),$$

где C_{BC}^A — структурные константы группы G , связанные известными тождествами

$$C_{(BC)}^A = 0, \quad (1.2)$$

$$C_{E(B}^A C_{CD)}^E = 0. \quad (1.3)$$

Мы будем рассматривать n -мерное представление группы G . Вполне интегрируемую систему дифференциальных

уравнений этого представления

$$dX^J - \xi_A^J(X) \omega^A = 0 \quad (1.4)$$

$$(J, K, L = 1, \dots, n)$$

мы будем истолковывать, как систему уравнений неподвижности образующего элемента (точки) пространства представления с относительными координатами X^J .

Условием полной интегрируемости дифференциальных уравнений представления (1.4) является выполнение тождеств Ли

$$\frac{\partial \xi_A^J}{\partial X^K} \xi_B^K - \frac{\partial \xi_B^J}{\partial X^K} \xi_A^K = \xi_C^J C_{AB}^C. \quad (1.5)$$

Формы Θ^J , являющиеся левыми частями уравнений представления (1.4), мы будем называть структурными формами рассматриваемого пространства представления (пространства $\{\Theta^J\}$) или структурными формами объекта $\{X^J\}$:

$$\Theta^J \stackrel{\text{def}}{=} dX^J - \xi_A^J(X) \omega^A. \quad (1.6)$$

Такие формы с их дифференциальными продолжениями применяет В. С. Малаховский в своей теории многообразий фигур [6].

Продифференцировав внешним образом формы (1.6) и воспользовавшись уравнениями (1.5), мы получим следующие структурные уравнения, которым должны удовлетворять формы Θ^J :

$$D\Theta^J = \Theta^K \wedge \Theta_K^J, \quad (1.7)$$

где

$$\Theta_K^J = -\frac{\partial \xi_A^J}{\partial X^K} \omega^A. \quad (1.8)$$

Продолжение уравнений (1.7) дает структурные уравнения для форм Θ_K^J :

$$D\Theta_K^J = \Theta_K^L \wedge \Theta_L^J + \Theta^L \wedge \Theta_{KL}^J, \quad (1.9)$$

причем, учитывая уравнения (1.8), получаем для форм Θ_{KL}^J выражения

$$\Theta_{KL}^J = \Theta_{LK}^J = -\frac{\partial^2 \xi_A^J}{\partial X^K \partial X^L} \omega^A. \quad (1.10)$$

Замечание. Для продолженных форм Θ_K^J , Θ_{KL}^J мы взяли лишь их канонические выражения (1.8) и (1.10). Их

общие выражения будут содержать новые переменные, так, например,

$$\Theta_K^J = -\frac{\partial \xi_A^J}{\partial X^K} \omega^A + X_{KL}^J \Theta^L, \quad (1.11)$$

где

$$X_{KL}^J = X_{LK}^J. \quad (1.12)$$

Структурные формы Θ^J , как следует из уравнений (1.7), образуют вполне интегрируемую систему n линейно независимых форм и (локально) являются линейными комбинациями дифференциалов своих n первых независимых интегралов u^J :

$$\Theta^J = u_K^J du^K. \quad (1.13)$$

Систему n интегралов u^J можно считать системой локальных абсолютных координат точки рассматриваемого пространства представления (геометрического объекта $\{X^J\}$), так как при их фиксации ($u^J = C^J$) получаем $\Theta^J = 0$, т. е. приходим к уравнениям (1.4), выражающим условие неподвижности точки пространства представления.

Заметим в заключение, что система структурных форм Θ^J пространства представления характеризуется полностью двумя условиями. Во-первых, эти формы Θ^J имеют строение, определенное формулой (1.6):

$$\Theta^J = dX^J - \xi_A^J(X^1, \dots, X^n) \omega^A.$$

Во-вторых, эта система форм вполне интегрируема, т. е. подчинена уравнениям (1.7):

$$D\Theta^J = \Theta^K \wedge \Theta_K^J$$

§ 2. КАСАТЕЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

В пространстве представления $\{\Theta^J\}$ рассмотрим m -мерное погруженное многообразие. Его можно (локально) определить системой параметрических уравнений

$$u^J = f^J(t^1, \dots, t^m), \quad (2.1)$$

где u^J — абсолютные координаты образующего элемента пространства, а t^1, \dots, t^m — параметры.

Вычислив из (2.1) дифференциалы du^J и подставив их в структурные формы (1.13), получим

$$\Theta^J = u_K^J \frac{\partial f^K}{\partial t^i} dt^i$$

$$(i = 1, \dots, m).$$

Исключив из этих уравнений дифференциалы параметров t^i , мы получим дифференциальные уравнения погруженного многообразия, при надлежащей нумерации форм Θ^J , в следующей инвариантной непараметрической форме:

$$\Theta^\alpha = \Lambda_k^\alpha \Theta^k, \quad (2.2)$$

причем здесь и в дальнейшем считается, что

$$i, j, k = 1, \dots, m;$$

$$\alpha, \beta, \gamma = m + 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

$$J, K, L = 1, \dots, m, m + 1, \dots, n.$$

Внешнее дифференцирование уравнений (2.2) при помощи структурных уравнений (1.7) дает

$$\Theta^K \wedge \Theta_K^\alpha = d\Lambda_k^\alpha \wedge \Theta^k + \Lambda_j^\alpha \Theta^j \wedge \Theta_K^\alpha. \quad (2.4)$$

Подставив сюда формы Θ^α из уравнений (2.2), получим

$$\Delta \Lambda_j^\alpha \wedge \Theta^j = 0, \quad (2.5)$$

где

$$\Delta \Lambda_j^\alpha = d\Lambda_j^\alpha - \Lambda_k^\alpha \Theta_j^k + \Lambda_j^\beta \Theta_\beta^\alpha - \Lambda_j^\beta \Lambda_k^\alpha \Theta_\beta^k + \Theta_j^\alpha. \quad (2.6)$$

Заметим, что систему (2.2) с присоединенными к ней замыкающими уравнениями (2.5) можно также рассматривать как систему дифференциальных уравнений, определяющую m -мерное погруженное многообразие. Эта система в инволюции и локально определяет m -мерные интегральные многообразия с произволом $n - m$ произвольных функций от m аргументов.

