В.А.Лифшиц

МЕТАМАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТЕОРЕМЫ О ВЕЕРАХ

(Результаты доложены 16 декабря 1971 г.)

Э.Бишоп [1] выдвинул идею метаматематической интерпретации результатов, связанных с понятием свободно становящейся последовательности. Применительно к теореме о веерах ([2] , 3.4.2) такая интерпретация состоит в следующем: если утверждение о том, что функция f переводит каждый элемент данного веера в некоторое натуральное число, доказуемо в формальной системе конструктивного анализа, то значения функции f зависят лишь от N первых членов аргумента, где N — достаточно большое натуральное число. В указанной работе Э.Бишоп утверждает, не приводя доказательства, что такая метатеорема может быть установлена применительно к предложенной им формальной системе Σ . В этой заметке мы докажем аналогичную теорему для одной формальной системы, содержащей принцип конструктивного подбора А.А.Маркова (см. [3]).

§ 1. Язык формальной системы K , которую мы будем рассматривать, совпадает с языком системы интуиционистского анализа С.К.Клини и Р.Е.Весли [4] , с тем лишь отличием, что допустимыми значениями функциональных переменных считаются не свободно становящиеся последовательности, а одноместные общерекурсивные функции. Все не поясняемые далее термины и обозначения, связанные с языком системы K , понимаются как в [4] .

П р е д л о ж е н и е м мы называем произвольную формулу, не содержащую параметров. Формула называется н о р м а л ь н о й , если она не содержит символов $\vee$, $\exists$.

Постулатами системы K являются постулаты групп $A-D$ системы из [4] и аксиома

$$\neg\forall x\,(\alpha(x)=0)\supset\exists x\,(\alpha(x)>0)$$

(принцип А.А.Маркова).

ТЕОРЕМА. Пусть u — функтор, не содержащий параметров, $A(\alpha,b)$ — нормальная формула, содержащая свободно лишь переменные α и b, $B(\alpha)$ обозначает формулу

$$\forall x\,(\alpha(x)\leq u\,(\bar{\alpha}(x))).$$

Если в K доказуемо предложение

$$\forall\alpha_{B(\alpha)}\,\exists b\,A(\alpha,b),$$

то истинно предложение

$$\exists z \forall \alpha_{B(\alpha)} \exists b \forall \gamma_{B(\alpha)} \{\forall x_{x<z} (\gamma(x) = \alpha(x)) \supset A(\gamma, b)\}.$$

Эту формулировку рекомендуется сравнить со схемой * 27.7 из [4], выражающей теорему о веерах.

§ 2. Доказательство основано на использовании некоторой модификации понятия реализуемости из [4]. Существенную роль в доказательстве играет понятие псевдофункции. П с е в д о ф у н к ц и е й назовем произвольное подмножество $\mathfrak{M}$ множества всех пар натуральных чисел, такое что

I) $\mathfrak{M}$ непроблемно относительно множества всех пар натуральных чисел, т.е. является дополнением некоторого подмножества этого множества,

2) для любого натурального $\underline{m}$ множество

$$\{\underline{n} : \langle \underline{m}, \underline{n} \rangle \in \mathfrak{M}\}$$

содержит не более одного элемента и в то же время не является пустым. (Здесь и ниже мы используем подчеркнутые строчные буквы латинского алфавита в качестве метаматематических переменных для натуральных чисел).

Псевдофункции в более общем смысле рассматривались в работе М.Г.Гельфонда [5], где было показано, как можно понимать утверждения, содержащие равенства между термами, в которых наряду с символами для функций употребляются символы для псевдофункций. Проиллюстрируем понимание таких равенств примером: равенство

$$\underline{\varphi}(\underline{m}) = \underline{\psi}(\underline{\chi}(\underline{n}))$$

понимается как утверждение: каковы бы ни были натуральные $\underline{i}$, $\underline{k}$, $\underline{\ell}$, если

$$\langle \underline{m}, \underline{i} \rangle \in \underline{\varphi}, \ \langle \underline{n}, \underline{k} \rangle \in \underline{\chi}, \ \langle \underline{k}, \underline{\ell} \rangle \in \underline{\psi},$$

то $\underline{i} = \underline{\ell}$. (Здесь и в дальнейшем мы используем подчеркнутые строчные буквы греческого алфавита в качестве метаматематических переменных для произвольных псевдофункций).