Для нас основное значение имеет тот факт, что уравнения (2.5), замыкающие систему (2.2), естественным образом определяют строение форм (2.6), причем эти формы определяются однозначно, если отвлечься от возможности добавлять линейные комбинации с симметричными коэффициентами, составленные из форм Θ^k .

Мы встанем теперь на новую точку зрения. Формы $\Delta \Lambda_j^\alpha$ полученного вида (2.6) мы будем рассматривать независимо

от породившего их подмногообразия, т. е. без предположения, что уравнения (2.2), (2.5) выполняются. Тогда все формы (1.6) и (2.6) будут линейно независимыми между собой.

Теорема 2.1. Система пфаффовых форм Θ^j , $\Delta\Lambda_j^\alpha$ (см. (1.4) и (2.6)) является системой структурных форм некоторого геометрического объекта Θ^j , $\Delta\Lambda_j^\alpha$ (m -мерного касательного элемента).

Доказательство. Продифференцировав внешним образом формы (2.6), получим

$$\begin{aligned} D\Delta\Lambda_j^\alpha &= -d\Lambda_k^\alpha \wedge \Theta_j^k - \Lambda_k^\alpha D\Theta_j^k + \\ &+ d\Lambda_j^\beta \wedge \Theta_\beta^\alpha + \Lambda_j^\beta D\Theta_\beta^\alpha - d\Lambda_k^\alpha \Lambda_j^\beta \wedge \Theta_\beta^k - \\ &- \Lambda_k^\alpha d\Lambda_j^\beta \wedge \Theta_\beta^k - \Lambda_k^\alpha \Lambda_j^\beta D\Theta_\beta^k + D\Theta_j^\alpha. \end{aligned}$$

На основании уравнений (2.6) и (1.9) отсюда находим

$$\begin{aligned} D\Delta\Lambda_j^\alpha &= \Theta_j^k \wedge \Delta\Lambda_k^\alpha - \Theta_\beta^\alpha \wedge \Delta\Lambda_j^\beta + \Lambda_j^\beta \Theta_\beta^k \wedge \Delta\Lambda_k^\alpha + \\ &+ \Lambda_k^\alpha \Theta_\beta^k \wedge \Delta\Lambda_j^\beta + \Theta^K \wedge (\Lambda_j^\beta \Theta_{\beta K}^\alpha - \Lambda_l^\alpha \Theta_{jK}^l - \\ &- \Lambda_j^\beta \Lambda_l^\alpha \Theta_{\beta K}^l + \Theta_{jK}^\alpha). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из уравнений (1.7) и (2.7) следует, что формы Θ^j и $\Delta\Lambda_j^\alpha$ образуют вполне интегрируемую систему форм.

С другой стороны, в силу уравнений (1.8), формы $\Delta\Lambda_j^\alpha$, определенные уравнениями (2.4), принимают вид

$$\Delta\Lambda_j^\alpha = d\Lambda_j^\alpha + \left(\Lambda_k^\alpha \frac{\partial \xi_A^k}{\partial X^j} - \Lambda_j^\beta \frac{\partial \xi_A^\alpha}{\partial X^\beta} + \Lambda_j^\beta \Lambda_k^\alpha \frac{\partial \xi_A^k}{\partial X^\beta} - \frac{\partial \xi_A^\alpha}{\partial X^j} \right) \omega^A. \quad (2.8)$$

Итак, мы видим, что формы Θ^j , $\Delta\Lambda_j^\alpha$ имеют вид, присущий структурным формам представления

$$\begin{aligned} \Theta^j &= dX^j - \xi_A^j(X) \omega^A, \\ \Delta\Lambda_j^\alpha &= d\Lambda_j^\alpha - \xi_{jA}^\alpha(X, \Lambda) \omega^A, \end{aligned} \quad (2.9)$$

и образуют вполне интегрируемую систему форм. Следовательно, эти формы действительно являются структурными формами некоторого представления группы G и теорема доказана.

Замечание 1. Таким образом, первые интегралы вполне интегрируемой системы форм Θ^j , $\Delta\Lambda_j^\alpha$ можно рассматривать как абсолютные координаты некоторого геометрического

объекта. При фиксации этих координат формы Θ^J и $\Delta\Lambda_j^\alpha$ обращаются в нуль. Получающиеся при этом уравнения

$$\Theta^J = 0, \quad \Delta\Lambda_j^\alpha = 0$$

являются уравнениями, определяющими закон преобразования относительных координат X^J , Λ_j^α геометрического объекта при преобразованиях репера.

Замечание 2. Формы Θ^J образуют самостоятельную подсистему структурных форм. Следовательно, геометрический объект $\{X^J, \Lambda_j^\alpha\}$ имеет подобъект $\{X^J\}$ и разложения форм Θ^J и $\Delta\Lambda_j^\alpha$ по дифференциалам их первых интегралов u^J , u_j^α имеют вид

$$\begin{aligned} \Theta^J &= u_K^J du^K, \\ \Delta\Lambda_j^\alpha &= u_{jK}^\alpha du^K + u_{j\beta}^{\alpha k} du_k^\beta. \end{aligned} \quad (2.10)$$

§ 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ m -МЕРНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Геометрический объект со структурными формами (1.6), (2.6) мы будем называть касательным элементом.

Многообразие касательных элементов $\{\Theta^J, \Delta\Lambda_j^\alpha\}$ является расслоенным пространством, базой которого служит исходное пространство $\{\Theta^J\}$, а слоями — пучки касательных элементов, соответствующие точкам базы.

Будем говорить, что определено распределение элементов $\{\Theta^J, \Delta\Lambda_j^\alpha\}$ в исходном пространстве $\{\Theta^J\}$, если каждой точке пространства поставлен в соответствие один из элементов пучка, связанного с этой точкой.