В работе [5] выясняется, какие средства логического вывода корректны по отношению к указанному пониманию суждений, содержащих символы для псевдофункций. Для нас существенно то обстоятельство, что если ограничиться утверждениями, выражаемыми нормальными формулами, то можно пользоваться аппаратом вывода классического исчисления предикатов с равенством.

Каждой общерекурсивной функции от одной переменной можно естественным образом поставить в соответствие некоторую псевдофункцию – ее график. Мы будем в дальнейшем отождествлять общерекурсивную функцию с соответствующей псевдофункцией.

Н о м е р о м конечной последовательности $\underline{k}_0, \ldots, \underline{k}_{\ell-1}$ натуральных чисел назовем число $p_0^{\underline{k}_0+1} \cdot \ldots \cdot p_{\ell-1}^{\underline{k}_{\ell-1}+1}$, где

$p_0, p_1, \ldots$ – последовательные простые числа. Номер конечной последовательности K будем обозначать посредством $\overline{K}$.

Пусть τ, α – псевдофункции. Рассмотрим множество всех пар $\langle t, z \rangle$ натуральных чисел, таких что каково бы ни было натуральное y, если

$$\tau(\overline{t, \alpha(0), \ldots, \alpha(y-1)}) \neq 0,$$

то

$$\tau(\overline{t, \alpha(0), \ldots, \alpha(y-1)}) = z+1$$

Это множество будем обозначать посредством $\{\tau\}[\alpha]$. Если для любого t множество тех y, для которых

$$\tau(\overline{t, \alpha(0), \ldots, \alpha(y-1)}) \neq 0,$$

содержит не более одного элемента и не является пустым, будем говорить, что выражение $\{\tau\}[\alpha]$ правильно определено; в этом случае $\{\tau\}[\alpha]$ есть, очевидно, псевдофункция. Эти определения рекомендуется сравнить с соответствующими определениями из [4], 8.I. Ясно, что если τ, α –общерекурсивные функции, и $\{\tau\}[\alpha]$ правильно определено, то выражение $\{\tau\}[\alpha]$ обозначает общерекурсивную функцию, причем ту же, что согласно определению из [4].

Посредством $(\alpha)_i$ мы обозначаем псевдофункцию

$$\{\langle m, n \rangle : n = (\alpha(m))_i\};$$

$\{\alpha\}[i]$ обозначает то же, что $\{\alpha\}[\lambda x . i]$.

§ 3. Нужное нам понятие реализуемости для формул системы K отличается от понятия реализуемости из § 8 монографии [4] тем, что вместо функций используются псевдофункции. Заглавными буквами греческого алфавита мы будем обозначать произвольные списки формальных переменных, подчеркнутыми заглавными буквами греческого алфавита – произвольные списки натуральных чисел и псевдофункций. Списки Ψ и $\underline{\Psi}$ будем называть согласованными, если они имеют одну и ту же длину, и на соответствующих местах в списках Ψ и $\underline{\Psi}$ стоят либо числовая переменная и число, либо функциональная переменная и псевдофункция. Для любой формулы E, любого списка Ψ переменных, содержащего все параметры формулы E, любого списка $\underline{\Psi}$ чисел и псевдофункций, согласованного с Ψ, и любой псевдофункции $\underline{\varepsilon}$ мы определим, что значит: $\underline{\varepsilon}$ реализует E при значениях $\underline{\Psi}$ переменных Ψ, или, короче, $\underline{\varepsilon}$ $\underline{\Psi}$-реализует E. Это понятие определяется индукцией по построению формулы E.

I. $\underline{\varepsilon}$ $\underline{\Psi}$-реализует элементарную формулу P, если P истинна при значениях $\underline{\Psi}$ переменных Ψ.

2. $\underline{\varepsilon}$ $\underline{\Psi}$-реализует $A \& B$, если $(\underline{\varepsilon})_0$ $\underline{\Psi}$-реализует A и $(\underline{\varepsilon})_1$ $\underline{\Psi}$-реализует B.