Иначе говоря, распределение касательных элементов является сечением в расслоенном пространстве этих элементов.

На таком распределении абсолютные координаты u^J , u_j^α элемента будут функциями (по предположению аналитическими) от абсолютных координат u^J точки исходного пространства

$$u_j^\alpha = f_j^\alpha(u^1, \dots, u^n). \quad (3.1)$$

Продифференцировав эти уравнения, связывающие u^J , u_j^α , мы получим

$$du_j^\alpha = \frac{\partial f_j^\alpha}{\partial u^L} du^L,$$

или, в силу (2.10),

$$\Delta \Lambda_j^\alpha = M_{jK}^\alpha \Theta^K, \quad (3.2)$$

или в развернутом виде

$$d\Lambda_j^\alpha - \Lambda_k^\alpha \Theta_j^k + \Lambda_j^\beta \Theta_\beta^\alpha - \Lambda_k^\alpha \Lambda_j^\beta \Theta_\beta^k + \Theta_j^\alpha = M_{jK}^\alpha \Theta^K. \quad (3.3)$$

Эта система уравнений (3.2) или (3.3) является системой уравнений распределения. Если считать u^j независимыми переменными, а все остальные переменные, входящие в систему (3.2), — неизвестными функциями, то система (3.2) в инволюции и определяет распределение (3.1) с надлежащим произволом $((n-m)t$ функций от n аргументов).

Система (3.2) может рассматриваться так же, как система дифференциальных уравнений n -мерного многообразия, погруженного в $n+m(n-m)$ -мерное пространство элементов $\{\Theta^j, \Delta \Lambda_j^\alpha\}$.

Система (3.2) — правильно продолжаемая (как пфафова система уравнений погруженного многообразия). Ее продолжения дают последовательность геометрических объектов $M_{kL}^\alpha, M_{kJ, J_2}^\alpha, \dots$, определяющих дифференциальную геометрию распределения.

§ 4. ОБЪЕКТ НЕГОЛОНОМНОСТИ

Продолжение системы дифференциальных уравнений распределения (3.2) дает

$$dM_{kL}^\alpha - M_{kL}^\alpha \Theta_J^L - M_{iL}^\alpha \Theta_k^i + M_{kJ}^\beta \Theta_\beta^\alpha - M_{kL}^\beta \Lambda_i^\alpha \Theta_\beta^i - M_{iL}^\alpha \Lambda_k^\beta \Theta_\beta^i + \\ + \Lambda_k^\beta \Theta_{\beta J}^\alpha - \Lambda_i^\alpha \Theta_{kL}^i - \Lambda_k^\beta \Lambda_i^\alpha \Theta_{\beta J}^i + \Theta_{kJ}^\alpha = M_{kJL}^\alpha \Theta^L. \quad (4.1)$$

Распишем эту систему более подробно:

$$dM_{jk}^\alpha - M_{jk}^\alpha \Theta_k^i - M_{j\beta}^\alpha \Theta_k^\beta - M_{ik}^\alpha \Theta_j^i + M_{jk}^\beta \Theta_\beta^\alpha - M_{jk}^\beta \Lambda_i^\alpha \Theta_\beta^i - \\ - M_{ik}^\alpha \Lambda_j^\beta \Theta_\beta^i + \Lambda_j^\beta \Theta_{\beta k}^\alpha - \Lambda_i^\alpha \Theta_{jk}^i - \Lambda_j^\beta \Lambda_i^\alpha \Theta_{\beta k}^i + \Theta_{jk}^\alpha = M_{jkL}^\alpha \Theta^L, \quad (4.2)$$

$$dM_{j\beta}^\alpha - M_{j\beta}^\alpha \Theta_\beta^i - M_{j\gamma}^\alpha \Theta_\beta^\gamma - M_{i\beta}^\alpha \Theta_j^i + M_{j\beta}^\gamma \Theta_\gamma^\alpha - M_{i\beta}^\gamma \Lambda_i^\alpha \Theta_\gamma^i - \\ - M_{i\beta}^\alpha \Lambda_j^\gamma \Theta_\gamma^i + \Lambda_j^\gamma \Theta_{\beta\gamma}^\alpha - \Lambda_i^\alpha \Theta_{j\beta}^i - \Lambda_j^\gamma \Lambda_i^\alpha \Theta_{\beta\gamma}^i + \Theta_{j\beta}^\alpha = M_{j\beta L}^\alpha \Theta^L. \quad (4.3)$$

Из компонент $\Lambda_j^\alpha, M_{jk}^\alpha, M_{j\beta}^\alpha$ мы образуем теперь следующую систему величин:

$$\tilde{M}_{jk}^\alpha = M_{jk}^\alpha + M_{j\beta}^\alpha \Lambda_k^\beta. \quad (4.4)$$

На основании уравнений (3.3), (4.2), (4.3) получаем, что величины \tilde{M}_{jk}^α удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & d\tilde{M}_{jk}^\alpha - \tilde{M}_{jl}^\alpha \Theta_k^l - \tilde{M}_{lk}^\alpha \Theta_j^l + \tilde{M}_{jk}^\beta \Theta_\beta^\alpha - \\ & - \tilde{M}_{jk}^\beta \Lambda_l^\alpha \Theta_\beta^l - (\tilde{M}_{jl}^\alpha \Lambda_k^\beta + \tilde{M}_{lk}^\alpha \Lambda_j^\beta) \Theta_\beta^l + \Theta_j^\alpha - \Lambda_l^\alpha \Theta_{jk}^l + \\ & + \Lambda_j^\beta \Lambda_k^\gamma (\Theta_{\beta\gamma}^\alpha - \Lambda_l^\alpha \Theta_{\beta\gamma}^l) + \Lambda_j^\beta (\Theta_{\beta k}^\alpha - \Lambda_l^\alpha \Theta_{\beta k}^l) + \\ & + \Lambda_k^\beta (\Theta_{\beta j}^\alpha - \Lambda_l^\alpha \Theta_{\beta j}^l) = (M_{jR}^\alpha \Lambda_k^R + \Lambda_k^\beta M_{j\beta L}^R + M_{j\beta}^\alpha M_{kL}^\beta) \Theta^L. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Мы видим, что система величин X^J , Λ_j^α , \tilde{M}_{jk}^α образует самостоятельный объект.

Заметим, что объект $\{X^J, \Lambda_j^\alpha, \tilde{M}_{jk}^\alpha\}$ может рассматриваться как аналог фундаментального объекта второго порядка погруженного многообразия, определенного системой дифференциальных уравнений (2.2). Этим объясняется то обстоятельство, что некоторым геометрическим фактам геометрии распределения соответствуют аналогичные факты геометрии подмногообразия (2.2).

Теперь мы исключим из уравнений (4.5) трехиндексные формы Θ_{KL}^J . С этой целью достаточно проальтернировать эти уравнения по индексам j, k . В результате мы получим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \Delta H_{jk}^{\alpha \text{ def}} = & dH_{jk}^\alpha - H_{jl}^\alpha \Theta_k^l - H_{lk}^\alpha \Theta_j^l + H_{jk}^\beta \Theta_\beta^\alpha + H_{jk}^\beta \Lambda_l^\alpha \Theta_\beta^l - \\ & - (H_{jl}^\alpha \Lambda_k^\beta \Theta_\beta^l - H_{kl}^\alpha \Lambda_j^\beta \Theta_\beta^l) = H_{jkl}^\alpha \Theta^L, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$H_{jk}^\alpha = -H_{kj}^\alpha = M_{jk}^\alpha - M_{kj}^\alpha + M_{j\beta}^\alpha \Lambda_k^\beta - M_{k\beta}^\alpha \Lambda_j^\beta. \quad (4.7)$$

Из дифференциальных уравнений (4.6), (3.3), (1.6) следует, что совокупность величин X^J , Λ_j^α , H_{jk}^α образует геометрический объект. Этот объект называется объектом неголомности.

Заметим, что совокупность компонент H_{jk}^α не образует самостоятельного геометрического объекта. Однако левые части дифференциальных уравнений (4.6) для этих компонент линейны и однородны относительно этих компонент и их дифференциалов. Поэтому тождественное равенство нулю всех компонент H_{jk}^α имеет инвариантный смысл. Совокупность компонент H_{jk}^α мы будем называть «усеченным объектом» неголомности.

Распределение (3.3) называется голономным в некоторой области пространства Θ^j , если в этой области равны нулю все компоненты H_{jk}^α усеченного объекта неголономности (4.7):

$$H_{jk}^{\alpha \text{ def}} = M_{jk}^\alpha - M_{kj}^\alpha + M_{j\beta}^\alpha \Lambda_k^\beta - M_{k\beta}^\alpha \Lambda_j^\beta = 0. \quad (4.8)$$

Ниже мы выясним смысл этого условия.

§ 5. ГОЛОНОМНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Мы будем исходить из того, что в исходном пространстве $\{\Theta^j\}$ определено распределение элементов $\{\Theta^j, \Delta\Lambda_j^\alpha\}$ и система дифференциальных уравнений распределения (3.3) удовлетворяется:

$$\Delta\Lambda_j^{\alpha \text{ def}} = d\Lambda_j^\alpha - \Lambda_k^\alpha \Theta_j^k + \Lambda_j^\beta \Theta_\beta^\alpha - \Lambda_j^\beta \Lambda_k^\alpha \Theta_\beta^k + \Theta_j^\alpha = M_{jK}^\alpha \Theta^K. \quad (5.1)$$

При этом условии рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\Theta^\alpha = \Lambda_j^\alpha \Theta^j, \quad (5.2)$$

Эту систему дифференциальных уравнений (5.2) мы будем называть системой, ассоциированной с заданным распределением (5.1). Она имеет то же строение, что и система уравнений (2.2) m -мерного погруженного многообразия, породившая формы $\Delta\Lambda_j^\alpha$ образующего элемента рассматриваемого распределения (5.1).

Внешнее дифференцирование уравнений (5.2) ассоциированной системы с использованием самих этих уравнений дает

$$\Delta\Lambda_j^\alpha \wedge \Theta^j = 0. \quad (5.3)$$

Таким образом, имеют одинаковое строение не только системы (2.2) и (5.2), но и их замыкания (2.5) и (5.3).

Однако, несмотря на внешнее сходство систем (2.2), (2.5) и (5.2), (5.3), они рассматриваются в совершенно различных аспектах.

В § 2 система (2.2), (2.5) рассматривается, в частности, как система, определяющая m -мерное погруженное многообразие. В этом случае формы $\Delta\Lambda_k^\alpha$ вместе с формами Θ^k, Θ^α включаются в линейный базис кольца дифференциалов независимых переменных и неизвестных функций. Никаких соотношений, кроме уравнений (2.2) и (2.5), на них не накладывается. Система оказывается в инволюции и определяет

m -мерное интегральное многообразие с функциональным произволом.

Совсем другая ситуация складывается в настоящем § 5 при рассмотрении ассоциированной системы (5.2): формы $\Delta\Lambda_j^\alpha$ -входящие в замыкающие уравнения (5.3), оказываются априори определенными заданным распределением (5.1). В этом случае вопрос о наличии m -мерных интегральных многообразий системы (5.2), (5.3) должен быть рассмотрен особо.