3. $\underline{\varepsilon}$ $\underline{\Psi}$-реализует $A \vee B$, если из $(\underline{\varepsilon}(0))_0 = 0$ вытекает, что $(\underline{\varepsilon})_1$ $\underline{\Psi}$-реализует A, и из $(\underline{\varepsilon}(0))_0 \neq 0$ вытекает, что $(\underline{\varepsilon})_1$ $\underline{\Psi}$-реализует B.

4. $\underline{\varepsilon}$ $\underline{\Psi}$-реализует $A \supset B$, если для любой псевдофункции $\underline{\alpha}$, $\underline{\Psi}$-реализующей A, $\{\underline{\varepsilon}\}[\underline{\alpha}]$ правильно определено и $\underline{\Psi}$-реализует B.

5. $\underline{\varepsilon}$ $\underline{\Psi}$-реализует $\neg A$, если для любой псевдофункции $\underline{\alpha}$ неверно, что $\underline{\alpha}$ $\underline{\Psi}$-реализует A.

6. $\underline{\varepsilon}$ $\underline{\Psi}$-реализует $\forall x A$, если для любого натурального $\underline{x}$ $\{\underline{\varepsilon}\}[\underline{x}]$ правильно определено и $\underline{\Psi}, \underline{x}$-реализует A (точнее, реализует A при значениях $\underline{\Psi}$, $\underline{x}$ переменных Ψ, x; аналогичные вольности речи мы допускаем и в дальнейшем).

7. $\underline{\varepsilon}$ $\underline{\Psi}$-реализует $\exists x A$, если $(\underline{\varepsilon})_1$ $\underline{\Psi}, (\varepsilon(0))_0$-реализует A.

8. $\underline{\varepsilon}$ $\underline{\Psi}$-реализует $\forall \alpha A$, если для любой псевдофункции $\underline{\alpha}$ $\{\underline{\varepsilon}\}[\underline{\alpha}]$ правильно определено и $\underline{\Psi}, \underline{\alpha}$-реализует A.

9. $\underline{\varepsilon}$ $\underline{\Psi}$-реализует $\exists \alpha A$, если $(\underline{\varepsilon})_1$ Ψ, $\{(\varepsilon)_0\}[0]$-реализует A.

Формулу E назовем р е а л и з у е м о й, если существует общерекурсивная функция, реализующая ее замыкание (кванторами общности).

Определенное так понятие реализуемости обладает следующими свойствами:

(a) всякая формула, доказуемая в K, реализуема;

(б) если псевдофункция $\underline{\varepsilon}$ $\underline{\Psi}$-реализует нормальную формулу E, то E истинна при значениях $\underline{\Psi}$ переменных Ψ;

(c) для каждой нормальной формулы E можно указать примитивно рекурсивную функцию $\underline{\varepsilon}_E$, такую что $\underline{\varepsilon}_E$ $\underline{\Psi}$-реализует E, каков бы ни был список $\underline{\Psi}$ значений параметров формулы E, для которого E истинна.

Эти предложения аналогичны утверждениям 9.3 a и 8.4 a из [4] и доказываются совершенно аналогичным образом. Для их доказательства нужно развить в рамках конструктивного подхода теорию частично рекурсивных функционалов над псевдофункциями, аналогичную классической теории частично рекурсивных функционалов. При этом следует формулировать определения и теоремы так, чтобы они выражались нормальными формулами и с точки зрения классической математики были эквивалентны соответствующим определениям классической теории частично рекурсивных функционалов; тогда переформулировка необходимого фрагмента теории частично рекурсивных

функционалов и доказательств утверждений 8.4а и 9.3а не встретит препятствий.

§ 4. Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы из § I. Пусть u, $A(\alpha, b)$ и $B(\alpha)$ таковы, как предполагается в формулировке теоремы. В силу утверждения (а) из § 3, существует общерекурсивная функция φ, реализующая предложение

$$\forall \alpha_{B(\alpha)} \exists b\, A(\alpha, b).$$

В силу утверждения (с) из § 3, существует общерекурсивная функция ε, α-реализующая $B(\alpha)$, какова бы ни была псевдофункция α, такая что $B(\alpha)$. Рассмотрим такие функции φ и ε.