Так как распределение задано и уравнения (5.1) предполагаются выполненными, то уравнения (5.3) принимают вид

$$M_{jK}^\alpha \Theta^K \wedge \Theta^J = 0.$$

Подставив сюда выражения форм Θ^α из исходной системы (5.2), получим

$$(M_{jk}^\alpha + M_{j\beta}^\alpha \Delta_k^\beta) \Theta^k \wedge \Theta^j = 0$$

или, в силу определения (4.8) компонент H_{jk}^α объекта неголономности,

$$H_{jk}^\alpha \Theta^j \wedge \Theta^k = 0. \quad (5.4)$$

Если в некоторой области исходного пространства $H_{jk}^\alpha \neq 0$ то система (5.4) на любом m -мерном подмногообразии в этой области не будет удовлетворяться. Следовательно, система (5.2) не будет допускать m -мерных решений. Если же в некоторой связной области исходного пространства $H_{jk}^\alpha \equiv 0$, то замыкающие уравнения (5.4) будут тождественно удовлетворены, а это означает, что система (5.2) будет вполне интегрируемой. В этом случае через каждую точку некоторой области исходного пространства будет проходить одно m -мерное интегральное многообразие. При этом из самой конструкции ассоциированной системы следует, что получающиеся интегральные многообразия будут «оггибать» элементы распределения.

Теорема 5.1. Если в некоторой области пространства $\{\Theta^j\}$ компоненты усеченного объекта неголономности (4.7) не все равны нулю, то в этой области система (5.2), ассоциированная с распределением (5.1), не имеет m -мерных интегральных многообразий (распределение неголономное).

Если же в некоторой связной области пространства $\{\Theta^j\}$ все компоненты усеченного объекта неголономности (4.7) равны нулю тождественно, то в этой области ассоциированная система (5.2) вполне интегрируемая, через каждую точку области проходит одно m -мерное интегральное многообразие, в каждой точке которого касательным элементом является

соответствующий элемент распределения (распределение голономное).

З а м е ч а н и е. При наличии распределения (5.1) система форм

$$\tilde{\Theta}^\alpha = \Theta^\alpha - \Lambda_k^\alpha \Theta^k, \quad (5.5)$$

приравнивание нулю которых дает систему (5.2), ассоциированную с распределением (5.1), будет относительно инвариантной, если

$$\delta \tilde{\Theta}^\alpha = \tilde{\Theta}^\beta \Phi_\beta^\alpha(\delta), \quad (5.6)$$

где δ — оператор дифференцирования по вторичным параметрам при фиксированных главных параметрах:

$$\Theta^J(\delta) = 0, \quad (5.7)$$

$\Phi_\beta^\alpha(\delta)$ — некоторые пфаффовы формы относительно вторичных параметров.

Необходимым и достаточным условием относительной инвариантности форм $\tilde{\Theta}^\alpha$ является выполнение уравнений распределения вида (5.1).

Действительно, из структурных уравнений (1.7) находим

$$\delta \Theta^J = -\Theta^k \Theta_{JK}^J(\delta). \quad (5.8)$$

В силу этого получаем

$$\delta \tilde{\Theta}^\alpha = -\Theta^L \Theta_L^\alpha(\delta) - \delta \Lambda_k^\alpha \Theta^k + \Lambda_k^\alpha \Theta^L \Theta_L^k(\delta),$$

но

$$\Theta^\alpha = \tilde{\Theta}^\alpha + \Lambda_k^\alpha \Theta^k,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\Theta}^\alpha = & -\tilde{\Theta}^\beta [\Theta_\beta^\alpha(\delta) - \Lambda_k^\alpha \Theta_\beta^k(\delta)] - \\ & - \Theta^k [\delta \Lambda_k^\alpha - \Lambda_i^\alpha \Theta_k^i(\delta) + \Lambda_k^\beta \Theta_\beta^\alpha(\delta) - \Lambda_i^\alpha \Lambda_k^\beta \Theta_\beta^i(\delta) + \Theta_k^\alpha(\rho)] \end{aligned} \quad (5.9)$$

С другой стороны, из дифференциальных уравнений распределения (5.1) следует

$$\delta \Lambda_k^\alpha - \Lambda_i^\alpha \Theta_k^i(\delta) + \Lambda_k^\beta \Theta_\beta^\alpha(\delta) - \Lambda_i^\alpha \Lambda_k^\beta \Theta_\beta^i(\delta) + \Theta_k^\alpha(\rho) = 0. \quad (5.10)$$

Поэтому уравнения (5.9) принимают вид

$$\delta \tilde{\Theta}^\alpha = \tilde{\Theta}^\beta [\Lambda_k^\alpha \tilde{\Theta}_\beta^k(\delta) - \Theta_\beta^\alpha(\delta)]. \quad (5.11)$$

Таким образом условие (5.6) относительной инвариантности системы форм (5.5) действительно выполняется.

Обратно, требование относительной инвариантности априори заданной системы форм (5.5) в силу уравнений (5.9) приводит к уравнениям (5.10), т. е. к уравнениям распределения (5.1).

§ 6. ЛИНИИ, ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ

Пусть в исходном пространстве $\{\Theta^J\}$ по-прежнему определено распределение (5.1)

$$\Delta \Lambda_j^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} d\Lambda_j^\alpha - \Lambda_k^\alpha \Theta_j^k + \Lambda_j^\beta \Theta_\beta^\alpha - \Lambda_j^\beta \Lambda_k^\alpha \Theta_\beta^k + \Theta_j^\alpha = M_{jK}^\alpha \Theta^K.$$

Будем рассматривать в этом пространстве $\{\Theta^J\}$ всевозможные линии

$$u^J = u^J(t). \quad (6.1)$$

Система дифференциальных уравнений любой такой линии имеет вид

$$\Theta^J = \rho^J \theta, \quad (6.2)$$

где θ — параметрическая форма:

$$D\theta = \theta \wedge \theta_1. \quad (6.3)$$

Продолжение системы (6.2) дает

$$d\rho^J + \rho^K \Theta_K^J - \rho^J \theta_1 = \rho_1^J \theta \quad (6.4)$$

или, в более подробной записи,

$$\begin{aligned} d\rho^\alpha + \rho^\beta \Theta_\beta^\alpha + \rho^k \Theta_k^\alpha - \rho^\alpha \theta_1 &= \rho_1^\alpha \theta, \\ d\rho^j + \rho^k \Theta_k^j + \rho^\beta \Theta_\beta^j - \rho^j \theta_1 &= \rho_1^j \theta. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Объект $\{X^J, \rho^J\}$ является фундаментальным объектом первого порядка рассматриваемой линии.

Из всего множества линий в пространстве $\{\Theta^J\}$ мы выделим теперь линии, принадлежащие распределению (5.1). Так, мы будем называть линией (6.2), если она является одномерным интегральным многообразием системы (5.2), ассоциированной с распределением (5.1).

Для таких линий дифференциальные уравнения ассоциированной системы (5.2) и замыкающие ее уравнения (5.4) должны удовлетворяться в силу системы дифференциальных уравнений линии (6.2). Что касается уравнений (5.4), то они тождественно удовлетворяются при подстановке форм Θ^J из (6.2):

$$H_{jK}^\alpha \rho^j \rho^k \theta \wedge \theta \equiv 0.$$

При подстановке же Θ^α , Θ^k из (6.2) в (5.2) получим

$$(\rho^\alpha - \Lambda_k^\alpha \rho^k) \theta = 0,$$

или

$$\rho^\alpha - \Lambda_k^\alpha \rho^k = 0. \quad (6.6)$$

Это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы линия (6.2) принадлежала распределению.

Заметим, что величины

$$\tilde{\rho}^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \rho^\alpha - \Lambda_j^\alpha \rho^j \quad (6.7)$$

образуют вместе с величинами X^j , Λ_j^α геометрический объект (точнее псевдообъект). Действительно, как следует из уравнений (6.2), (6.5) и (5.1), дифференциальные уравнения для этих величин $\tilde{\rho}^\alpha$ имеют вид

$$d\tilde{\rho}^\alpha + \tilde{\rho}^\beta \Theta_\beta^\alpha + \Lambda_j^\alpha \tilde{\rho}^\beta \Theta_\beta^j - \tilde{\rho}^\alpha \theta_1 = \tilde{\rho}^\alpha \theta. \quad (6.8)$$

Этот объект $\{X^j, \Lambda_j^\alpha, \tilde{\rho}^\alpha\}$ мы назовем объектом трансверсальности линии по отношению к распределению.

Обратим внимание на то обстоятельство, что левые части уравнений (6.8) линейны и однородны относительно компонент $\tilde{\rho}^\alpha$ и их дифференциалов $d\tilde{\rho}^\alpha$. Поэтому равенство нулю всех компонент $\tilde{\rho}^\alpha$ имеет инвариантный смысл. Совокупность компонент $\tilde{\rho}^\alpha$ объекта трансверсальности $\{X^j, \Lambda_j^\alpha, \tilde{\rho}^\alpha\}$ мы назовем усеченным объектом трансверсальности.

Итак, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 6.1. Линия (6.2) в пространстве $\{\Theta^j\}$ принадлежит заданному распределению (5.1), т. е. является интегральным многообразием ассоциированной системы (5.2) тогда и только тогда, когда на линии равны нулю компоненты $\tilde{\rho}^\alpha$ усеченного объекта трансверсальности

$$\tilde{\rho}^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \rho^\alpha - \Lambda_j^\alpha \rho^j = 0. \quad (6.9)$$

§ 7. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ОТНЕСЕННЫЕ К ЧАСТИЧНО КАНОНИЗИРОВАННОМУ РЕПЕРУ

Весьма типичным является случай, когда возможно выполнить две следующие канонизации подвижного репера.

Во-первых, можно привести к постоянным значениям все относительные компоненты X^j образующего элемента исходного пространства представления $\{\Theta^j\}$. Тогда структурные

формы Θ^J этого пространства становятся инвариантными формами группы G , определяющими стационарную подгруппу образующего элемента пространства (их обращение в нуль определяет эту подгруппу).

Во-вторых, на погруженном многообразии

$$\Theta^\alpha = \Lambda_k^\alpha \Theta^k$$

за счет вторичных форм

$$\Theta_k^\alpha = - \frac{\partial \xi_A^\alpha}{\partial X^k} \omega^A$$

можно привести к нулю все относительные компоненты Λ_k^α фундаментального объекта первого порядка:

$$\Lambda_k^\alpha = 0. \quad (7.1)$$

Тогда дифференциальные уравнения погруженного многообразия приведутся к виду

$$\Theta^\alpha = 0. \quad (7.2)$$

В большинстве случаев выполнимы одновременно обе упомянутые канонизации. Однако ниже мы ограничимся предположением, что выполнима лишь вторая канонизация.

Итак, мы будем предполагать, что система дифференциальных уравнений погруженного многообразия имеет вид (7.2). Внешнее дифференцирование этих уравнений (7.2) дает

$$\Theta^k \wedge \Theta_k^\alpha = 0. \quad (7.3)$$

Согласно теореме 2.1 система форм Θ^J , Θ_k^α является вполне интегрируемой и может рассматриваться как система структурных форм многообразия касательных элементов, порожденных погруженными многообразиями с уравнениями типа (7.2).

Система дифференциальных уравнений распределения этих элементов (3.3) принимает вид

$$\Theta_k^\alpha = M_{kL}^\alpha \Theta^L. \quad (7.4)$$

Продолженные уравнения мы получим, положив $\Lambda_k^\alpha = 0$ в уравнениях (4.2), (4.3):

$$dM_{jk}^\alpha - M_{jl}^\alpha \Theta_k^l - M_{ik}^\alpha \Theta_j^l + M_{jk}^\beta \Theta_\beta^\alpha + \Theta_{jk}^\alpha = M_{jkL}^\alpha \Theta^L, \quad (7.5)$$

$$dM_{j\beta}^\alpha - M_{jl}^\alpha \Theta_\beta^l - M_{j\gamma}^\alpha \Theta_\beta^\gamma - M_{j\beta}^\alpha \Theta_j^\gamma + M_{j\beta}^\gamma \Theta_\gamma^\alpha + \Theta_{j\beta}^\alpha = M_{j\beta L}^\alpha \Theta^L. \quad (7.6)$$

Компоненты H_{jk}^α объекта неголономности (4.7) и дифференциальные уравнения (4.6) для них принимают теперь вид

$$H_{jk}^\alpha = M_{jk}^\alpha - M_{kj}^\alpha, \quad (7.7)$$

$$dH_{jk}^\alpha - H_{ji}^\alpha \Theta_k^i - H_{lk}^\alpha \Theta_j^l + H_{jk}^\beta \Theta_\beta^\alpha = H_{jkL}^\alpha \Theta^L. \quad (7.8)$$

Замечание. Так как формы Θ_K^J определяются формулами (1.8):

$$\Theta_K^J = -\frac{\partial \xi_A^J(X)}{dX^K} \omega^A,$$

то из уравнений (7.8) следует, что компоненты H_{jk}^α образуют самостоятельный объект либо, когда объект X^J линейный, либо, когда репер канонизирован дополнительно так, что все компоненты X^J зафиксированы.