К о р т е ж е м назовем произвольную конечную последовательность $k_0, \ldots, k_{l-1}$ натуральных чисел, такую что для любого натурального j, меньшего l, $k_j \leq u(k_0, \ldots, k_{j-1})$. Кортеж K назовем о т м е ч е н н ы м, если для некоторого натурального p

$$\varphi(\overline{0, \varepsilon(0), \ldots, \varepsilon(p-1), K}) > 1$$

Кортеж назовем о б е с п е ч е н н ы м, если у него есть отмеченное начало.

ЛЕММА. Существует натуральное z, такое что все кортежи длины z обеспечены.

Выведем, прежде всего, из этой леммы доказываемую теорему. Пусть z таково, что все кортежи длины z обеспечены, и пусть α — общерекурсивная функция, такая что $B(\alpha)$. Требуется найти натуральное число b, такое что для любой общерекурсивной функции γ, для которой истинно $B(\gamma)$ и выполняются равенства $\gamma(0) = \alpha(0)$, $\ldots$, $\gamma(z-1) = \alpha(z-1)$, имеет место $A(\gamma, b)$. По выбору φ и ε, $\{\varphi\}[\alpha]$ и $\{\{\varphi\}[\alpha]\}[\varepsilon]$ правильно определены. Положим

$$b = (\{\{\varphi\}[\alpha]\}[\varepsilon](0))_0.$$

Пусть γ такова, что истинно $B(\gamma)$, и

$$\gamma(0) = \alpha(0), \ldots, \gamma(z-1) = \alpha(z-1).$$

По выбору φ и ε, $\{\{\varphi\}[\gamma]\}[\varepsilon]$ правильно определено, и функция

$$(\{\{\varphi\}[\gamma]\}[\varepsilon](0))_0$$

γ, $(\{\{\varphi\}[\gamma]\}[\varepsilon](0))_0$ -реализует формулу $A(\alpha, b)$. В силу утверждения (b) из § 3, отсюда следует, что истинно предложение

4 1440

$$A(\underline{\gamma},(\{\{\underline{\varphi}\}[\underline{\gamma}]\}[\underline{\varepsilon}](0))_0.$$

Но из обеспеченности всех кортежей длины $\underline{z}$ и совпадения первых $\underline{z}$ значений функций $\underline{\alpha}$ и $\underline{\gamma}$, как нетрудно проверить, вытекает, что

$$\{\{\underline{\varphi}\}[\underline{\gamma}]\}[\underline{\varepsilon}](0)=\{\{\underline{\varphi}\}[\underline{\alpha}]\}[\underline{\varepsilon}](0),$$

откуда, далее,

$$(\{\{\underline{\varphi}\}[\underline{\gamma}]\}[\underline{\varepsilon}](0))_0=\underline{b},$$

так что истинно предложение $A(\underline{\gamma},\underline{b})$, что и требовалось.

Переходим к доказательству леммы. Допустим, что не существует $\underline{z}$ с требуемым свойством. Приведя это предположение к противоречию, мы на основании принципа А.А.Маркова сможем заключить, что утверждение леммы справедливо, поскольку множество всех обеспеченных кортежей перечислимо.

Назовем кортеж т у п и к о в ы м, если длины его необеспеченных продолжений ограничены. Из сделанного предположения вытекает, что

нульчленный кортеж Λ — нетупиковый (I)

Ясно, далее, что

любой кортеж, являющийся продолжением тупикового — тупиковый, (2)

и что

если все непосредственные продолжения данного кортежа — тупиковые, то и сам он — тупиковый. (3)

Из этих утверждений вытекает, что

для любого $\underline{l}$ не все кортежи длины $\underline{l}$ — тупиковые, (4)

и что

если K — самый левый (когда кортежи расположены лексикографически) нетупиковый кортеж длины $\underline{l}$, K' — самый левый нетупиковый кортеж длины $\underline{l}+1$, то K' — продолжение K. (5)