Компоненты усеченного объекта трансверсальности (6.7) и дифференциальные уравнения (6.8) для них принимают теперь вид

$$\tilde{\rho}^\alpha = \rho^\alpha,$$

$$d\rho^\alpha + \rho^\beta \Theta_\beta^\alpha - \rho^\alpha \theta_1 = \rho_1^\alpha \theta.$$

Следовательно, кривые, принадлежащие распределению, будут теперь выделяться требованием

$$\rho^\alpha = 0$$

и будут определяться следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\Theta^i = \rho^i \theta,$$

$$\Theta^\alpha = 0.$$

§ 8. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ СО СВЯЗНОСТЬЮ

Пусть имеется пространство с фундаментально групповой связностью [2], определенное базисными формами ϑ^a и словыми формами (формами связности) ω^A , подчиненными структурным уравнениям

$$D\vartheta^a = \vartheta^b \wedge \vartheta_b^a, \quad (8.1)$$

$$D\omega^A = \frac{1}{2} C_{BC}^A \omega^B \wedge \omega^C + R_{bc}^A \vartheta^b \wedge \vartheta^c \quad (8.2)$$

$$(a, b, c = 1, \dots, n; A, B, C = 1, \dots, r).$$

Мы будем рассматривать присоединенное расслоенное пространство с теми же базисными формами ϑ^a и структурными (слоевыми) формами

$$\Theta^J \stackrel{\text{def}}{=} \Delta X^J = dX^J - \xi_A^J(X) \omega^A \quad (8.3)$$

$$(J, K, L = 1, \dots, N),$$

которые образуют вполне интегрируемую систему форм вместе с базисными формами ϑ^a :

$$D\Theta^J = \Theta^K \wedge \left(-\frac{\partial \xi_A^J}{\partial X^K} \omega^A \right) - \xi_A^J R_{bc}^A \vartheta^b \wedge \vartheta^c. \quad (8.4)$$

В присоединенном расслоенном пространстве будем рассматривать сечение, определенное системой дифференциальных уравнений

$$\Theta^J = X_a^J \vartheta^a. \quad (8.5)$$

Ограничимся теперь специальным случаем, когда размерности базы и слоя присоединенного пространства совпадают

$$N = n. \quad (8.6)$$

В этом случае индексы a, b, c и индексы J, K, L пробегают одинаковые значения и систему дифференциальных уравнений сечения (8.5) можно привести к виду

$$\Theta^J = \vartheta^J. \quad (8.7)$$

В этом случае система структурных дифференциальных уравнений (8.1), (8.2) приводится к виду

$$D\Theta^J = \Theta^K \wedge \Theta_K^J, \quad (8.8)$$

$$D\omega^A = \frac{1}{2} C_{BC}^A \omega^B \wedge \omega^C + R_{JK}^A \Theta^J \wedge \Theta^K, \quad (8.9)$$

где

$$\Theta_K^J = -\frac{\partial \xi_A^J}{\partial X^K} \omega^A - \xi_A^J R_{KL}^A \Theta^L. \quad (8.10)$$

Рассмотрим теперь в сечении погруженное многообразие, определенное системой дифференциальных уравнений

$$\Theta^\alpha = \Lambda_k^\alpha \theta^k, \quad (8.11)$$

$$i, j, k = 1, \dots, m; \alpha, \beta, \gamma = m + 1, \dots, N.$$

Внешнее дифференцирование этой системы дает

$$[\Delta\Lambda_k^\alpha + (R_{kL}^\alpha + \Lambda_k^\beta R_{\beta L}^\alpha - \Lambda_i^\alpha R_{kL}^i - \Lambda_i^\alpha \Lambda_k^\beta R_{\beta L}^i) \Theta^L] \wedge \Theta^k = 0, \quad (8.12)$$

где

$$\Delta\Lambda_k^\alpha = d\Lambda_k^\alpha - \Lambda_i^\alpha \Theta_k^i + \Lambda_k^\beta \Theta_\beta^\alpha - \Lambda_i^\alpha \Lambda_k^\beta \Theta_\beta^i + \Theta_k^\alpha. \quad (8.13)$$

Как и в теореме 2.1, легко доказывается, что система форм Θ^J , $\Delta\Lambda_k^\alpha$ — вполне интегрируемая. Приравняв эти формы нулю мы получим на основании уравнений (8.3) и (8.13)

$$dX^J - \xi_A^J(X) \bar{\omega}^A = 0, \quad (8.14)$$

$$d\Lambda_k^\alpha - \Lambda_i^\alpha \bar{\Theta}_k^i + \Lambda_k^\beta \bar{\Theta}_\beta^\alpha - \Lambda_i^\alpha \Lambda_k^\beta \bar{\Theta}_\beta^i + \bar{\Theta}_k^\alpha = 0, \quad (8.15)$$

где, в силу уравнений (8.8), (8.10),

$$D\bar{\omega}^A = \frac{1}{2} C_{BC}^A \bar{\omega}^B \wedge \bar{\omega}^C, \quad (8.16)$$

$$\bar{\Theta}_K^J = -\frac{\partial \xi_A^J(X)}{\partial X^K} \bar{\omega}^{-A}. \quad (8.17)$$

Следовательно формы $\bar{\omega}^A$ становятся инвариантными формами структурной группы, а уравнения (8.14), (8.15) — дифференциальными уравнениями фиксации геометрического объекта $\{\Theta^J, \Delta\Lambda_k^\alpha\}$ в фиксированном слое ассоциированного расслоенного пространства. Таким образом, в каждом слое возникает объект $\{\Theta^J, \Delta\Lambda_k^\alpha\}$ — касательный элемент.

Распределение этих элементов в рассматриваемом присоединенном пространстве определяется системой дифференциальных уравнений вида

$$\Delta\Lambda_k^\alpha = M_{kL}^\alpha \Theta^L,$$

или

$$d\Lambda_k^\alpha - \Lambda_i^\alpha \Theta_k^i + \Lambda_k^\beta \Theta_\beta^\alpha - \Lambda_i^\alpha \Lambda_k^\beta \Theta_\beta^i + \Theta_k^\alpha = M_{kL}^\alpha \Theta^L.$$

В статьях [5], [7], помещенных в настоящем сборнике, рассматривается пространство проективной связности $\mathcal{G}_{n,n}^p$ с n -мерной базой, n -мерными слоями и с точечным образующим элементом. Структурные уравнения (8.8) в этом случае принимают вид

$$D\omega_{\bar{K}}^{\bar{J}} = \omega_{\bar{K}}^{\bar{L}} \wedge \omega_{\bar{L}}^{\bar{J}} + R_{\bar{K}LM}^{\bar{J}} \Theta^L \wedge \Theta^M$$

$$(\bar{J}, \bar{K}, \bar{L} = 0, 1, \dots, n; J, K, L = 1, \dots, n).$$

При этом, если X^J — неоднородные относительные координаты «центра» слоя (образующего элемента присоединенного пространства), то

$$\Theta^J = dX^J + X^K \omega_K^J - X^J \omega_0^0 + X^J X^K \omega_K^0 + \omega_0^J.$$

Репер канонизируется так, что $X^J = 0$, тогда

$$\Theta^J = \omega_0^J.$$

Система уравнений погруженного многообразия, порождающего «касательный элемент», может быть записана в виде

$$\omega_0^\alpha = \Lambda_k^\alpha \omega_0^k.$$

Внешнее дифференцирование этой системы дает

$$[\Delta \Lambda_k^\alpha + (R_{0kL}^\alpha + \Lambda_k^\beta R_{0\beta L}^\alpha - \Lambda_l^\alpha R_{0kL}^l - \Lambda_l^\alpha \Lambda_k^\beta R_{0\beta L}^l) \omega_0^L] \wedge \omega_0^k = 0,$$

где

$$\Delta \Lambda_k^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} d\Lambda_k^\alpha - \Lambda_l^\alpha \omega_k^l + \Lambda_k^\beta \omega_\beta^\alpha - \Lambda_l^\alpha \Lambda_k^\beta \omega_\beta^l + \omega_k^\alpha.$$

Дальнейшая канонизация репера проводится за счет форм ω_k^α так, чтобы $\Lambda_k^\alpha = 0$. Тогда структурными формами касательного элемента будут формы

$$\omega_0^J, \Delta \Lambda_k^\alpha = \omega_k^\alpha.$$

Дифференциальные уравнения распределения (3.3) примут теперь вид

$$\omega_k^\alpha = \tilde{M}_{kL}^\alpha \omega_0^L.$$

Все исследования в упомянутых статьях [5], [7] проводятся в таком частично канонизированном репере (репере нулевого порядка).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Близникас В. И., Гринцевичюс К. И., О неголомомной линейчатой геометрии. Третья Прибалтийская геометрическая конференция. Тезисы докл. 7—12 июня 1968 г. (Вильнюсск. гос. пед. ин-т, Вильнюсск. ун-т). Паланга, 1968, 21—25
2. Лаптев Г. Ф., Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. Тр. 4-го Всес. матем. съезда, 1961. т. 2. Л., «Наука», 1964, 226—233
3. —, К инвариантной аналитической теории дифференцируемых отображений. Тезисы докладов IV Всес. межвуз. конференции по геометрии, Тбилиси, Изд. Тбилисск. ун-та, 1969, 133—134
4. —, Инвариантная аналитическая теория дифференцируемых отображений. Congrès international des mathématiciens, Nice, 1970, 84—85

5. Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М. Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I. Тр. Геометр. семинара. Т. 3, М., ВИНТИ АН СССР, 1971, 49—94
6. Малаховский В. С., Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. Тр. Геометр. семинара, Т. 2, М., ВИНТИ АН СССР, 1969, 179—206
7. Остиану Н. М., Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II. Тр. Геометр. семинара. Т. 3, М., ВИНТИ АН СССР, 1971, 95—114

G. F. Laptev

DISTRIBUTIONS OF TANGENT ELEMENTS

An n -dimensional differentiable manifold is considered, on which a Lie group operates.

As an example, we can take point projective space or line projective space and the projective group operating on it etc.

Any m -dimensional submanifold containing a fixed element of the manifold generates a geometric object (fundamental object of the first order), which we call an m -dimensional tangent element.

Thus a fibre bundle of m -dimensional tangent elements is defined; a cross section of this fibre bundle is called a non-holonomic manifold or a distribution.

The system of differential equations of the distribution written in invariant form (3.3) generates a sequence of fundamental geometrical objects which are used to construct the differential geometry of distribution.

A system (5.2) of differential equations (the associated system of the distribution) is introduced. An invariant condition of holonomy of the distribution is given. For a holonomic distribution the associated system is completely integrable and defines a $(n-m)$ -parametric family of m -dimensional submanifolds envelopped by the elements of the distribution.

In general case the class of curves (curves belonging to the distribution) is invariantly characterized; these curves are the 1-dimensional integral varieties of the associated system.

In § 8 the distributions of tangent elements are considered in spaces with connection and arbitrary generating element.