Рассмотрим множество всех пар $\langle \underline{l},\underline{y}\rangle$ натуральных чисел, таких что если K — самый левый нетупиковый кортеж длины $\underline{l}$, то $\underline{y}$ — последний член кортежа K. Из (4) вытекает, что это множество есть псевдофункция, и для этой псевдофункции $\underline{\alpha}$ имеет

место $B(\underline{\alpha})$. Из (5) вытекает, что если K – самый левый нетупиковый кортеж длины $\underline{l}$, то K есть

$$\underline{\alpha}(0), \ldots, \underline{\alpha}(\underline{l}-1).$$

По выбору $\underline{\varphi}$ и $\underline{\varepsilon}$, $\{\underline{\varphi}\}[\underline{\alpha}]$ и $\{\{\underline{\varphi}\}[\underline{\alpha}]\}[\underline{\varepsilon}]$ правильно определены. Отсюда вытекает, что

не для всякого $\underline{p}$

$$\{\underline{\varphi}\}[\underline{\alpha}](\overline{0, \underline{\varepsilon}(0), \ldots, \underline{\varepsilon}(\underline{p}-1)}) = 0. \tag{6}$$

Пусть $\underline{p}$ таково, что

$$\{\underline{\varphi}\}[\underline{\alpha}](\overline{0, \underline{\varepsilon}(0), \ldots, \underline{\varepsilon}(\underline{p}-1)}) \neq 0. \tag{7}$$

Далее, поскольку $\{\underline{\varphi}\}[\underline{\alpha}]$ правильно определено,

не для всякого $\underline{z}$

$$\underline{\varphi}(\overline{0, \underline{\varepsilon}(0), \ldots, \underline{\varepsilon}(\underline{p}-1), \underline{\alpha}(0), \ldots, \underline{\alpha}(\underline{z}-1)}) = 0. \tag{8}$$

Пусть $\underline{z}$ таково, что

$$\underline{\varphi}(\overline{0, \underline{\varepsilon}(0), \ldots, \underline{\varepsilon}(\underline{p}-1), \underline{\alpha}(0), \ldots, \underline{\alpha}(\underline{z}-1)}) \neq 0. \tag{9}$$

Тогда выражение в левой части формулы (9) равно

$$\{\underline{\varphi}\}[\underline{\alpha}](\overline{0, \underline{\varepsilon}(0), \ldots, \underline{\varepsilon}(\underline{p}-1)}) + 1,$$

и, в силу (7), отлично от 0 и от 1. Поэтому если K – кортеж $\underline{\alpha}(0), \ldots, \underline{\alpha}(\underline{z}-1)$, то K – отмеченный. Следовательно, если K–самый левый нетупиковый кортеж длины $\underline{z}$, то K–отмеченный. Но всякий отмеченный кортеж – обеспеченный, и, следовательно, – тупиковый. Полученное противоречие доказывает, что невозможно $\underline{z}$, удовлетворяющее условию (9). Но это противоречит утверждению (8). Поэтому невозможно $\underline{p}$, удовлетворяющее условию (7). Но это заключение противоречит утверждению (6). Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Как нам кажется, есть основания ожидать, что метаматематические результаты вроде полученного в этой заметке, могут принести пользу для математических исследований в рамках конструктивного направления, особенно если они будут получены для сильных систем, таких как система из [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Bishop E. Mathematics as a numerical language. Intuitionism and Proof Theory, Proceedings of the Summer conference at Buffalo N.Y.1968, Amsterdam 1970, 53-71.
2. Heyting A. Intuitionism. An introduction. Amsterdam, 1956.

(перевод на русский язык: А.Гейтинг, Интуиционизм. Введение. М., 1965).

3. Марков А.А. О конструктивной математике. Труды Матем.ин-та им.В.А.Стеклова, 1962, ХУП, 8-14.

4. Kleene S.C., Vesley R.E. Foundations of intuitionistic mathematics. Amsterdam, 1965.

5. Гельфонд М.Г. О конструктивных псевдофункциях. Записки научных семинаров Ленингр.отд.Матем.ин-та им.В.А.Стеклова, 1969, 16, 20-27.

6. Гельфонд М.Г., Лифшиц В.А. О конструктивных множествах и непредикативном образовании понятий. Сб."Исследования по теории алгорифмов и математической логике". 2. ВЦ АН СССР (в печати).